Теория оптимизации
Лекция 2

Кац Борис Арнольдович

Доцент, к.т.н.

b-katz@yandex.ru

В прошлой лекции

- Введение, основные определения

В этой лекции

- Из мат. анализа – об экстремуме функции
- Изолинии
- Примеры на экстремум – условный и безусловный
- Примеры одномерного поиска
- Примеры покоординатного спуска, некоторые особые случаи

Экстремум функции. Необходимое и достаточное условие экстремума

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

Необходимое условие экстремума

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} = 0, \quad i = 1..n$$

Достаточное условие минимума:

$$\left. detH(f)\right|_{x=x^*} > 0$$

Гессиан, матрица Гессе (определения)

- Гессиан
- «окаймленный гессиан» (определитель)

Гессиан (матрица Гессе).

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Экстремум функции одной переменной

Необходимое условие экстремума $f(x)$:

$$f'(x)\big|_{x=x^*} = 0$$

Достаточное условие минимума (гессиан размера 1x1):

$$f''(x)\big|_{x=x^*} > 0$$

Однако, может быть что $f''(x)\big|_{x=x^*} = 0$.
Если все $f^{(i)} = 0,\ i = 1..n-1$, а $f^{(n)} \neq 0$, то:

- Если n - нечетное, то минимума нет (а есть перегиб)
- Если n - четное, то при $f^{(n)}\big|_{x=x^*} < 0$ - минимум, при $f^{(n)}\big|_{x=x^*} > 0$ - максимум

Пример 1. Аналитический поиск безусловного экстремума. Функция одной переменной

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + 2x + 38$$

$$f'(x) = 3x^2 + 20x + 2$$

Достаточное условие

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 20x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \times 2 \times 3}}{6} = (-6.57, -0.1)$$

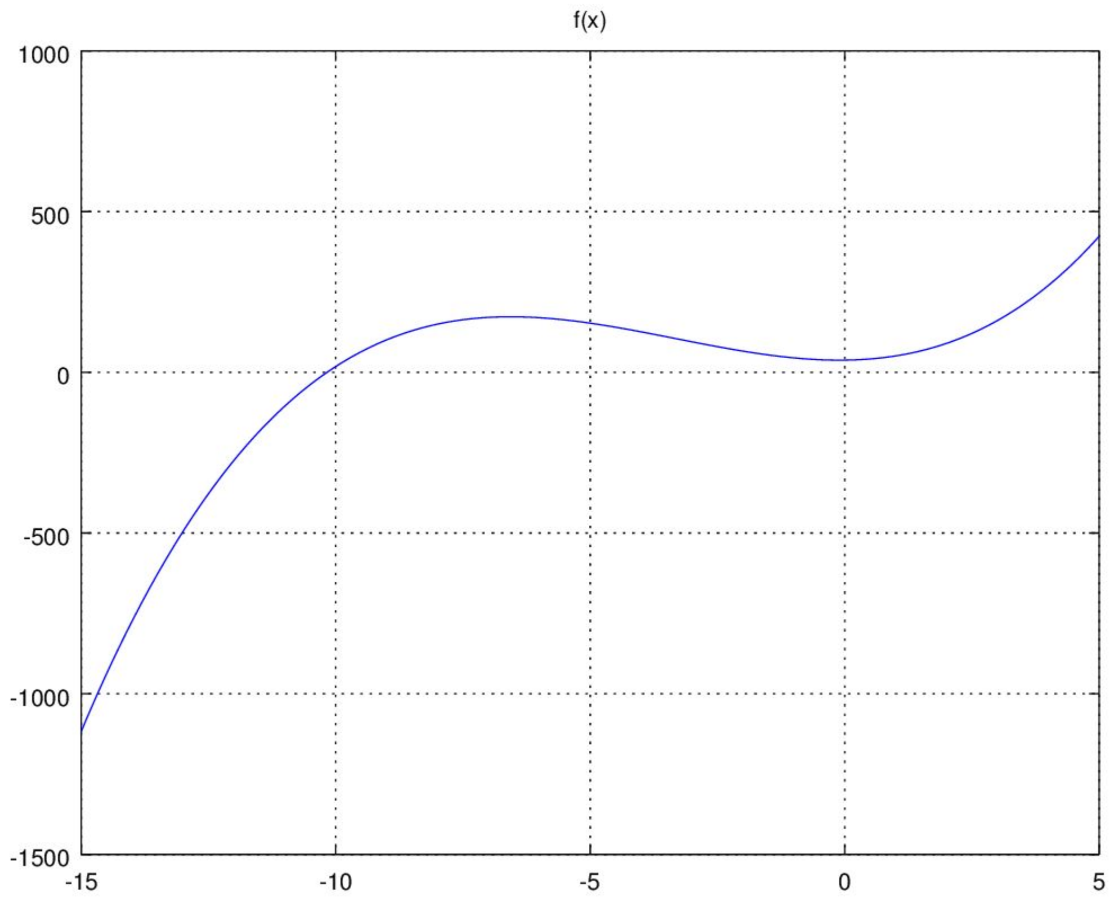
Две точки подозрительны на экстремум.
Определим значения вторых производных

$$f''(x) = 6x + 20$$

в точках, подозрительных на экстремум принимает значение -19.39, 19.39 соответственно.

Значит ($n = 2$, четно - экстремум есть) - точка $x_1 = -6.57$ - точка максимума, точка $x_2 = -0.1$ - точка минимума.

К примеру 1



Пример 2. Аналитический поиск условного экстремума. Функция одной переменной

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + 2x + 38$$

$$x \in [-5, 5]$$

Точки, подозрительные на экстремум:

- $x_2 = -0.1$ (локальный минимум)
- левый край интервала $x_a = -5$
- правый край интервала $x_b = 5$

Вычисляем значение функции.

$$f(x_a) = 153$$

$$f(x_b) = 423$$

$$f(x_2) = 37.9$$

Минимум: x_2 Максимум: x_b

Условный экстремум. Функция двух переменных

- Это – также сведения из мат.анализа.

$$f(\vec{x}) \to \min$$

при условии:

$$x \in G$$

$$g_i(\vec{x}) = 0, \quad x = 1..m$$

Функция Лагранжа:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sum \lambda_i g_i(\vec{x})$$

Пример 3. Аналитический поиск безусловного экстремума. Функция двух переменных

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 128$$

Необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Точка (0,0) подозрительна на экстремум.

