Дискретная математика

Предикаты

Предикат – это функция вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y,$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - предметные переменные; y - значение предиката.

Предикаты

$$x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$$

где $M_1, M_2, \dots, M_n$ – предметные множества,

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$ –

поле предиката.

Предикаты

Переменная y – может принимать значения из множества

$$B=\{0, 1\}.$$

Здесь 0 – «нет», «ложь»;

1 – «да», «истина».

Предикаты

Например:

1) на множестве N задан предикат P(x) – «x является четным числом».

Тогда P(1)=0, P(2)=1.

2) На множестве N×N задан предикат Q(x,y) – «x≤y».

Тогда

Q(1,1)=1; Q(1,2)=1; Q(3,2) =0.

Предикаты

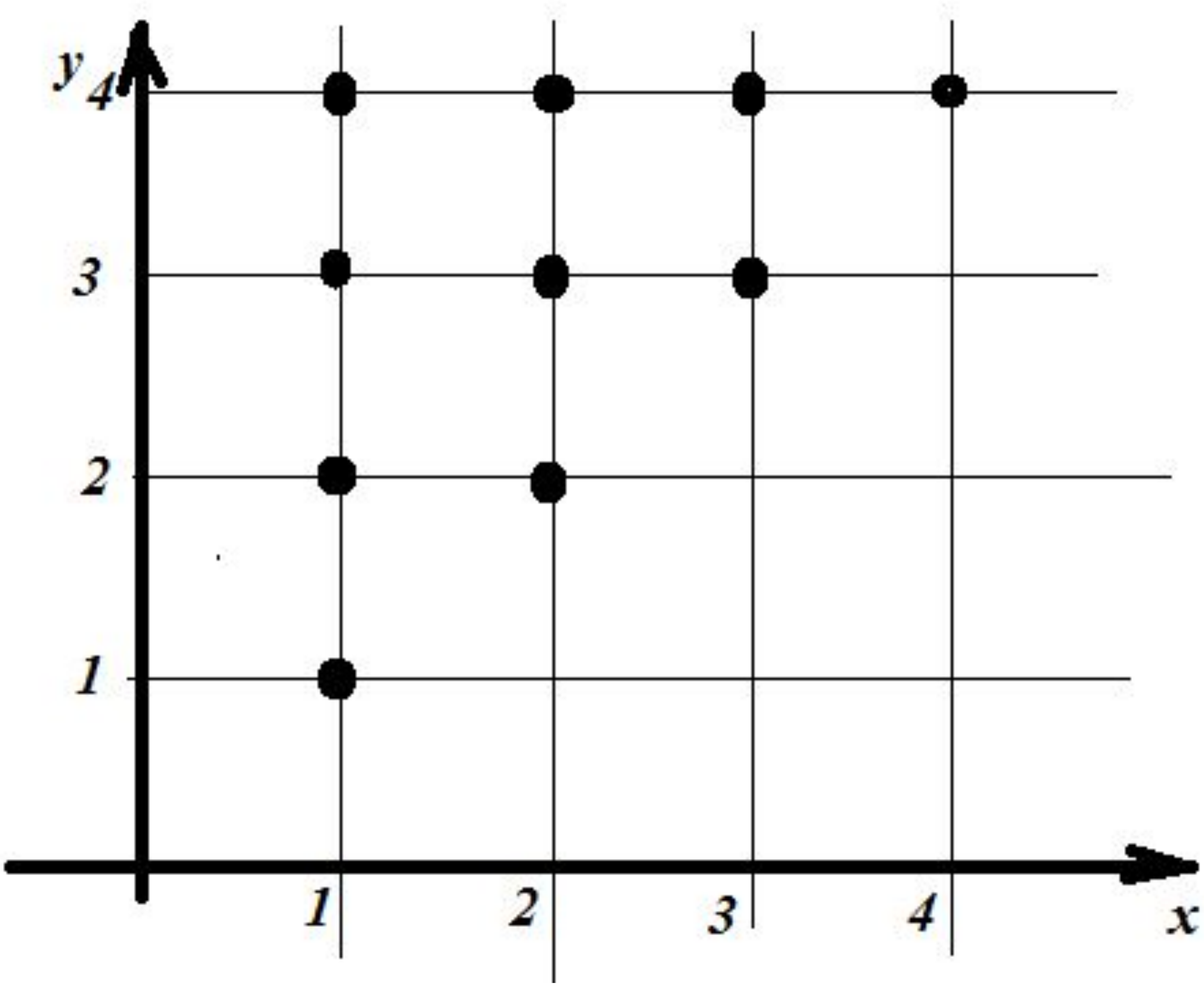
Подмножество I множества M называется областью истинности предиката P, если наборы значений предметных переменных из множества I обращают предикат P в 1.

