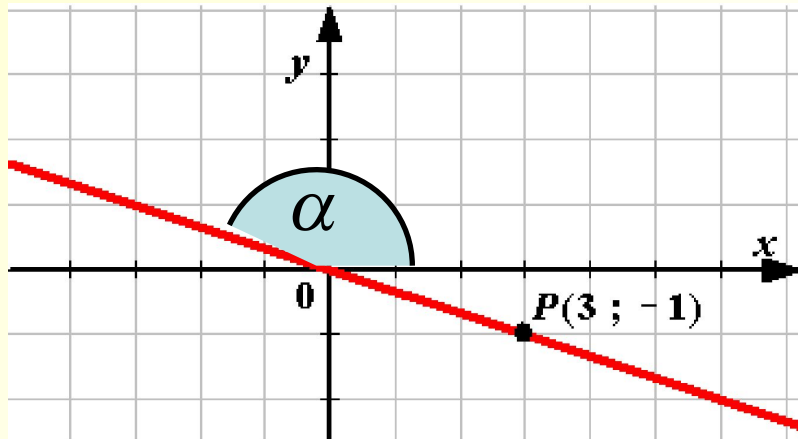


WORLD OF
MUSIC

Угловой коэффициент прямой.



Прямая проходит через начало координат и точку P(3; -1).

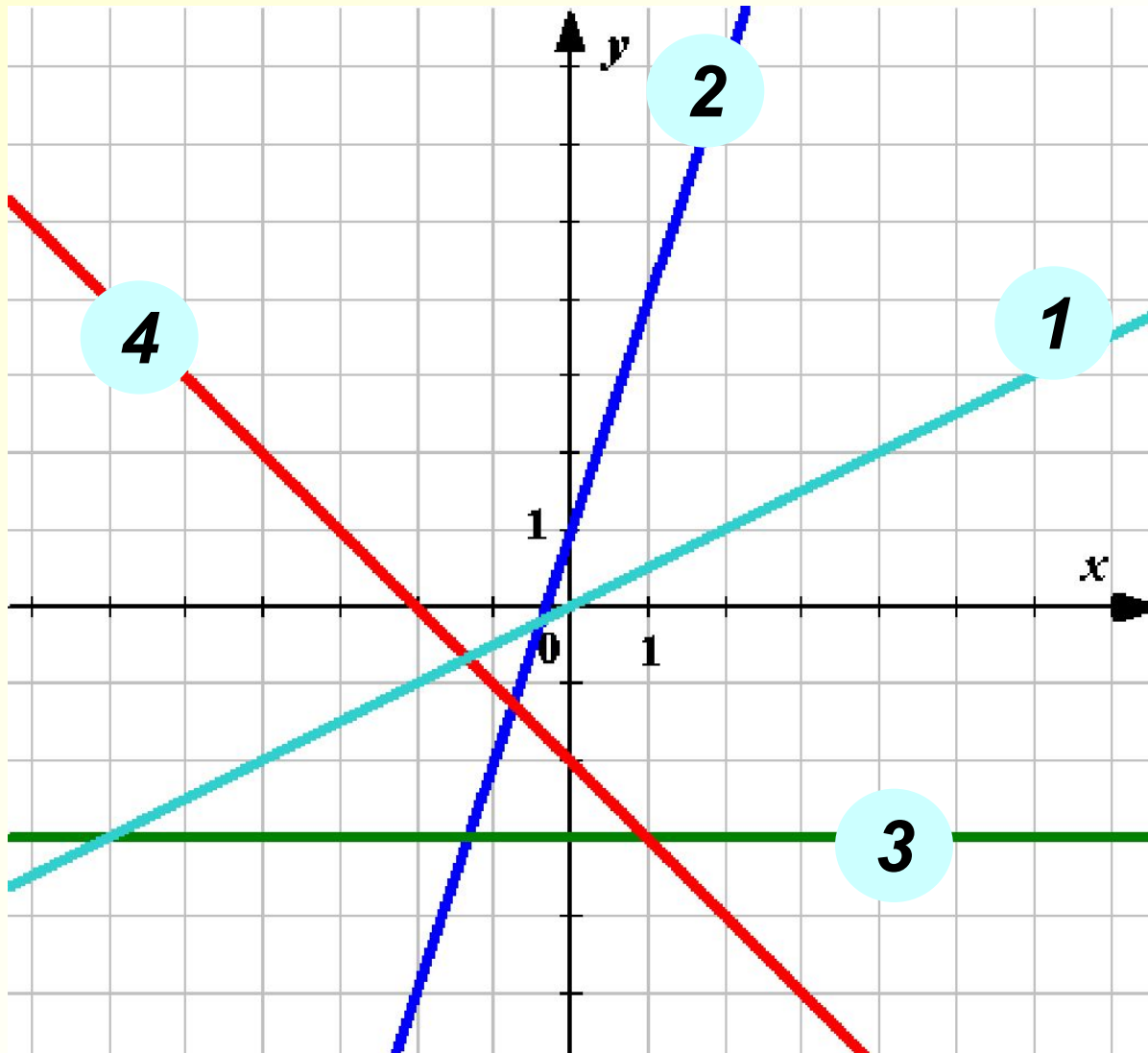
Чему равен ее угловой коэффициент?

$$y = kx + b \quad y = kx$$

$$-1 = 3k \longrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Найдите угловые коэффициенты прямых:



$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

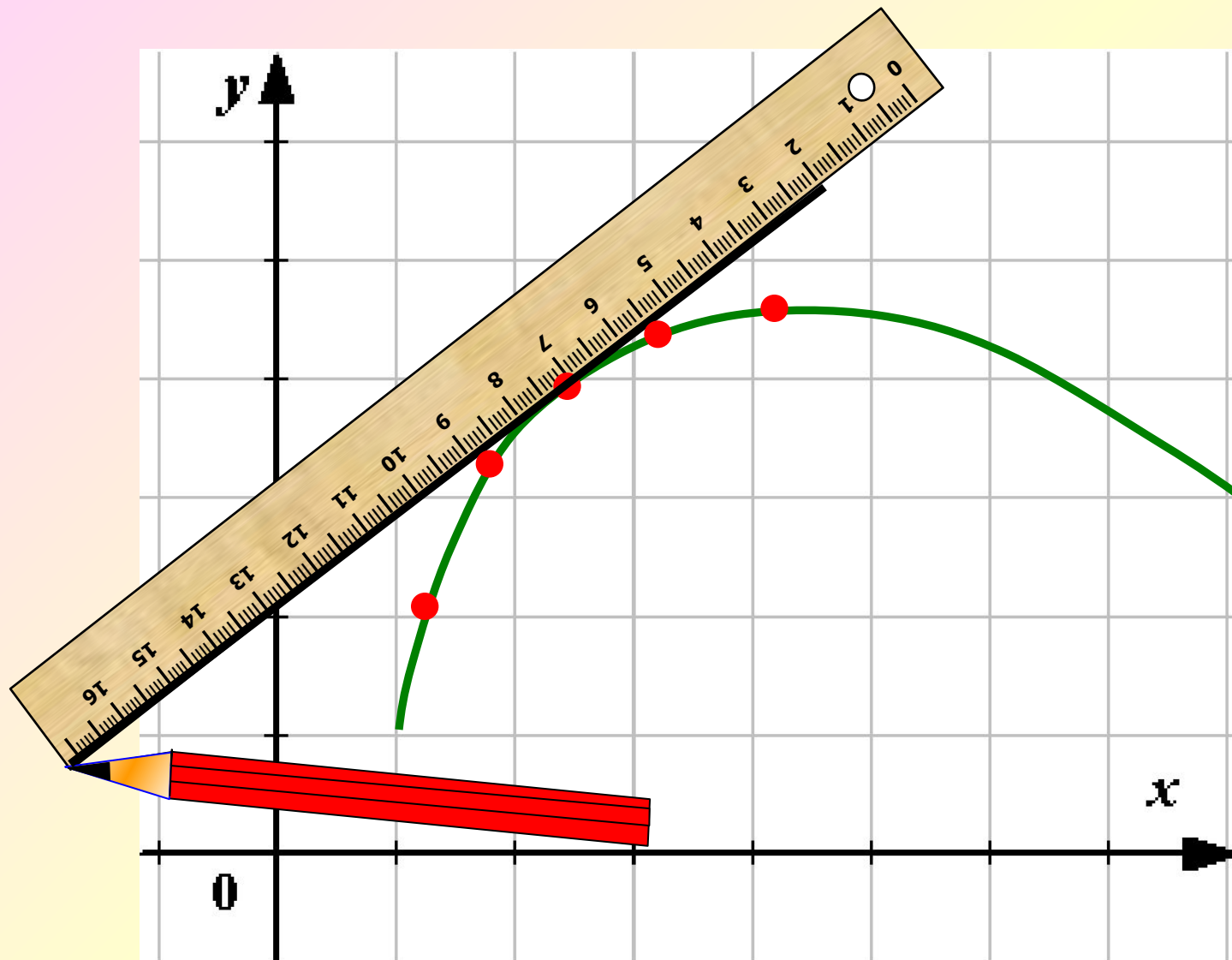
1 $k = 0,5$

2 $k = 3$

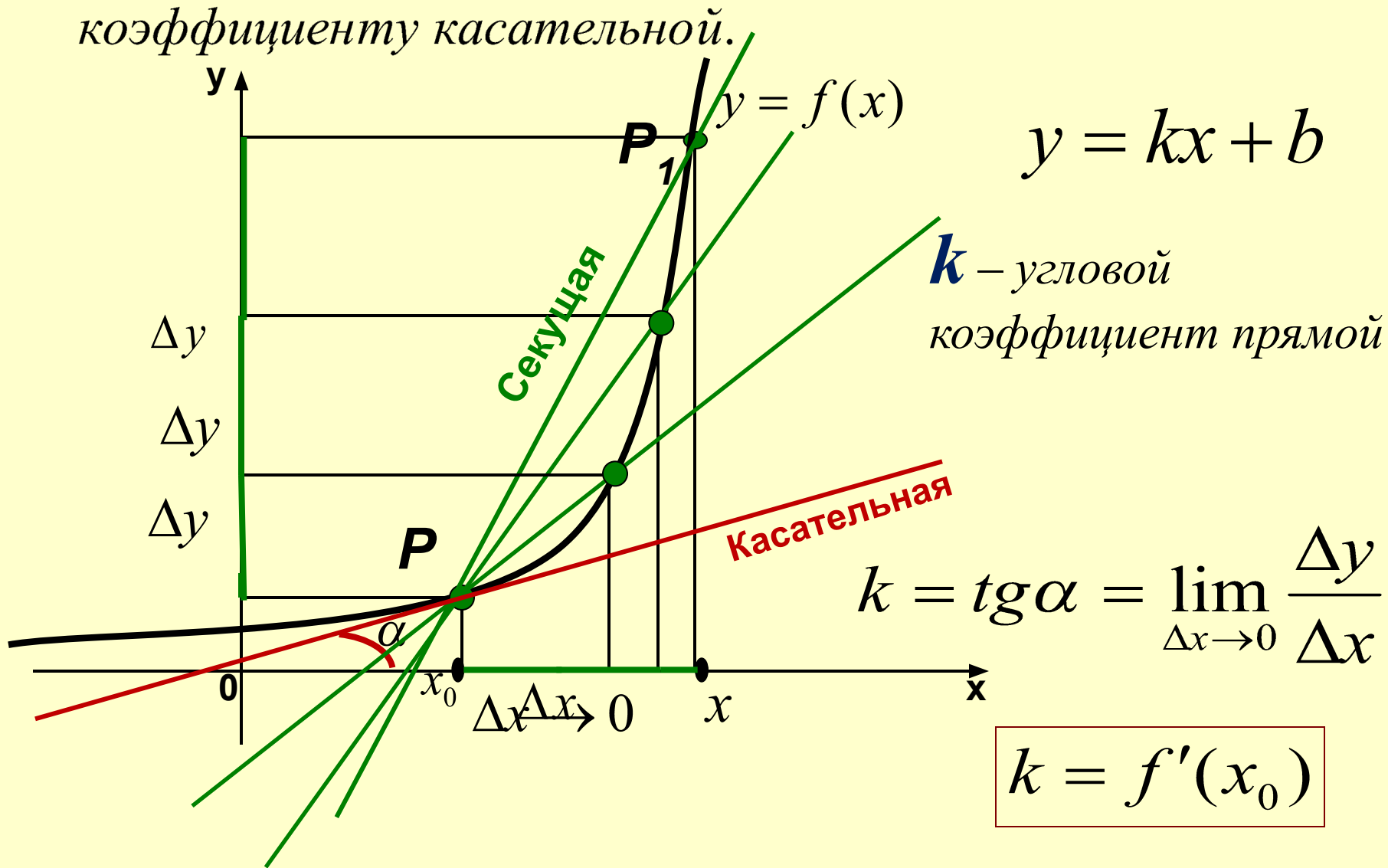
3 $k = 0$

4 $k = -1$

Касательная к кривой.

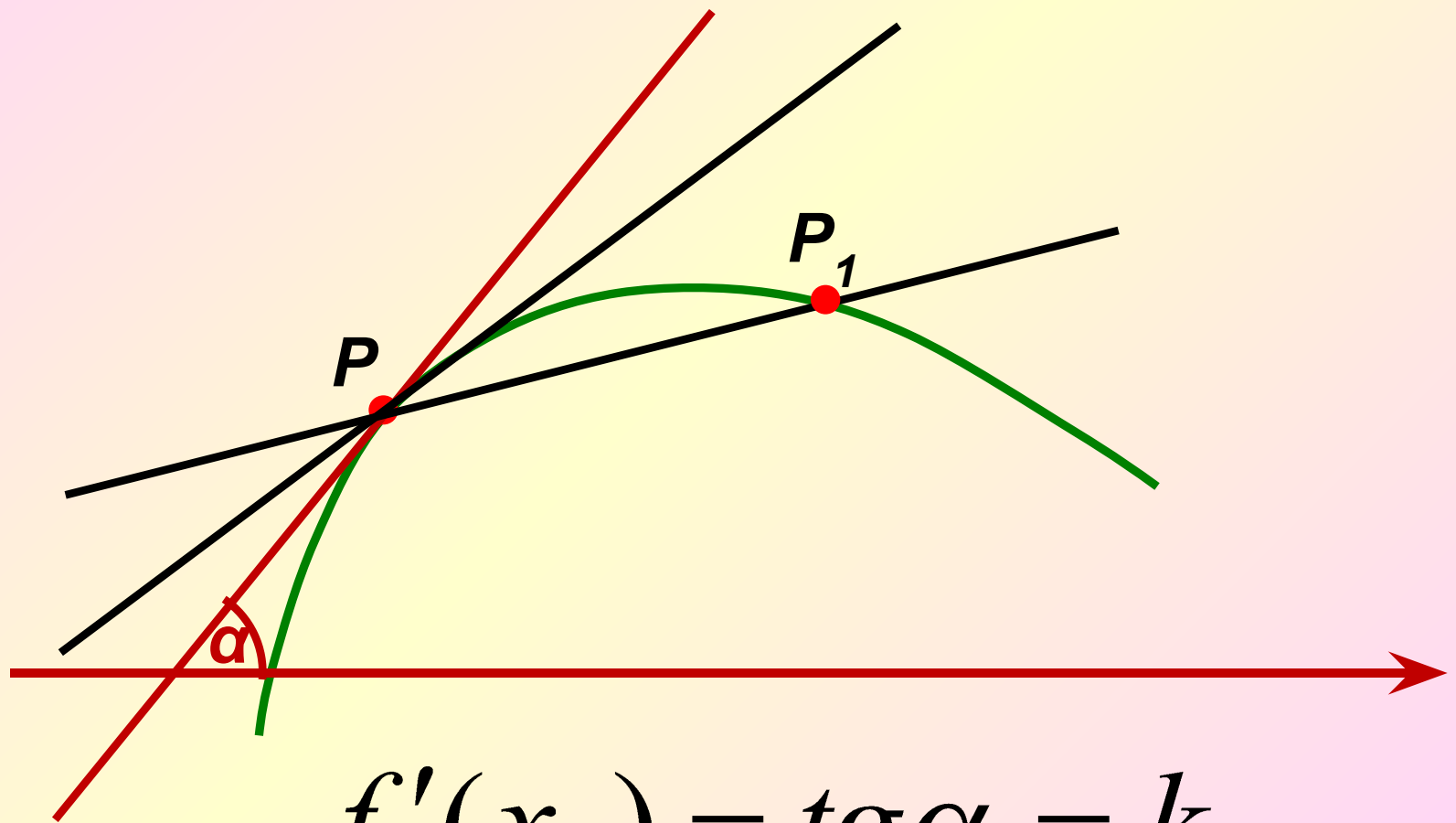


При $\Delta x \rightarrow 0$ угловой коэффициент секущей \rightarrow к угловому коэффициенту касательной.