Гессиан (матрица Гессе).

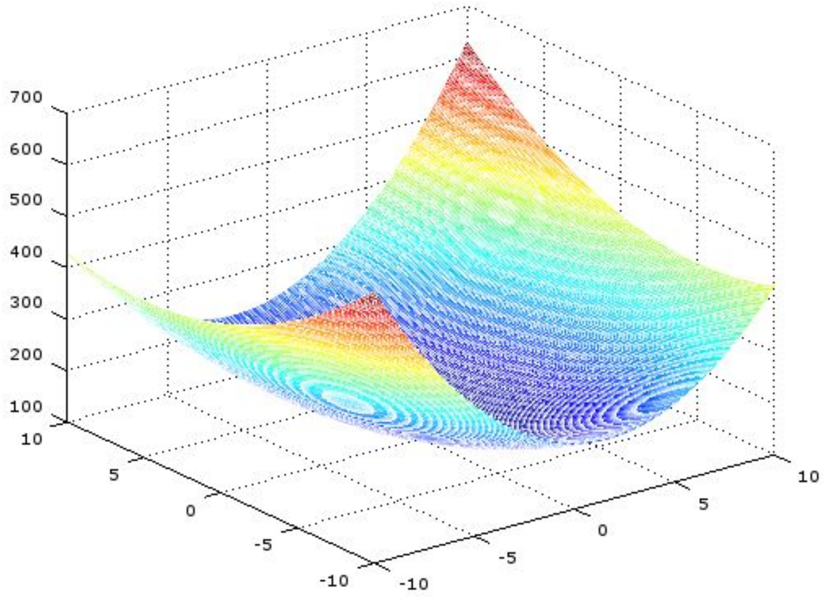
$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

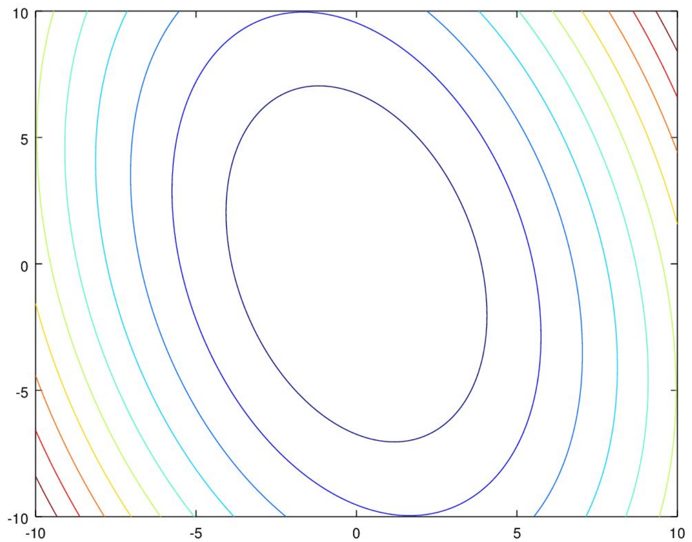
$$H = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = 11 > 0$$

следовательно, (0,0) - это минимум.

К примеру 3





Пример 4. Аналитический поиск экстремума в заданной области.

Функция двух переменных

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 128$$

$$x_1 \in [5, 10]$$

$$x_2 \in [5, 10]$$

Точка (0,0) не вошла. Граничные линии:

$$f(x_1, x_2)|_{x_1=5} = x_2^2 + 5x_2 + 203$$

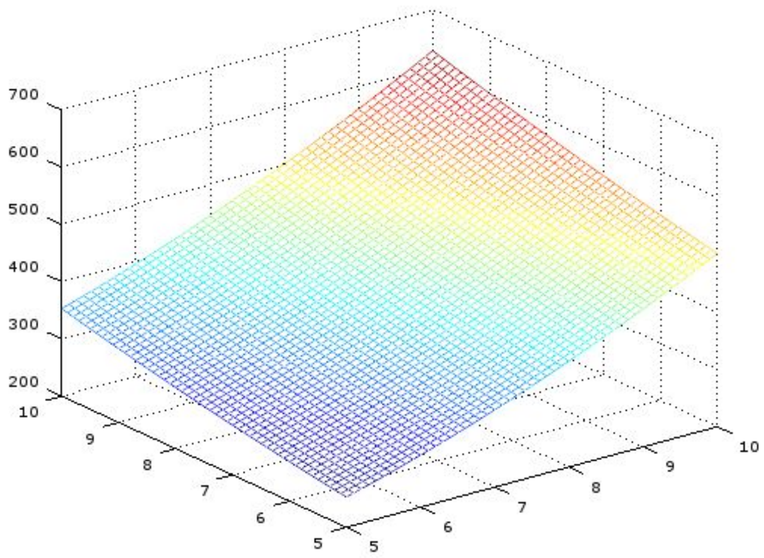
$$f(x_1, x_2)|_{x_1=10} = x_2^2 + 10x_2 + 428$$

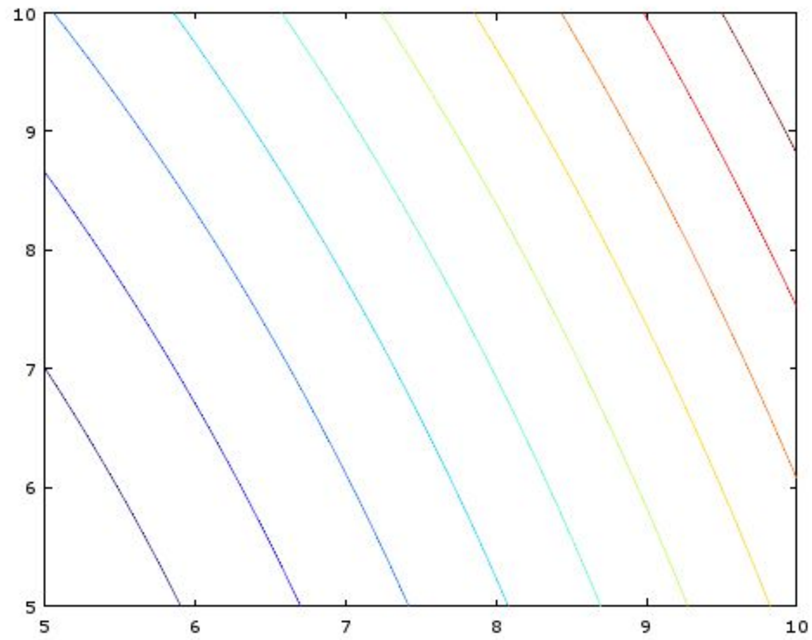
$$f(x_1, x_2)|_{x_2=5} = 3x_1^2 + 5x_1 + 153$$