Предикаты

Например:

Для предиката Q(x,y) область истинности I – множество всех точек плоскости с натуральными координатами, лежащие на диагонали первого координатного угла и выше.

Предикаты



Предикаты

Над предикатами можно совершать знакомые нам логические операции:

Конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, импликацию, и т. д.

Например:

$P(x,y)$ – «$x<y$», $R(x,y)$ – «$x=y$».

Тогда $\neg P(x,y)$ – «$x \geq y$»,

$P(x,y) \vee R(x,y)$ – «$x \leq y$» и т. д.

Предикаты

При этом область истинности полученных предикатов изменяется по тем же правилам:

$$I_{\neg P} = \overline{I_P};$$

$$I_{P \vee R} = I_P \cup I_R;$$

и так далее.

Предикаты

Однако в логике предикатов есть операция, которая отсутствуют в логике высказываний.

Квантификация или ***квантирование***

В результате этой операции на переменную предиката навешивается квантор (переменная связывается квантором). Переменная при этом становится ***связанной***. Переменная, не связанная называется ***свободной.***

Предикаты

Существуют два вида кванторов:

Квантор общности $\forall$ – «для любого, для каждого».

Квантор существования $\exists$ – «существует, найдется».

Предикаты

Предикатная формула:

$$\forall x P(x)$$

истинна тогда и только тогда, когда предикат P(x)=1 при любом x,

ложна тогда и только тогда, когда найдется x, при котором предикат P(x)=0.

Предикаты

Предикатная формула:

$$\exists x P\left(x\right)$$

истинна тогда и только тогда, когда найдется x, при котором предикат P(x)=1,

ложна тогда и только тогда, когда предикат P(x)=0 при любом x.

Замечание

Когда в предикате P(x) переменная *x* связывается квантором, она перестает влиять на значение предиката и ***предикат становится высказыванием***, принимающим фиксированное значение *Истина* или *Ложь.*

Предикаты

Например: P(x) – «x является четным числом» на множестве N

Тогда $\forall x P\left(x\right)=0$

так как есть x=3, при котором P (3)=0.

Тогда $\exists x P\left(x\right)=1$

так как есть x=2, при котором P (2)=1.

Предикаты

Если предикат имеет более 1 переменной, то ее квантификация приводит к уменьшению числа переменных на 1.

Например:

предикат $Q(x,y)$ – «$x \le y$» на множестве $N \times N$.

Предикаты

$$\forall x Q(x, y) = R(y) -$$

новый предикат от одной переменной y – «*любое натуральное число x меньше либо равно y».*

При y=1 это не так (любой x ≤1) ,

$$\forall x Q(x,1) = R(1) = 0,$$

При y=2 это не так (любой x ≤2),

$$\forall x Q(x,2) = R(2) = 0,$$

Предикаты

Таким образом, предикат

$$R(y) = \forall x Q(x, y) = 0$$

то есть является функцией - константой

Предикаты

$\exists x Q(x, y) = W(y)$ –

новый предикат от одной переменной y – «*найдется натуральное число x меньше либо равно y».*

При y=1 это так (найдется x ≤ 1) ,

$\exists x Q(x, 1) = W(1) = 1,$

При y=2 это так (найдется x ≤2),

$\exists x Q(x, 2) = W(2) = 1,$

Предикаты

Таким образом, предикат

$$\mathrm{W}(y) = \exists x Q(x, y) = 1$$

то есть тоже является функцией -константой

Предикаты

Кванторы можно навесить на все переменные предиката. Тогда предикат станет высказыванием.

Например:

предикат $Q(x,y)$ – «$x \le y$».

Предикаты

$$\forall x \forall y Q(x, y) = 0$$

так как неверно то, что *любой натуральный х меньше либо равен любого натурального у*.

Например, при х=5, у=2.

Предикаты

$$\forall x \exists y Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *любой натуральный x меньше либо равен некоторого натурального y.*

Например, при x=1, y=1; при x=2, y=2, …

Предикаты

$$\exists y \forall x Q(x, y) = 0$$

так как **неверно то**, что *найдется такой натуральный у, который будет больше либо равен любого натурального х*.