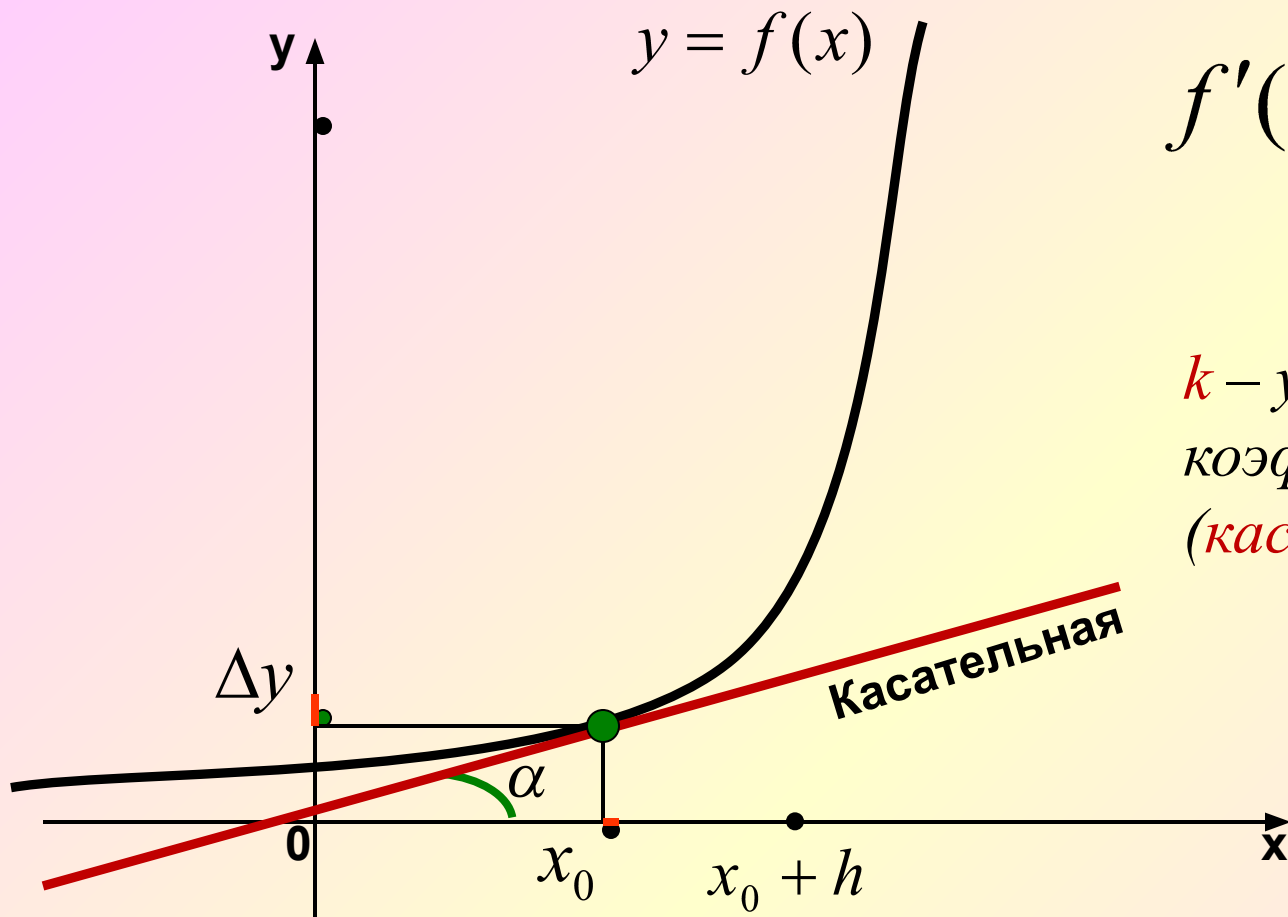


Касательная есть предельное положение **секущей**.

Касательная к кривой.



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

$$y = kx + b$$

k – угловой
коэффициент прямой
(касательной)

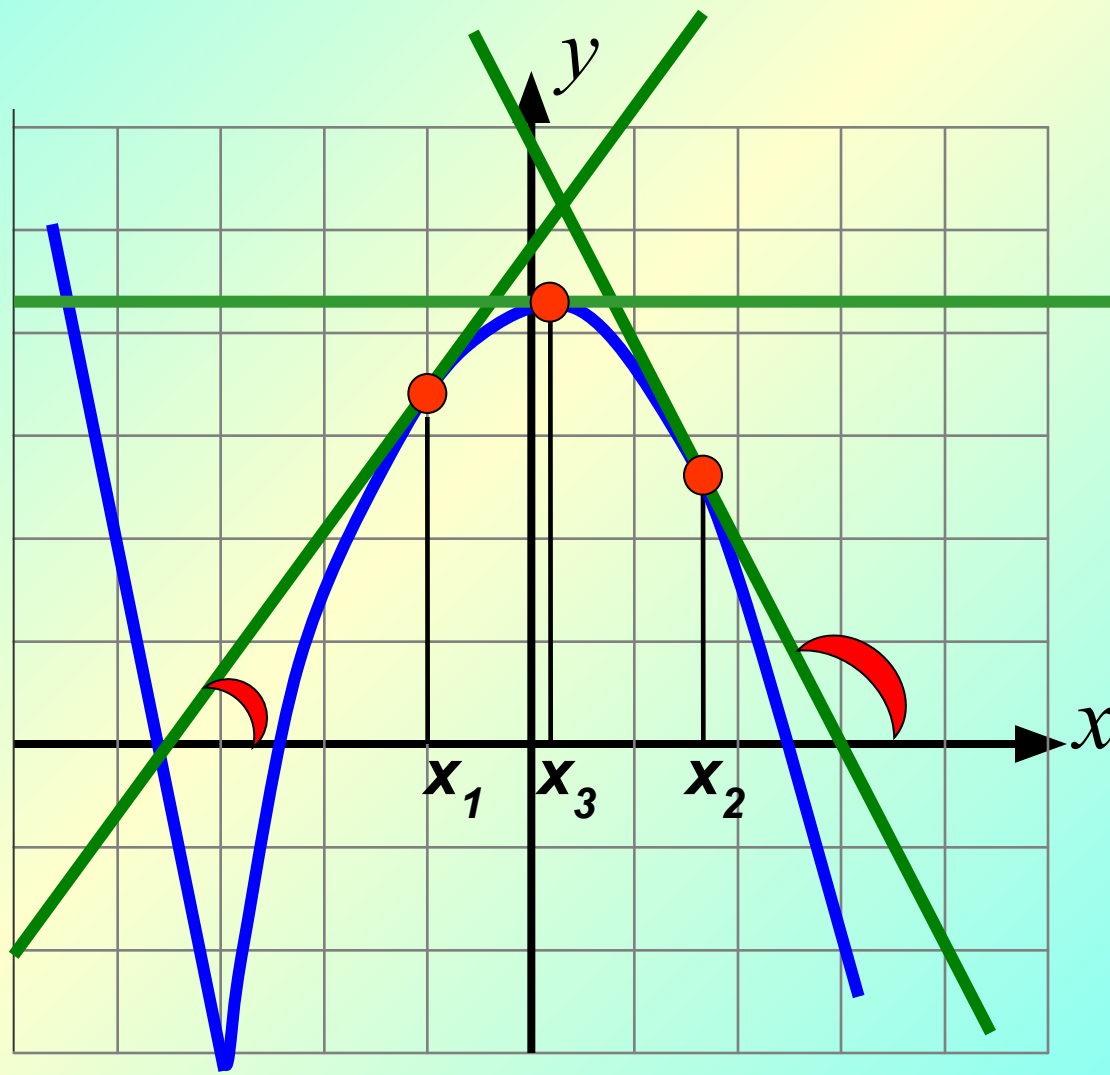
Геометрический смысл производной

Значение производной функции в данной точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

$$\alpha < 90^\circ \Rightarrow k > 0$$

$$\alpha > 90^\circ \Rightarrow k < 0$$

$\alpha = 0^\circ \Rightarrow k = 0$, касательная параллельна Ox



Нахождение производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x) = C$$

$$f(x + \Delta x) = C$$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$C' = 0$$

$$3' = 0$$

$$(-1,8)' = 0$$

Нахождение производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x) = x$$

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$$

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$$

$$x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$x' = 1$$

Нахождение производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x) = kx + b$$

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b = kx + k\Delta x + b$$

$$\Delta y = \underline{kx + k\Delta x + b} - \underline{kx - b} = k\Delta x$$

$$(kx + b)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

$$(kx + b)' = k$$

$$\left(-\frac{3}{4}x - 7\right)' = -\frac{3}{4}$$

$$(5x)' = 5$$

Нахождение производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = \underline{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2} - \underline{x^2} = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \\ = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

Нахождение производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$(x^3)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$C' = 0$$

$$(kx + b)' = k$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^4)' =$$

$$(x^5)' =$$

Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$



ДЗ : ξ 40, N 5, 6;
ξ 41, N 1–3, 5–11

За урок!

$$C' = 0$$

$$(kx + b)' = k$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^4)' =$$

$$(x^5)' =$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5, x = 4;$ г) $y = \sqrt{x}, x = 4;$

б) $y = x^2, x = -1;$ д) $y = \sin x, x = 0;$

в) $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2};$ е) $y = \cos x, x = \frac{\pi}{6}.$

$$(3x + 5)' = 3; \quad f'(4) = 3.$$

$$(x^2)' = 2x, \text{ значит, } f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \text{ значит, } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ значит, } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \text{ значит, } f'(0) = \cos 0 = 1.$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \text{ значит, } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Правила дифференцирования

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

$$(3x^2 - 4x + 2)' = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

$$(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} (\cos x)' = -\frac{1}{3} (-\sin x) = \frac{1}{3} \sin x.$$

Правила дифференцирования

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

$$\begin{aligned} ((2x + 3) \sin x)' &= (2x + 3)' \sin x + (2x + 3)(\sin x)' = \\ &= 2 \sin x + (2x + 3) \cos x. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$\left(\frac{x^2}{5 - 4x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5 - 4x) - x^2(5 - 4x)'}{(5 - 4x)^2} = \frac{2x(5 - 4x) - x^2(-4)}{(5 - 4x)^2} = \frac{10x + 4x^2}{(5 - 4x)^2}.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Понятие и вычисление производной n -го порядка

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Найти $f'''(1)$, если $f(x) = x^5$.