$$f(x_1, x_2)|_{x_2=10} = 3x_1^2 + 10x_1 + 228$$

минимум этих функций на заданном промежутке достигается в точке (5,5).

К примеру 4





Пример 5. Аналитический поиск условного экстремума функции двух переменных

$$f(\vec{x}) = 5 - 3x_1 - 4x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 25$$

Связь - переписываем в виде

$$g(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 25$$

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$$

$$L(\vec{x}) = 5 - 3x_1 - 4x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 25)$$

Условие экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -3 - 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4 - 2\lambda x_2 = 0$$

Пример 5 (продолжение)

Система уравнений:

$$\begin{cases} -3 - 2\lambda x_1 = 0 \\ -4 - 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2\lambda} \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} \\ 1 = 4\lambda^2 \end{cases}$$

Два случая:

- $\lambda = 1/2 \; x_1 = -3, \; x_2 = -4.$
- $\lambda = -1/2 \; x_1 = 3, \; x_2 = 4.$

Определяя значение $detH(\vec{x}, \lambda)$ - определяем максимум и минимум.

Определите самостоятельно

Пример 6. Поиск минимума методом половинного деления

Шаг	a	b	x1	x2	f(x1)	f(x2)
0	0	10	4.9900	5.0100	5.2441	5.3361
1	0	5.0100	2.4950	2.5150	0.042025	0.034225
2	2.4950	5.0100	3.7425	3.7625	1.0868	1.1289
3	2.4950	3.7625	3.1188	3.1387	0.17535	0.19250
4	2.4950	3.1387	2.8069	2.8269	0.011422	0.016097
5	2.4950	2.8269	2.6509	2.6709	0.0024071	8.5e-004

$$f(x) = (x - 2.7)^2$$

$$x \in [0, 10]$$

Пример 7. Поиск минимума методом золотого сечения

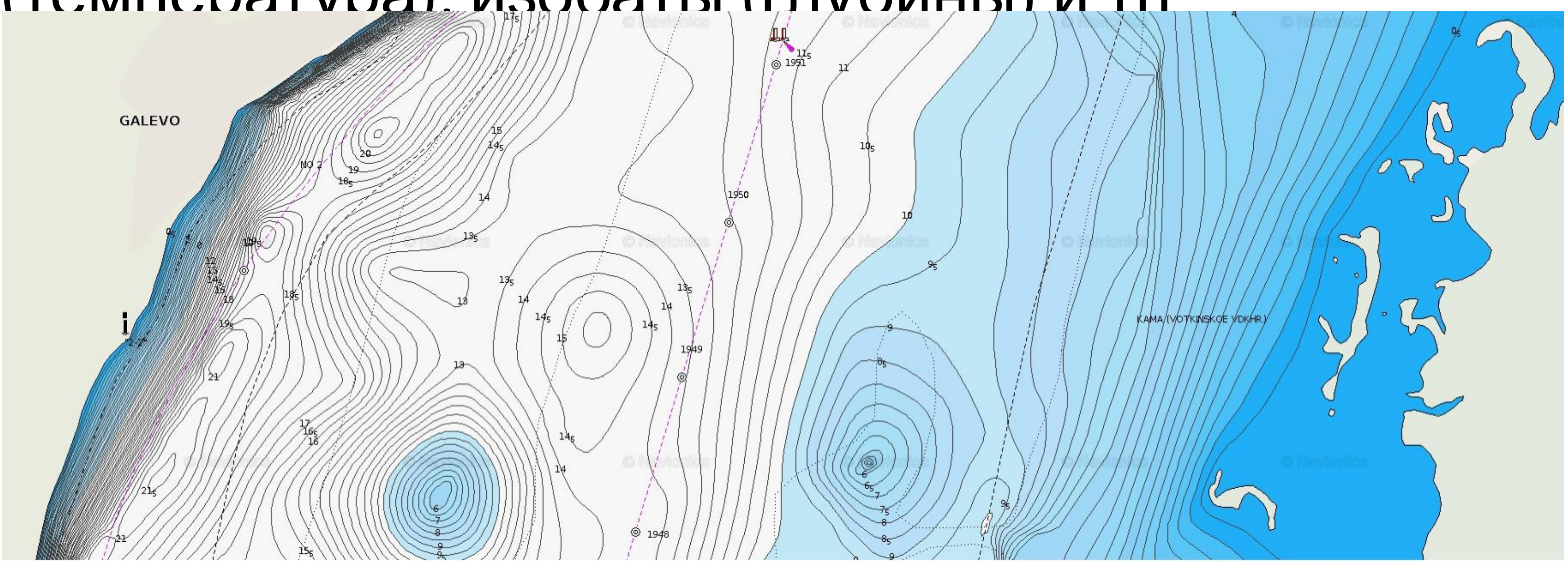
Шаг	a	b	x1	x2	f(x1)	f(x2)
0	0	10	3.8195	6.1805	1.2533	12.114
1	0	6.1805	2.3606	3.8198	0.11516	1.2540
2	0	3.8198	1.4590	2.3608	1.5401	0.11504
3	1.4590	3.8198	2.3607	2.9181	0.11511	0.047565
4	2.3607	3.8198	2.9180	3.2625	0.047536	0.31642
5	2.3607	3.2625	2.7052	2.9181	2.6e-005	0.047554

$$f(x) = (x - 2.7)^2$$

$$x \in [0, 10]$$

Линии уровня. Примеры

- Линии (в трехмерном пространстве - поверхности), где значение функции постоянно. Также – изолинии.
- Примеры – изобары (давление), изотермы (температура), изобаты (глубины) и тп.