Это связано с тем, что натуральное множество не ограничено сверху.

Предикаты

$$\exists x \forall y Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *найдется такой натуральный х, который будет меньше либо равен любого натурального у.*

Этот х=1. Если бы неравенство было строгое, высказывание было бы ложным.

Предикаты

$$\forall y \exists x Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *любой натуральный y, больше либо равен некоторого натурального x*.

Например, y=1, x=1;

y=2, x=2,…

Предикаты

$$\exists x \exists y Q(x, y) = 1$$

так как верно то, что *найдутся такие натуральные x и y, что x меньше либо равен этого y*.

Например x=3, y=7.

Логика предикатов

Логика предикатов, как и логика высказываний, – свод правил, по которым строятся формулы связывающие простые предикаты в предикатные формулы и порядок определения истинности/ложности этих формул.

Логика предикатов

Равносильные предикатные формулы – те, у которых область истинности совпадает.

Логика предикатов

Интерпретация – это сопоставление каждому предикатному символу в формуле определенного предиката.

Логика предикатов

Пусть формулы F и G содержат одно и тоже множество свободных переменных. Формулы F и G ***равносильны в данной интерпретации –*** если они выражают один и тот же предикат.

Логика предикатов

Например:

$$P(x,y): x > y; \quad Q(x,y): x \leq y.$$

Тогда предикатные формулы:

$$F = \neg P(x,y) \quad \text{и} \quad G = Q(x,y)$$

являются равносильными в данной интерпретации, так как

$$\neg P(x,y) = Q(x,y).$$

При других интерпретациях предикатов P и Q формулы могут не быть равносильными.

Логика предикатов

Формулы F и G ***равносильны на множестве М –*** если они равносильны во всех интерпретациях на этом множестве.

Логика предикатов

Например: $F = \forall x P(x), G = \exists x P(x)$

Равносильны в любой интерпретации на множестве М, если М состоит из одного элемента. Если

$$a \in M : P(a) = 0, \forall x P(x) = 0 \quad \exists \quad (\quad) = 0.$$

Если

$$a \in M : P(a) = 1, \forall x P(x) = 1 \quad \exists \quad (\quad) = 1.$$

На другом множестве формулы F и G могут не быть равносильными.

Логика предикатов

Формулы F и G ***равносильны в логике предикатов*** – если они равносильны на всех множествах.

Логика предикатов

Например:

$$F = P(x) \vee \neg P(x),$$

$$G = \neg\left(P(x) \cdot \neg P(x)\right).$$

Тогда F и G равносильны на любых множествах и при любых интерпретациях предиката P(x).

$$F \equiv G$$

Равносильные формулы

Для предикатных формул сохраняются все равносильности (эквивалентности) алгебры логики.

Например, закон де Моргана:

$$\neg\left(P(x) \vee Q(x)\right) \equiv \neg P(x) \cdot \neg Q(x)$$

$$\neg\left(P(x) \cdot Q(x)\right) \equiv \neg P(x) \vee \neg Q(x)$$

Свойства операций над предикатами

Перенос квантора через отрицание

$$\neg\left(\forall x P(x)\right) = \exists x\left(\neg P(x)\right) \qquad (1)$$

$$\neg\left(\exists x P(x)\right) = \forall x\left(\neg P(x)\right) \qquad (2)$$

Здесь и далее, знак равносильности ≡ заменен знаком равенства.

Свойства операций над предикатами

Вынос квантора за скобки

$$\left(\forall x P\left(x\right)\right)\cdot Q=\forall x\left(P\left(x\right)\cdot Q\right)\quad(3)$$

$$\left(\forall x P\left(x\right)\right)\vee Q=\forall x\left(P\left(x\right)\vee Q\right)\quad(4)$$

Свойства операций над предикатами

Вынос квантора за скобки

$$\left(\exists x P\left(x\right)\right) \cdot Q = \exists x\left(P\left(x\right) \cdot Q\right) \quad (5)$$

$$\left(\exists x P\left(x\right)\right) \vee Q = \exists x\left(P\left(x\right) \vee Q\right) \quad (6)$$

Свойства операций над предикатами

Закон коммутативности для одноименных кванторов:

$$\forall x\left(\forall y P(x, y)\right) = \forall y\left(\forall x P(x, y)\right) \quad (7)$$

$$\exists x\left(\exists y P(x, y)\right) = \exists y\left(\exists x P(x, y)\right) \quad (8)$$