Найдите $f'''(0)$, если:

а) $y = 2x^3 - x^2$;

в) $y = 4 \sin x - \cos x$;

б) $y = x + \cos x$;

г) $y = \sin x + \cos x$.

Проверочная работа

$$y = \operatorname{tg} x + 4;$$

$$y = 10\sqrt{x} + \frac{5}{x};$$

$$y = \frac{1}{3} \sin x - 3 \operatorname{ctg} x;$$

$$y = x^6 + 13x^{10} + 12;$$

$$\left(7 - \frac{1}{x}\right)(6x + 1);$$

$$y = \frac{\cos x}{x}.$$

$$y = \operatorname{ctg} x + 8.$$

$$y = -8\sqrt{x} - \frac{1}{x}.$$

$$y = 6 \operatorname{tg} x - \sin x.$$

$$y = x^9 - 6x^{21} - 36.$$

$$y = \sqrt{x} \cdot \cos x;$$

$$y = \frac{x^5 + x}{x^5 - 1};$$

Дифференцирование сложной функции.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

42.1. в) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12};$

г) $y = (15 - 9x)^{13}.$

$$(f(kx + m))' = k \cdot f'(kx + m).$$

42.2. в) $y = \sin(5 - 3x);$

г) $y = \cos(9x - 10).$

42.3.

в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right);$

г) $y = \sqrt{4 - 9x}.$

Дифференцирование обратной функции

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

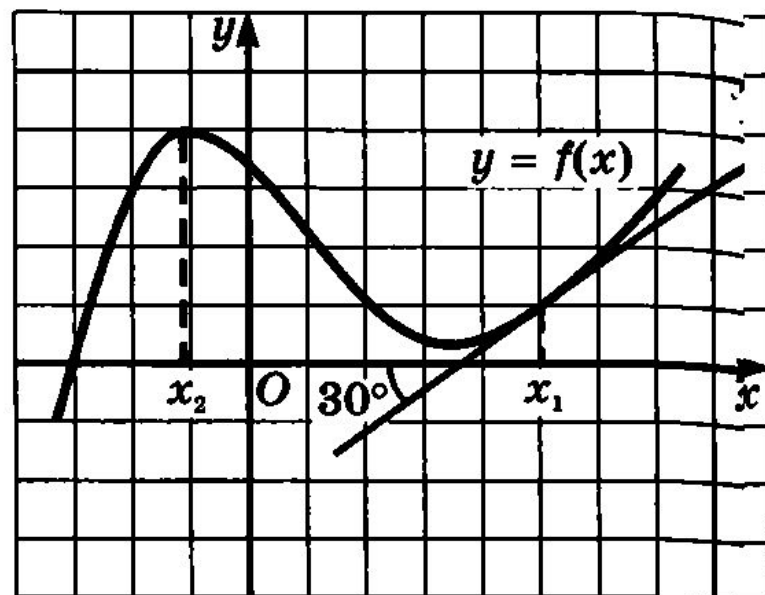
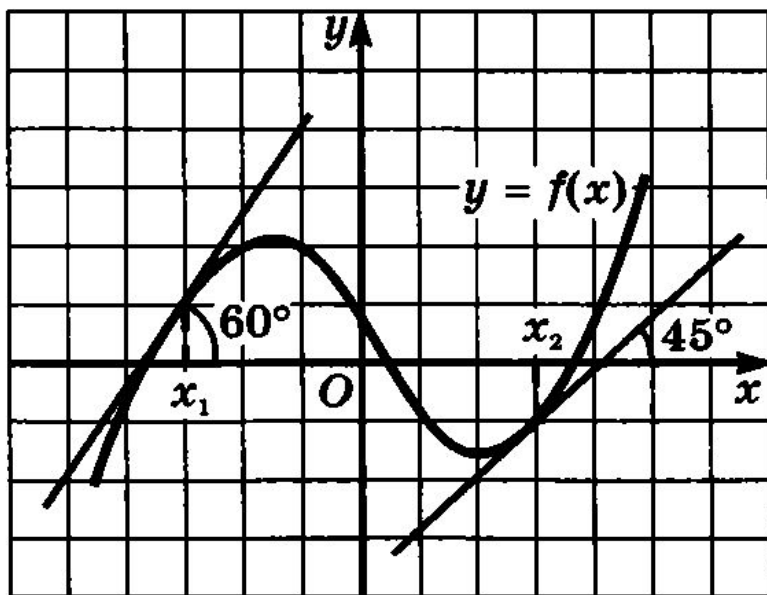
$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$(\arctg x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

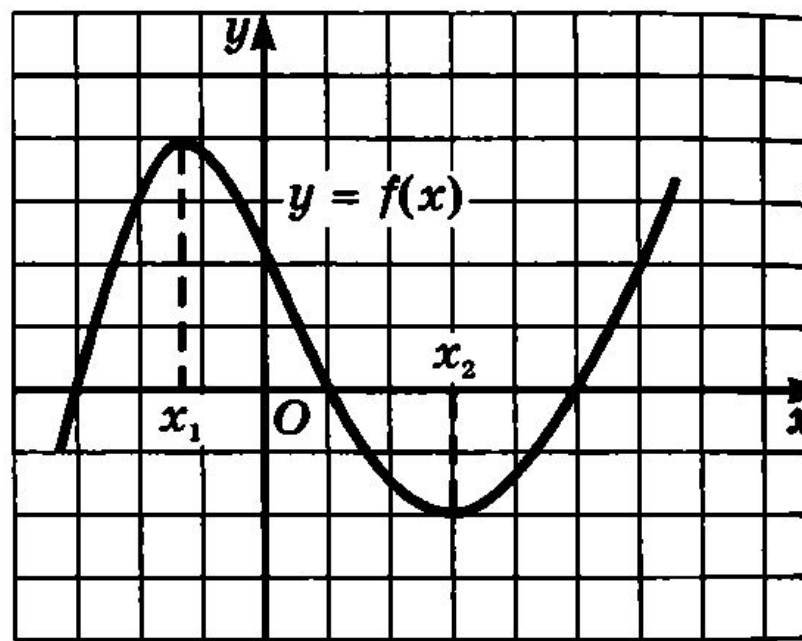
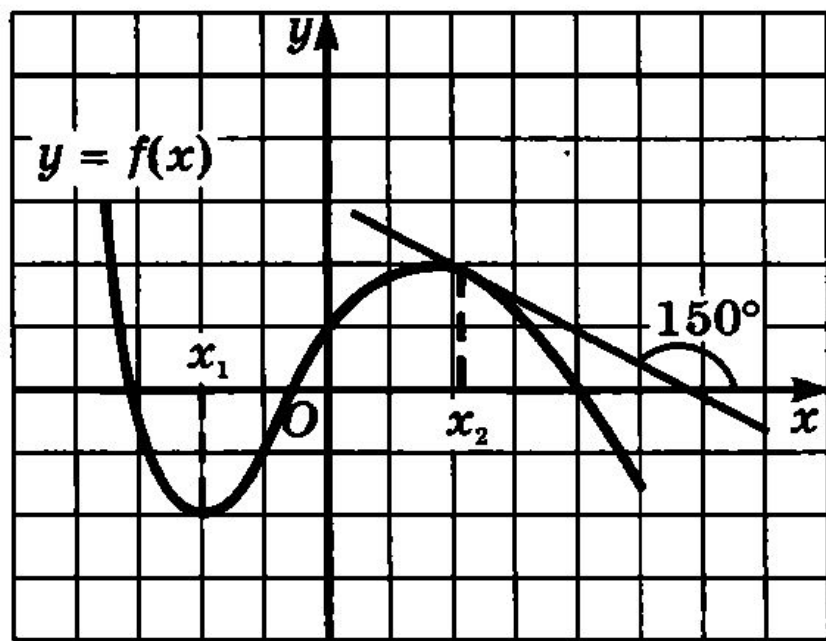
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Решение задач на касательную