Виды изолиний

- Изоанемона — линия одинаковых среднегодовых скоростей ветра.
- Изобаза — линия на карте, соединяющая точки с равной амплитудой и направлением неотектонических движений.
- Изобара — изолиния одинакового давления:
  - изобара в термодинамике — график изобарного процесса;
  - изобара в метеорологии — линия на карте, обозначающая область с той или иной границей давления.
- Изобата — линия на карте, или плане, соединяющая точки одинаковых глубин водоёма (озера, моря).
- Изогалина — линия на географической карте, соединяющая точки с одинаковой солёностью воды.
- Изогиета — изолиния одинакового выпадения атмосферных осадков.
- Изогипса (горизонталь) — изолиния одинаковых высот (обычно для отображения рельефа на топографической карте).
- Изогона — изолиния ориентации каких-либо физических величин.
- Изодинама (от изо … и греч. dynamis — сила) — изолиния полной напряжённости земного магнитного поля или её составляющих (горизонтальной, вертикальной и др.) на магнитных картах.
- Изотерма — изолиния одинаковых температур:
  - изотерма в термодинамике — график изотермического процесса;
  - изотерма в метеорологии — линия на карте, обозначающая область с той или иной границей температуры.
- Изокванта — изолиния одинакового объёма производства продукта в зависимости от факторов производства.
- Изокоста — линия, демонстрирующая комбинации факторов производства, которые можно купить за одинаковую общую сумму денег.
- Изопахита — изолиния одинаковых мощностей пласта горных пород.
- Изотаха — изолиния одинаковых скоростей ветра (на карте максимальных ветров).
- Изохора — изолиния одинаковых объёмов.

Пример. Изотермы

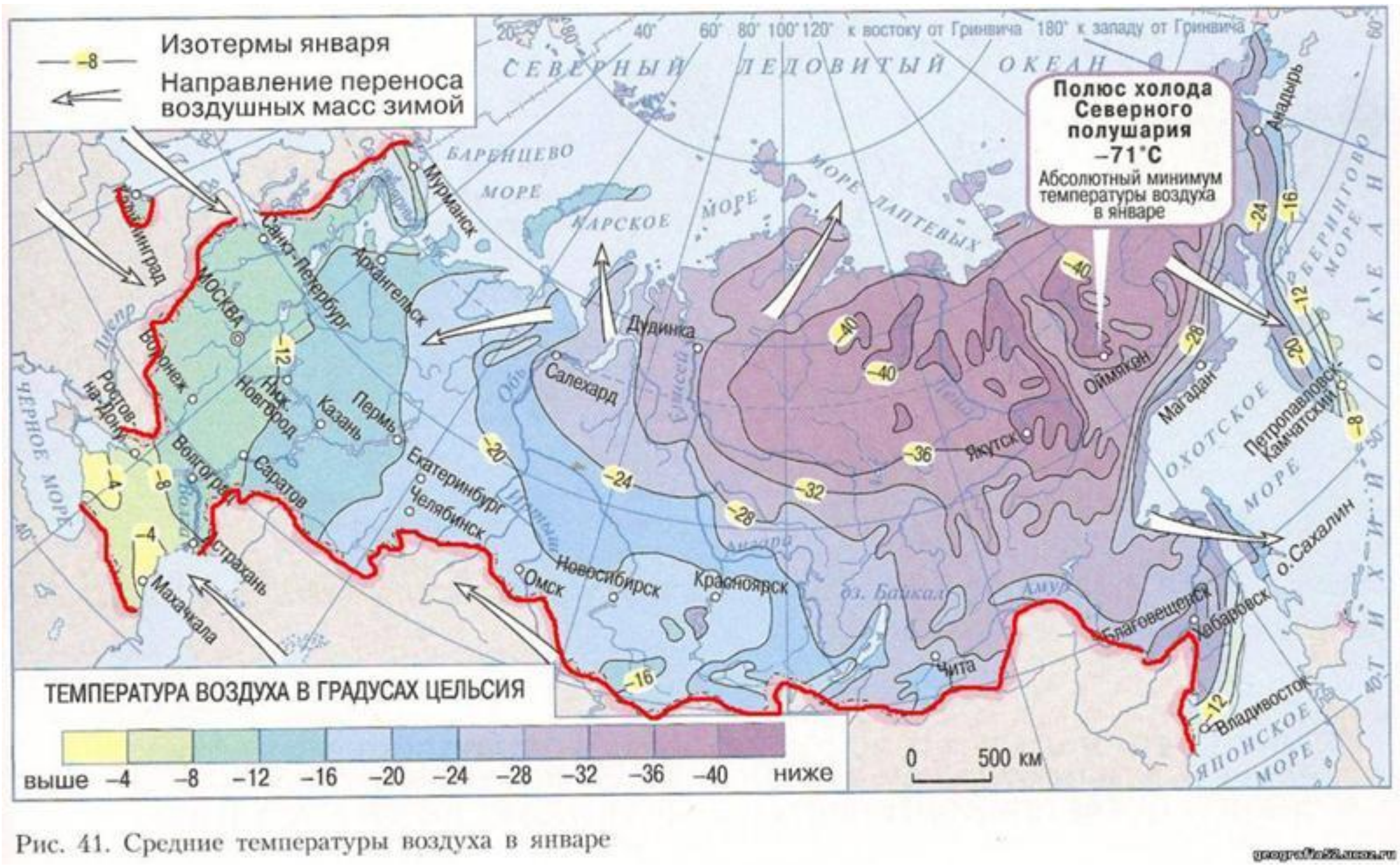
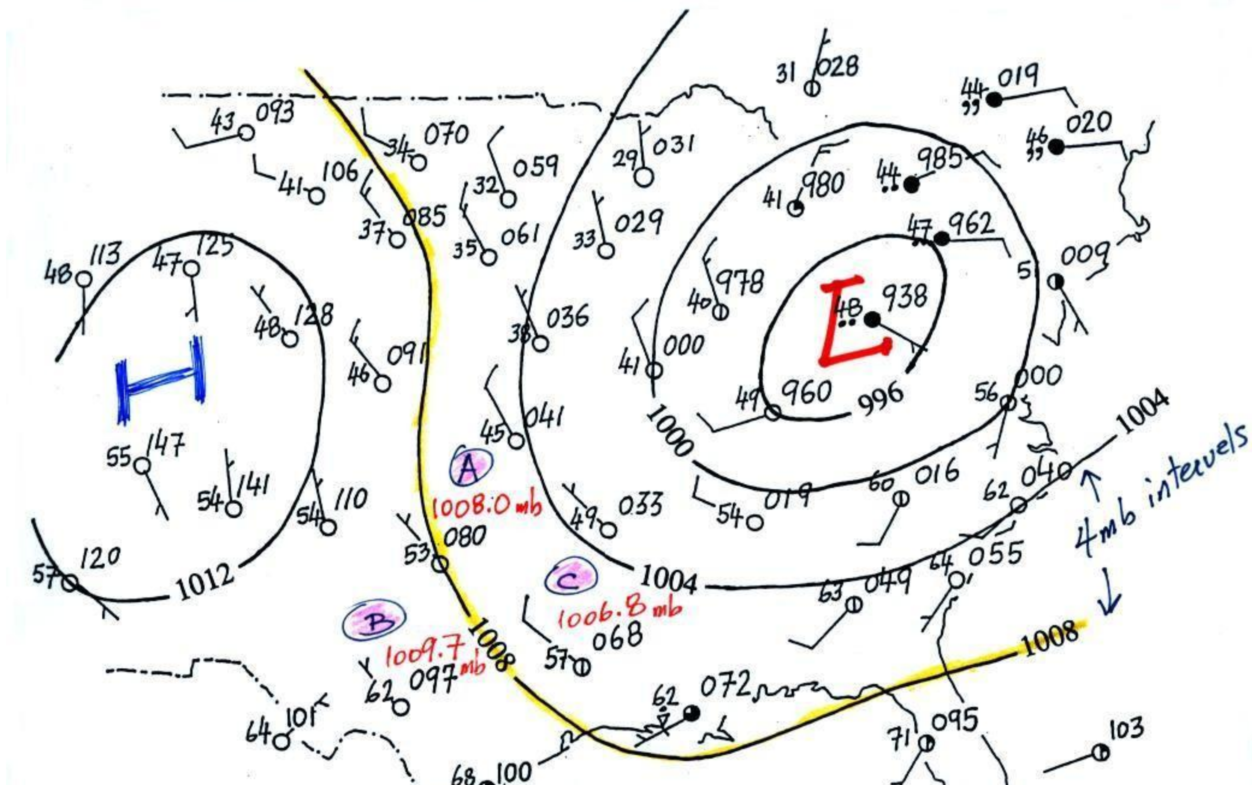