Свойства операций над предикатами

Коммутативность дает возможность использовать более краткую запись:

$$\forall x \forall y \forall z P(x, y, \mathrm{z}) = \forall x, y, z P(x, y, \mathrm{z}) \quad (9)$$

$$\exists x \exists y \exists z P(x, y, z) = \exists x, y, z P(x, y, z) (10)$$

Равносильные формулы

Проверить равносильность формулы в логике предикатов, не так просто, как в логике высказываний. Высказывание может принимать значения 0 и 1. Формула с 2 высказываниями содержит 2^2 возможных значений, и так далее.

Предикат имеет бесконечное множество интерпретаций.

Истинность в логике предикатов

Предикатная формула F называется выполнимой (непротиворечивой), если существует интерпретация входящих в нее предикатов, в которой F принимает значение ***истина***. То есть ее область истинности не пуста.

Истинность в логике предикатов

Предикатная формула F называется тождественно истинной (общезначимой), если при любой интерпретация входящих в нее предикатов, область истинности совпадает с областью определения.

Истинность в логике предикатов

Предикатная формула F называется тождественно ложной (противоречивой), если при любой интерпретация входящих в нее предикатов, область истинности пуста.

Истинность в логике предикатов

Например:

$$F = P(x) \vee \neg P(x) = 1$$

Тождественно истинная формула.

$$G = P(x) \cdot \neg P(x) = 0$$

Тождественно ложная формула

Истинность в логике предикатов

Замечание 1

Формула F – общезначима тогда и только тогда, когда

¬F – противоречива.

Замечание 2

Формула F – выполнима тогда и только тогда, когда

¬F – не является общезначимой.

Истинность в логике предикатов

Замечание 3

Если F и G – равносильные формулы в логике предикатов, то формула

$$\boldsymbol{W = F \sim G}$$

общезначима и выполняется равенство:

$$I_F = I_G$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 4

Если формула

$$\mathbf{W = F \to G}$$

общезначима, то выполняется:

$$I_F \subseteq I_G$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 5

Если ***y*** не входит в формулу P(x), то следующие формулы являются общезначимыми:

$$\forall x P(x) \to P(y);$$

$$P(y) \to \exists x P(x).$$

Истинность в логике предикатов

Квантор ***общности*** является обобщением ***конъюнкции,*** поэтому справедлива формула:

$$\forall x\left(P(x)\cdot Q(x)\right)= \qquad (11)$$

$$=\forall xP(x)\cdot\forall xQ(x).$$

Истинность в логике предикатов

Квантор ***существования*** является обобщением ***дизъюнкции,*** поэтому справедлива формула:

$$\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right) = \qquad (12)$$

$$= \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 6

Если в формулах (11) и (12) поменять местами кванторы, то получаются выражения, истинные лишь в одну сторону:

$$\exists x\left(P(x)\cdot Q(x)\right)\to \qquad (13)$$

$$\to \exists xP(x)\cdot \exists xQ(x).$$

Истинность в логике предикатов

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \qquad (14)$$
$$\to \forall x \big(P(x) \vee Q(x) \big).$$

В таких случаях говорят, что левая часть утверждения более сильная, чем правая.

Истинность в логике предикатов

В таком случае, надо воспользоваться правилом:

$$\forall x P(x) = \forall y P(y) = \forall z P(z) = \forall t P(t) = \ldots$$

$$\exists x P(x) = \exists y P(y) = \exists z P(z) = \exists t P(t) = \ldots$$

То есть, если переменная связана квантором, то неважно, как она называется.

Истинность в логике предикатов

В выражениях (13) и (14) надо сделать замену переменной, после чего воспользоваться формулами (4) и (5):

$$\exists x P(x) \cdot \exists x Q(x) =$$

$$= \exists x P(x) \cdot \exists y Q(y) =$$

$$= \exists x \exists y \big(P(x) \cdot Q(y) \big). \qquad (15)$$

Истинность в логике предикатов

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) =$$

$$= \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) =$$

$$= \forall x \forall y \big(P(x) \cdot Q(y) \big). \qquad (16)$$

Префиксная нормальная форма

Префиксной нормальной формой (ПНФ) называется формула, имеющая вид:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n F$$

где $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ – кванторы, *F* – предикатная формула, имеющая вид ДНФ.