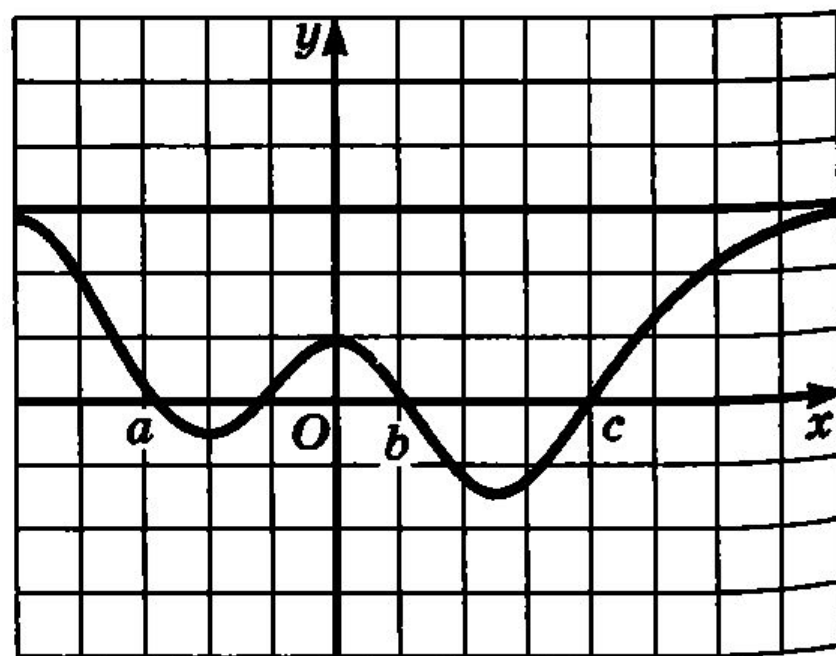
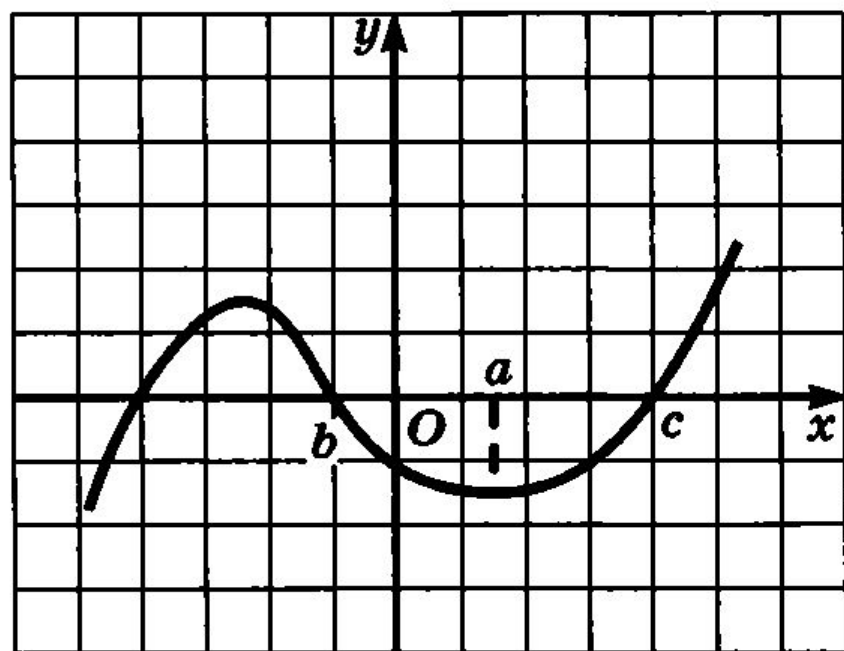
Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:



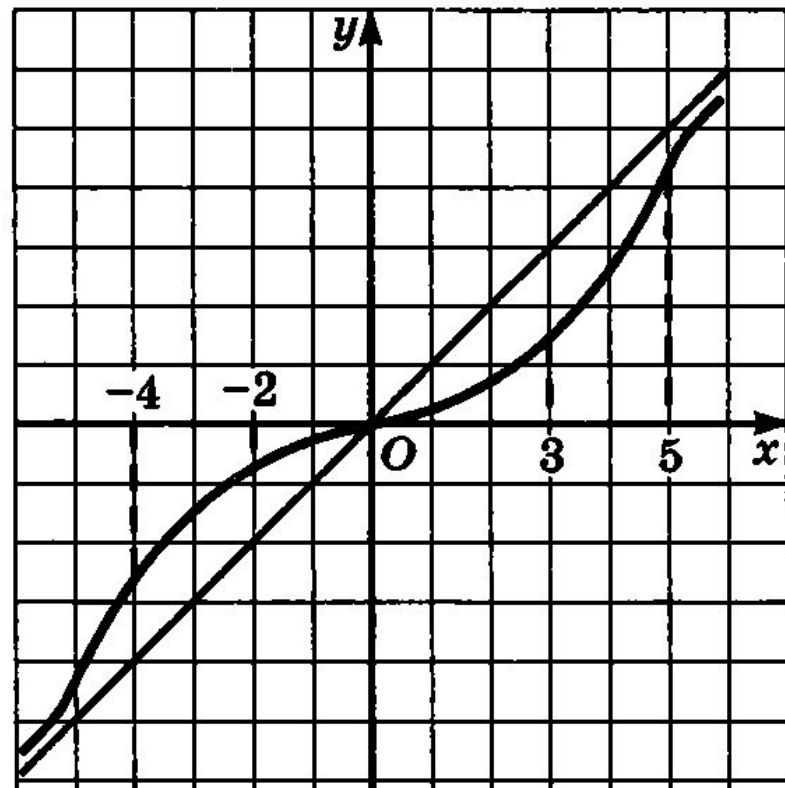
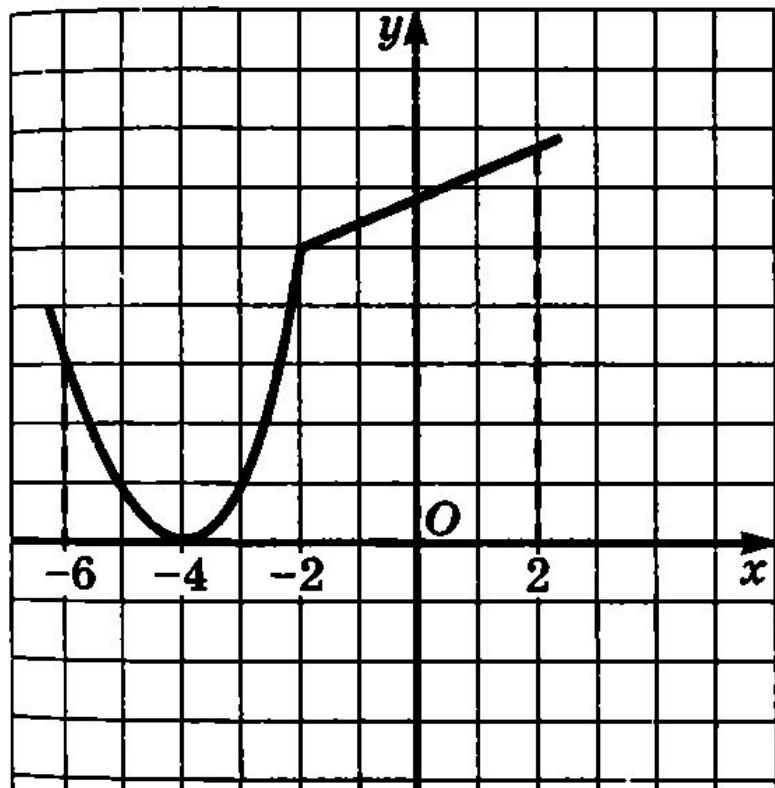
Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:



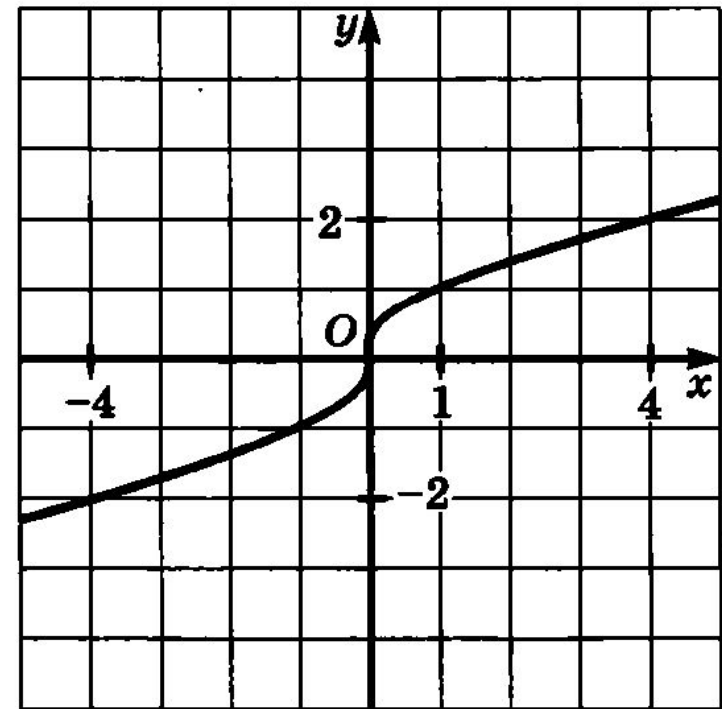
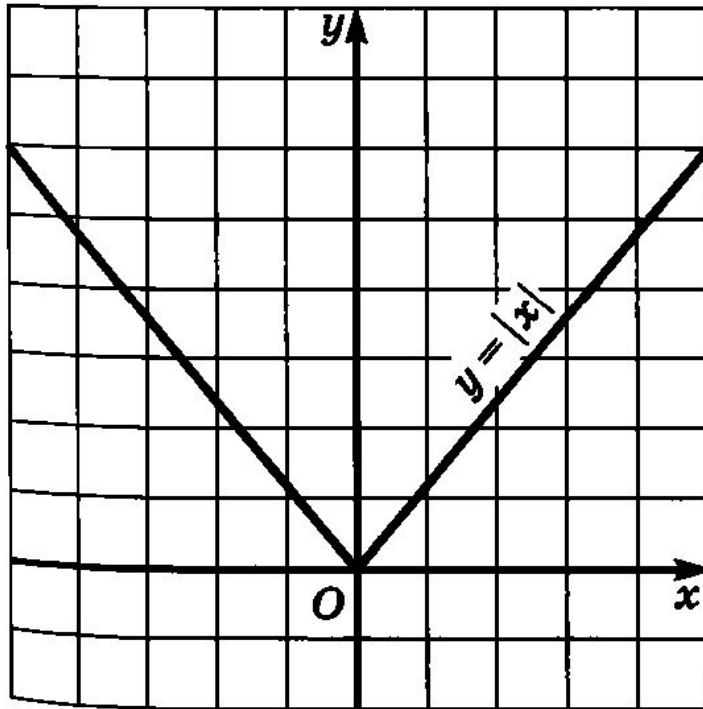
Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точках с абсциссами a , b , c :