Рис. 41. Средние температуры воздуха в январе

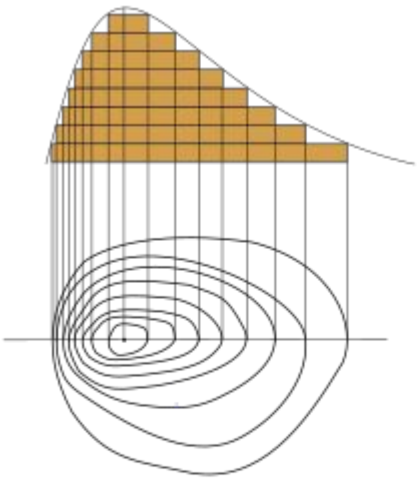
Пример. Изобары

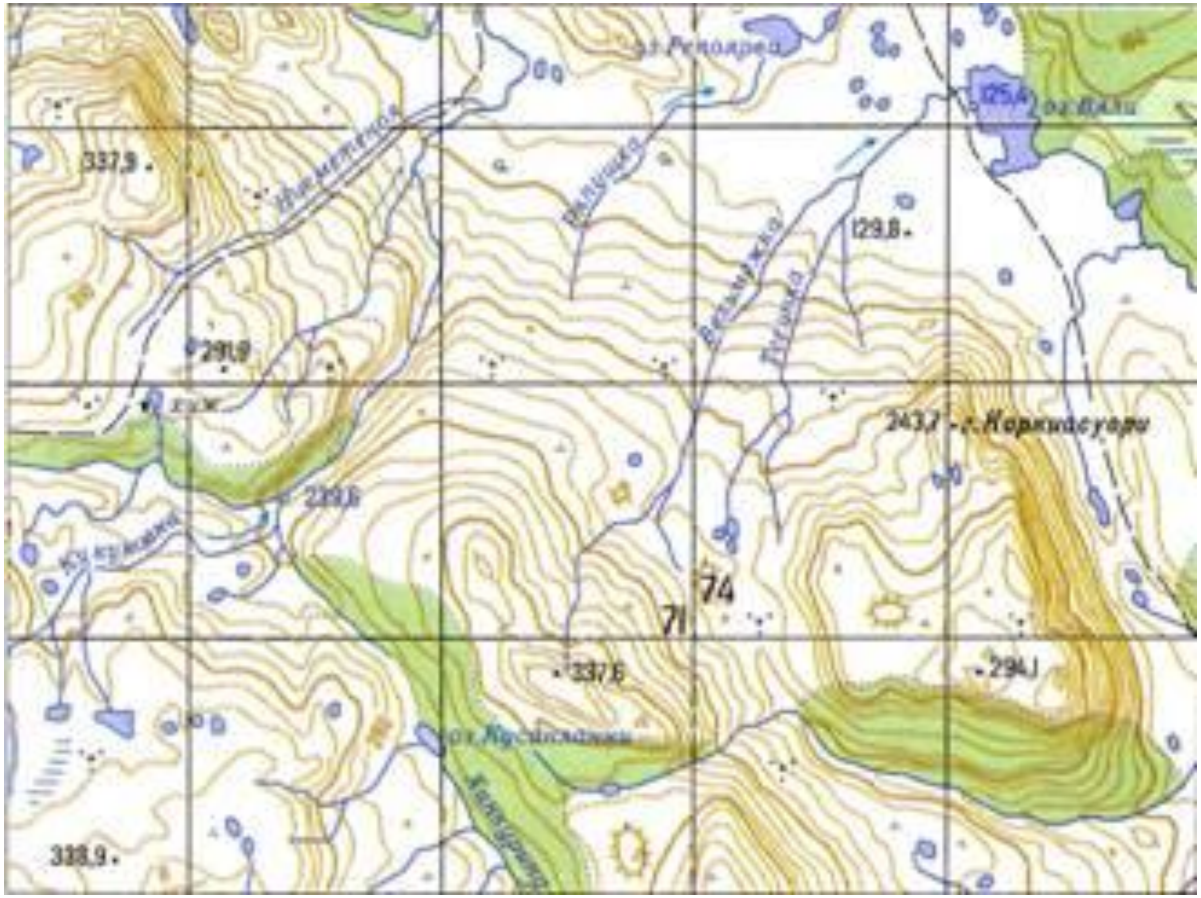


Isobars - Pressure Contours

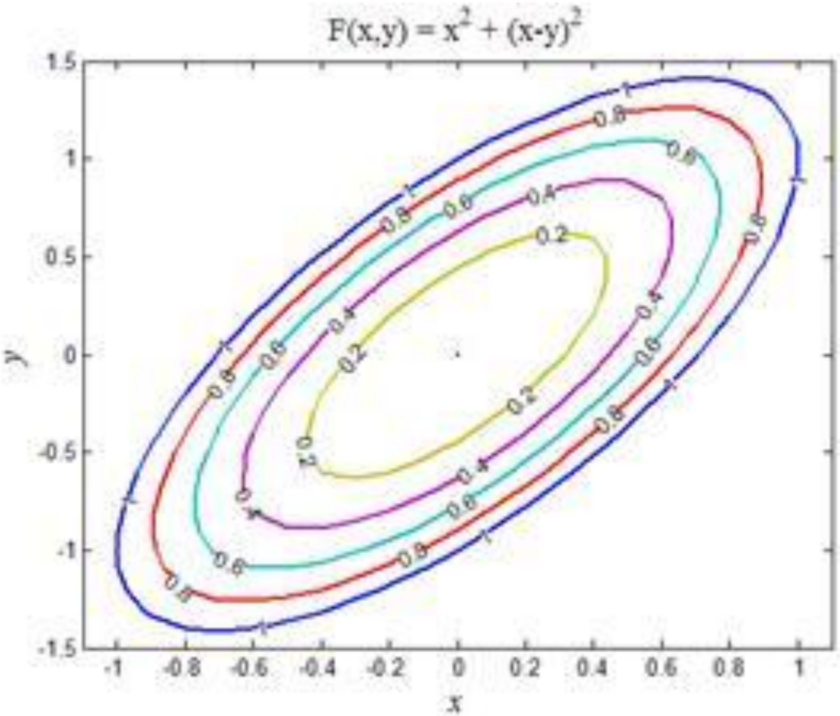
① connect points with equal pressures.
② separate High pressure regions from Low pressure regions.

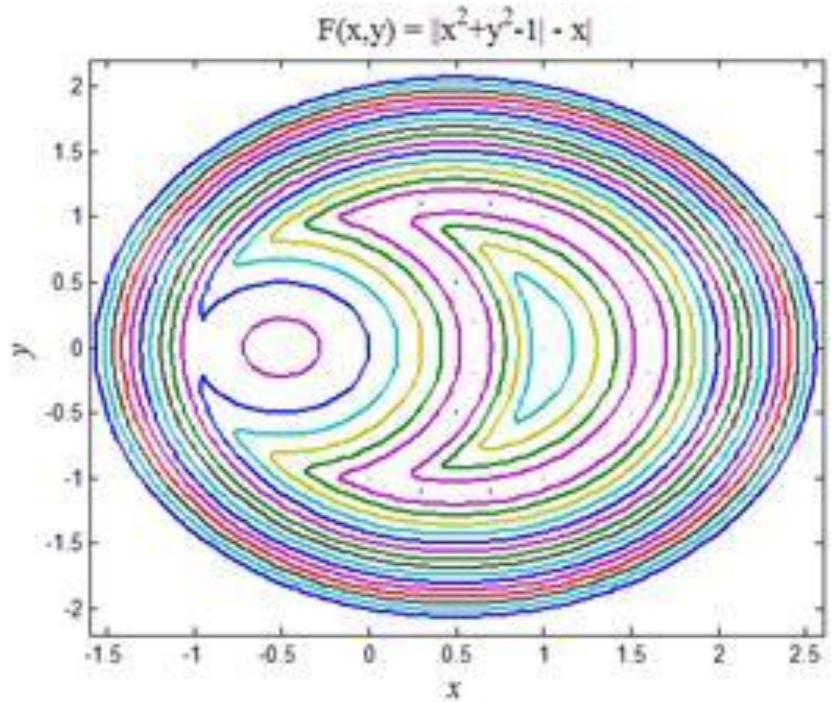
Пример. Изогипсы (горизонтали)





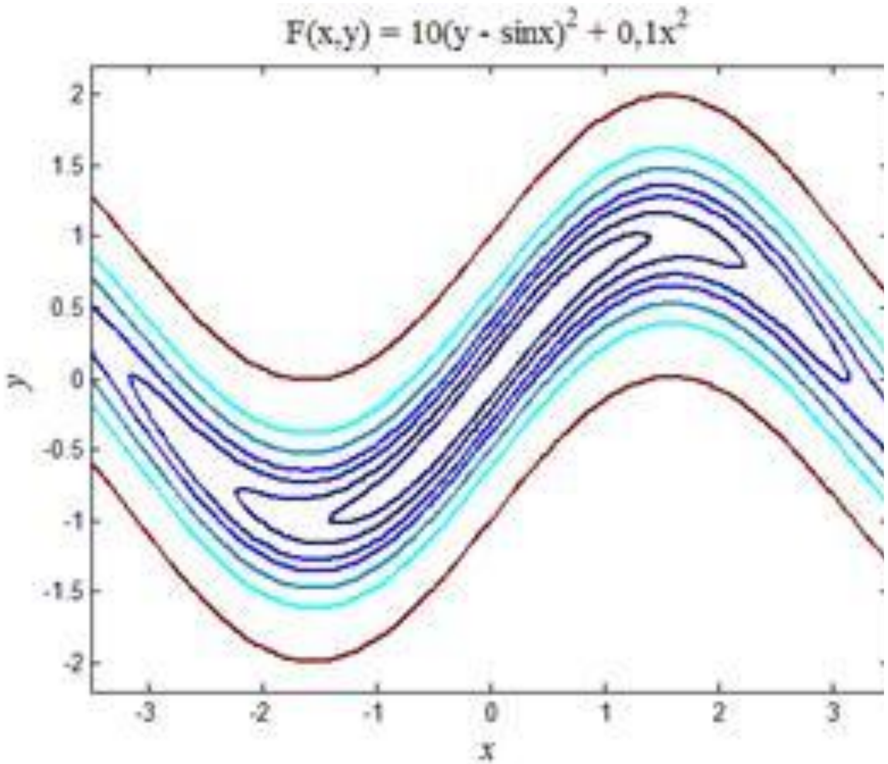
Картины линий уровня. Котловины и овраги

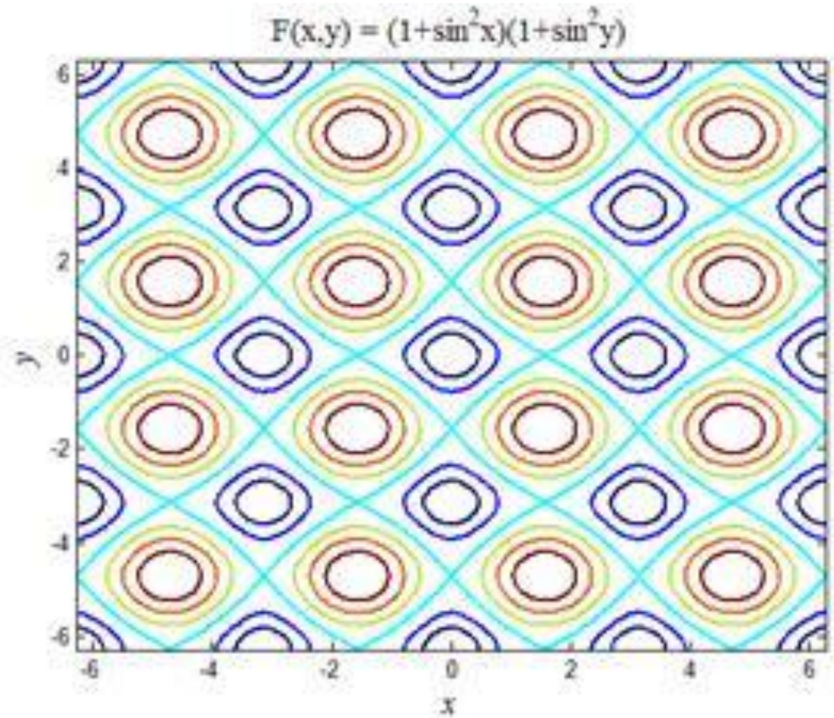




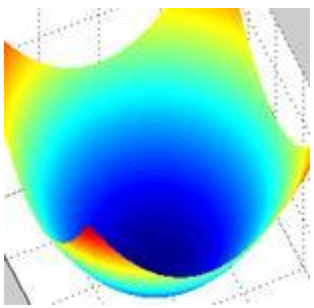
- Совокупность точек излома = истинный овраг

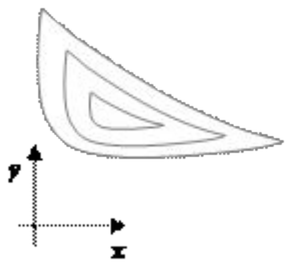
Разрешимый овраг и неупорядоченный рельеф

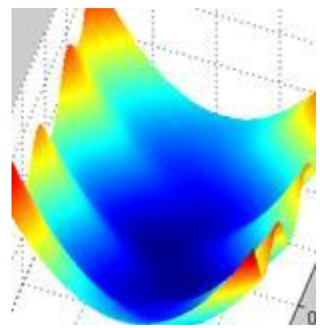


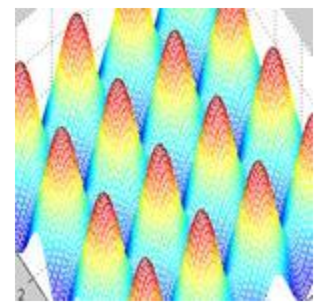


Поверхности. Котловины, овраги, разрешимые овраги, неупорядоченный рельеф









Как построить линии уровня аналитически?

Общий случай 2х переменных $f(x_1, x_2) = const = C$

Пример.

$$f(x_1, x_2) = x^2 + y^2$$

Линии уровня:

$$x^2 + y^2 = C$$

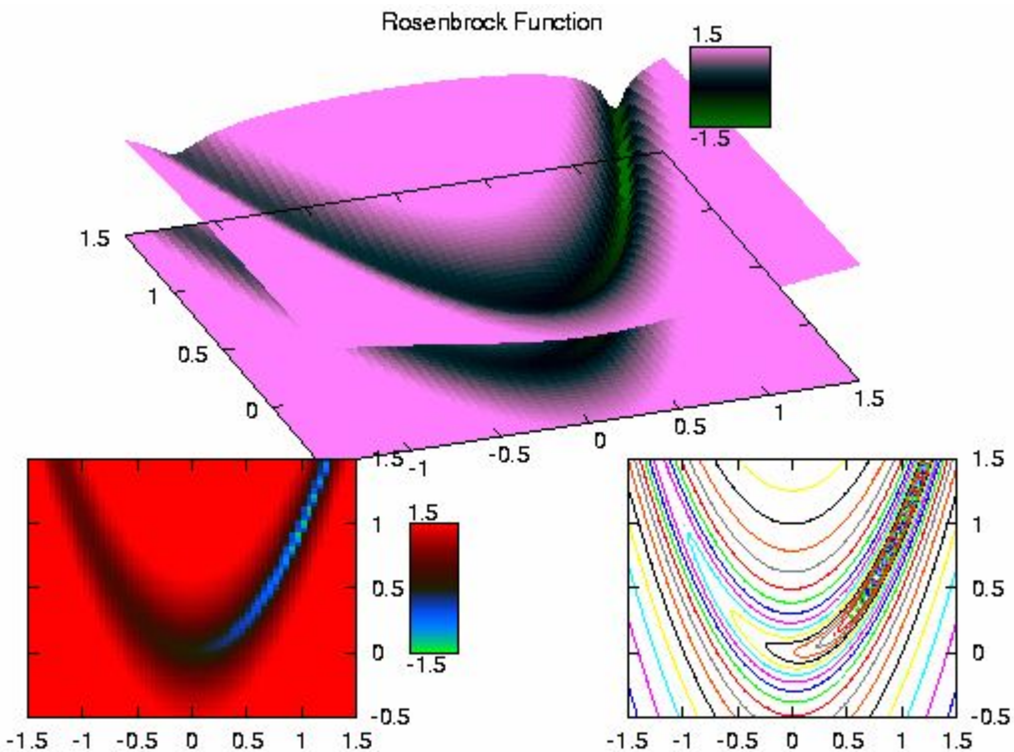
окружности радиуса $\sqrt{C}, C > 0.$

Овражные функции как «тестовые примеры» для алгоритмов

- Функция Розенброка (“banana function”)

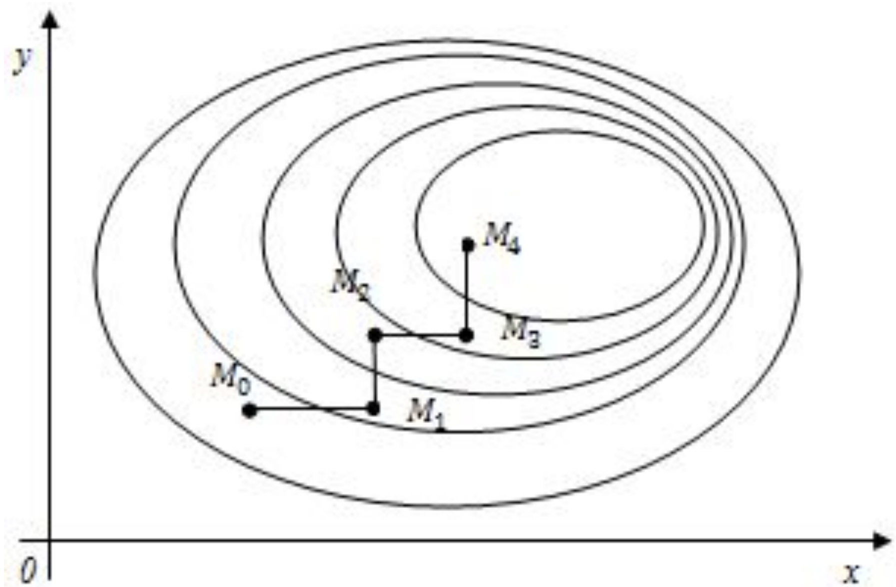
$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

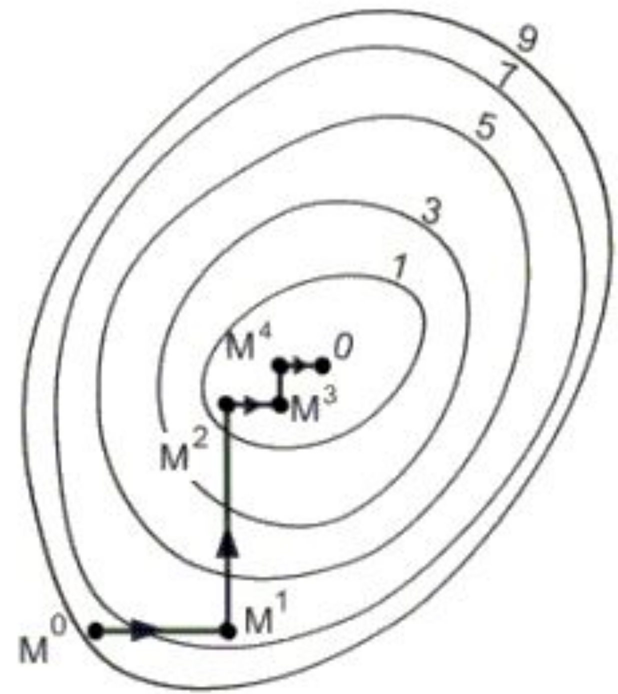
Имеет глобальный минимум в точке (1,1)



Покоординатный спуск. Примеры и иллюстрации

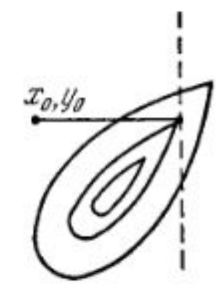
- По каждой из координат можно решать одномерную задачу (золотое сечение, деление пополам)





Недостатки метода покоординатного спуска

- Существуют функции, для которых покоординатный спуск не находит локальный минимум.
- Пусть линии уровня образуют истинный овраг (см.рис), когда спуск по любой координате приводит на <<дно>> оврага, а любое движение по следующей координате (пунктирная линия) ведет на подъем. Никакой дальнейший спуск по координатам в данном случае невозможен, хотя минимум еще не достигнут.



Что нужно уметь делать самостоятельно

- Находить аналитически экстремум функции одной и двух переменных (безусловный и условный)
- Вычислять экстремум функций одной переменной (глобальный и локальный) методами сеток, половинного деления, золотого сечения

Книги по этой части курса

- Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. Пер а англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 126

- *Рекомендую прочесть также:*
- Первозванский А.А. Поиск. - М. : Наука : Физматлит, 1970. - 263 с.

Спасибо за внимание.
Вы свободны