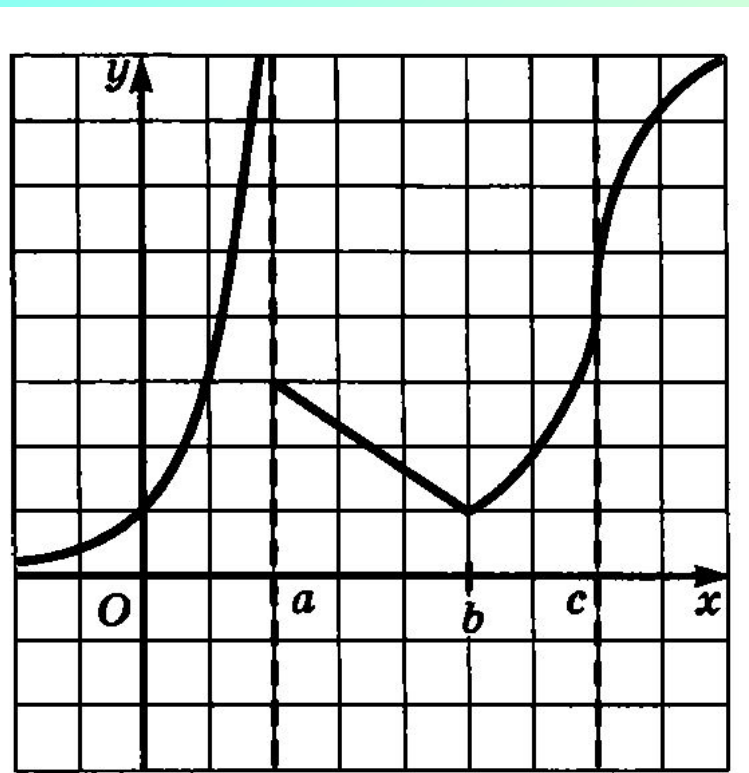
Укажите точки, в которых производная равна нулю и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:



Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема.



Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема.



функция дифференцируема

всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$;

$x = a$ — точка разрыва функции,

в точке $x = b$ касательная не существует,

в точке $x = c$ касательная параллельна

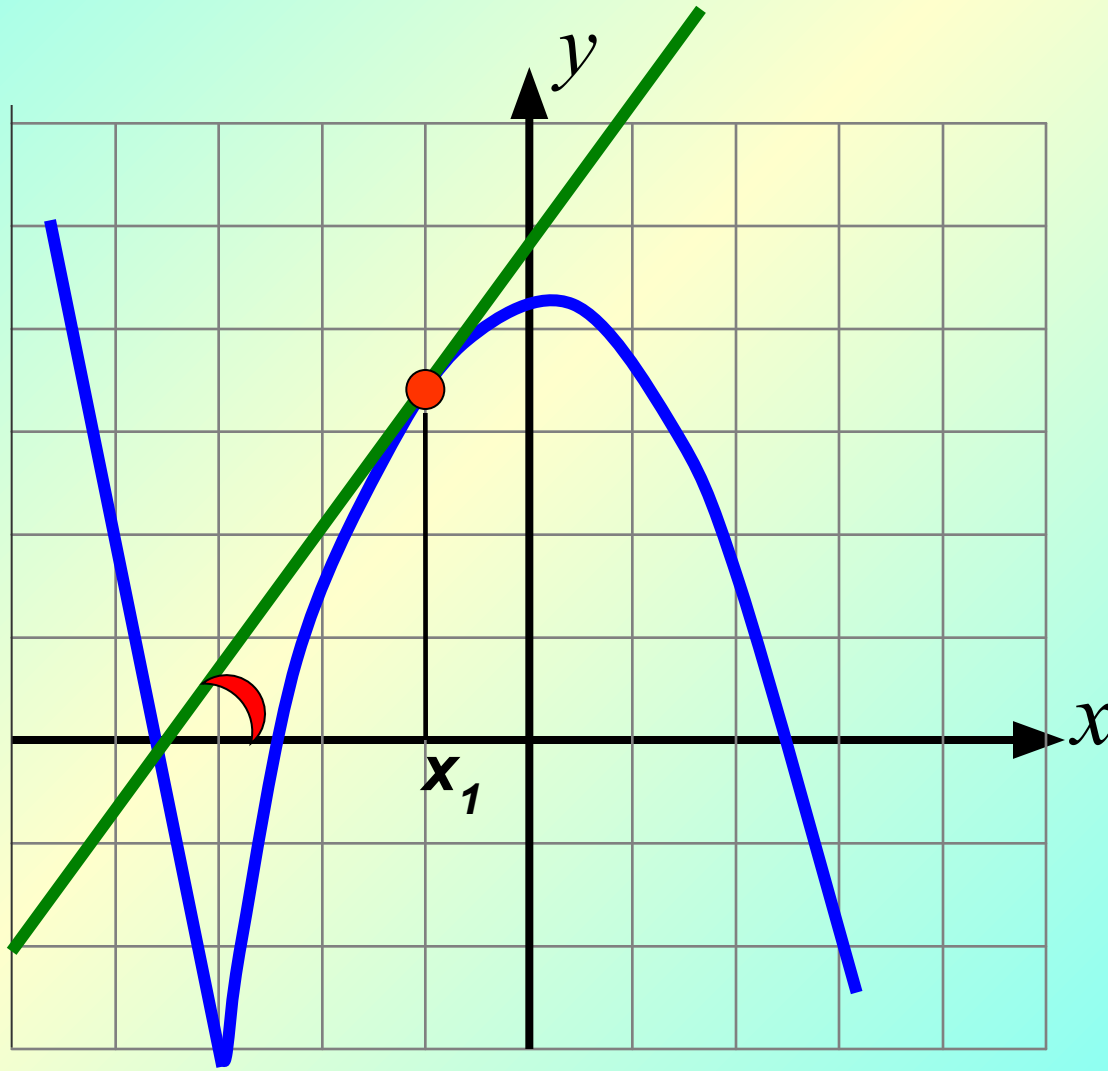
оси y .

Повторение:

Линейные уравнения	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = k_1x + b_1$	$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	Прямые параллельны
$y = k_2x + b_2$	$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	Прямые совпадают
	$k_1 \neq k_2$	Прямые пересекаются
	$k_1 \cdot k_2 = -1$	Прямые перпендикулярны

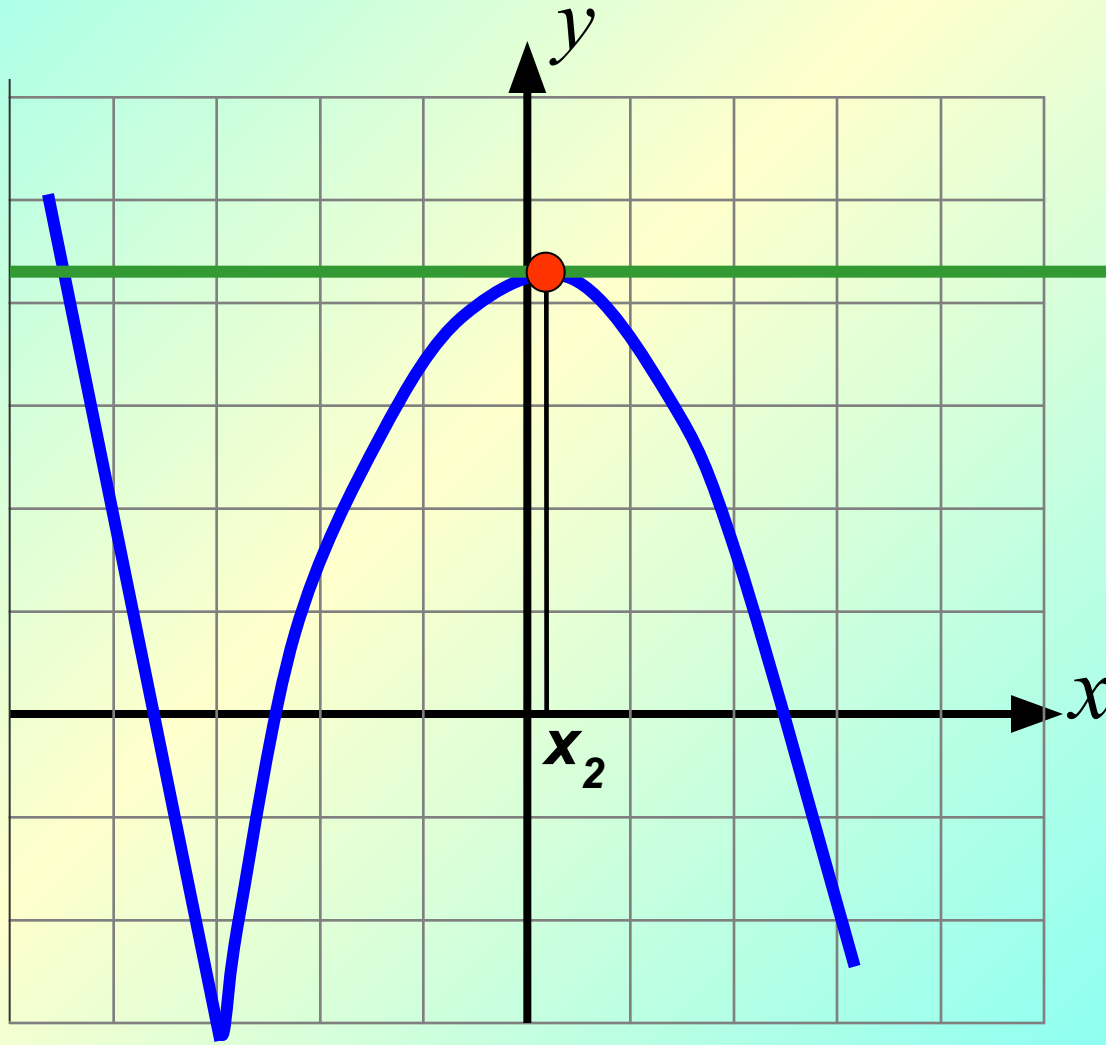
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

$$\alpha < 90^\circ \Rightarrow k > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$



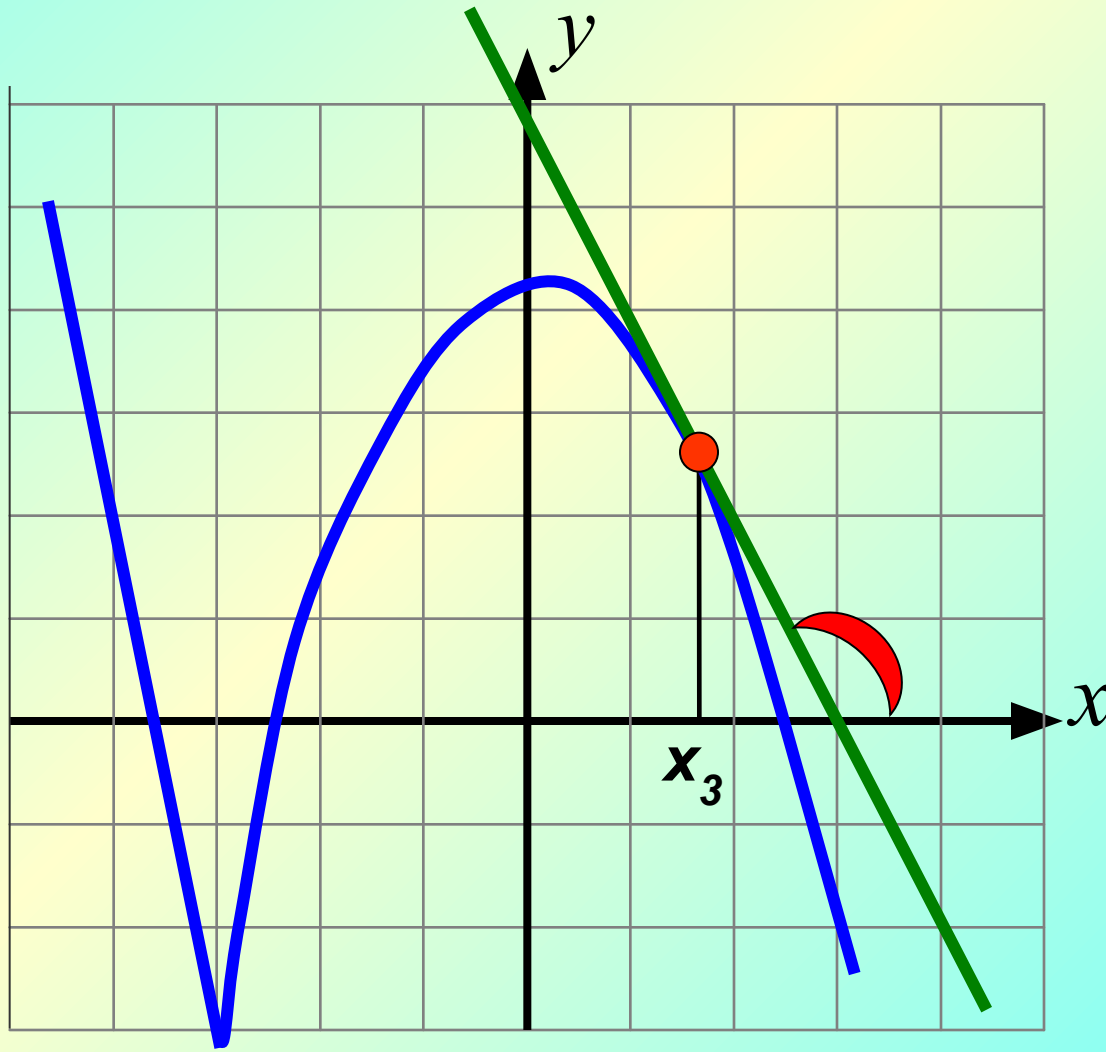
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

$\alpha = 0^\circ \Rightarrow k = 0$, касательная параллельна Ox

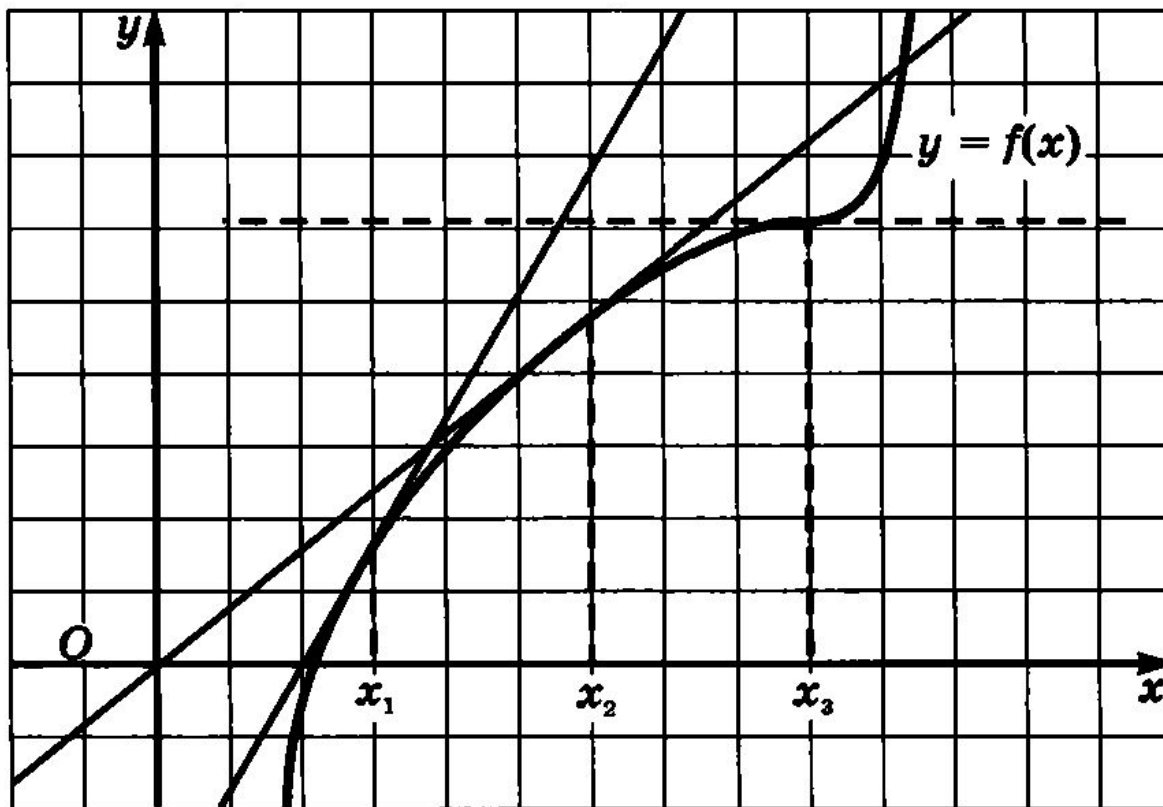


$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

$$\alpha > 90^\circ \Rightarrow k < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

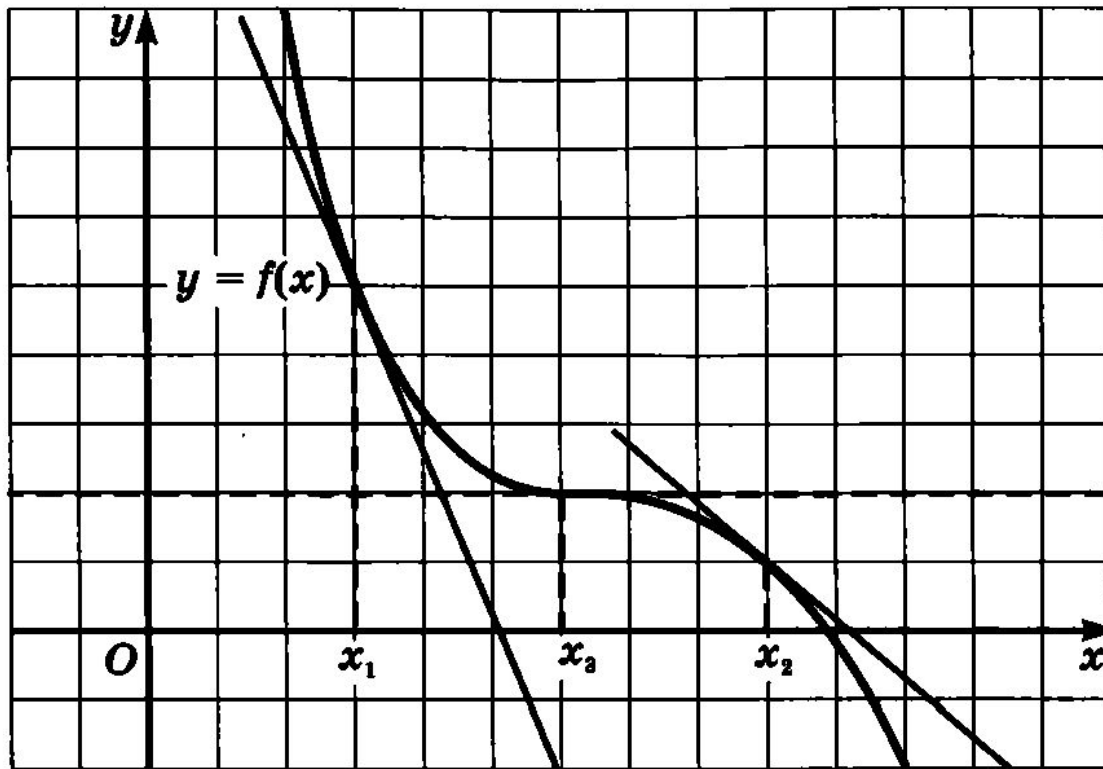


$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$



$$f'(x) \geq 0.$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$



$$f'(x) \leq 0.$$

Теорема 1

Пусть $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$.

Если $f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает на $(a;b)$.

Если $f'(x) \leq 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ убывает на $(a;b)$.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение.

$$y' = 5x^4 + 6x^2.$$

$$5x^4 + 6x^2 \geq 0, \text{ при всех } x$$

причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$.

Значит функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает при всех x Ч.т.д.

Пример 2.

а) Доказать, что функция $y = 5 \cos x + \sin 4x - 10x$ убывает на всей числовой прямой;

б) решить уравнение $5 \cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5$.

Решение.

$$\text{а) } y' = -5 \sin x + 4 \cos 4x - 10.$$

Значит, $-5 \sin x + 4 \cos 4x - 10 \leq -1$.

$-5 \sin x + 4 \cos 4x - 10 < 0$ при всех x

$$-5 \sin x \leq 5$$

$$4 \cos 4x \leq 4.$$

$$-5 \sin x + 4 \cos 4x \leq 9.$$

Значит функция убывает на всей числовой прямой Ч.т.д.

$$\text{б) } 5 \cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5.$$

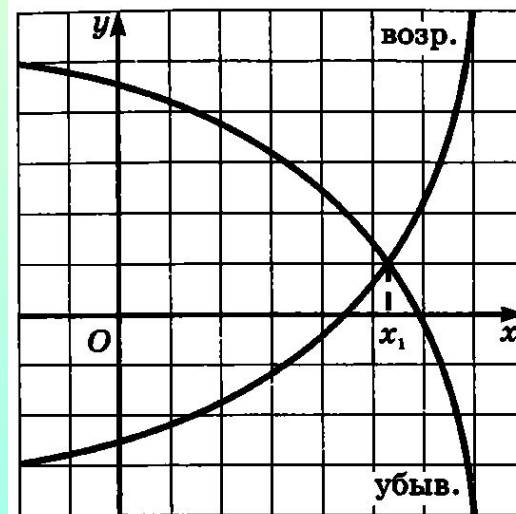
$f(x)$ убывает при всех x

$g(x)$ возрастает при всех x

след – но уравнение имеет не более 1 корня

$$x = 0 \quad 5 = 5 \text{ верно}$$

Ответ: 0

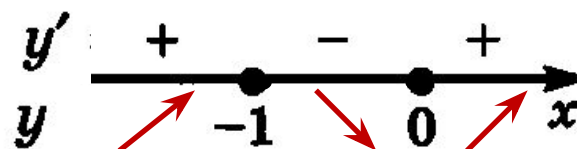


Пример 3. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

Решение.

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

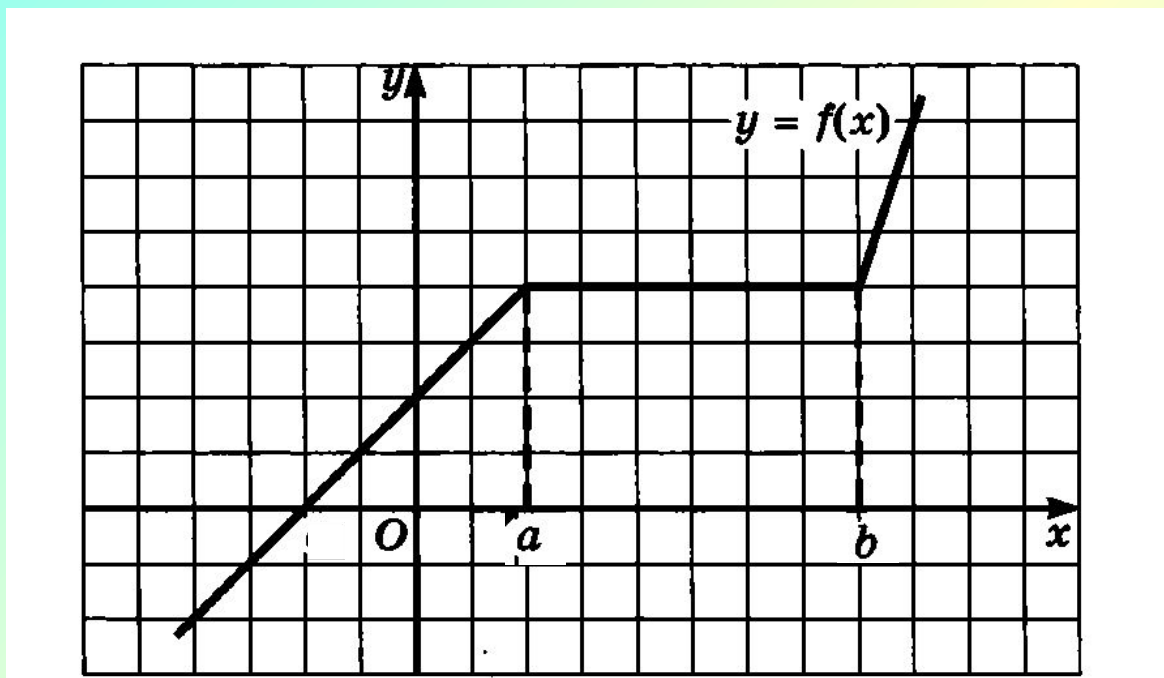


Ответ: функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, на луче $[0; +\infty)$,
убывает на отрезке $[-1; 0]$.

Теорема 2 (условие постоянства функции)

Пусть $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и непрерывна на $[a; b]$.

Для того, чтобы непрерывная функция $f(x)$ была постоянна на $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на $(a; b)$.



Отыскание точек экстремума

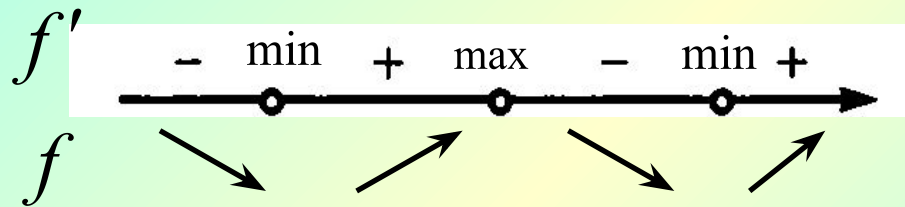
Стационарные точки –

Критические точки –

Точки экстремума –

Максимум функции –

Минимум функции –



Точкой максимума называется точка x_0

с такой окрестностью, в которой при $x < x_0$ $f'(x) > 0$,

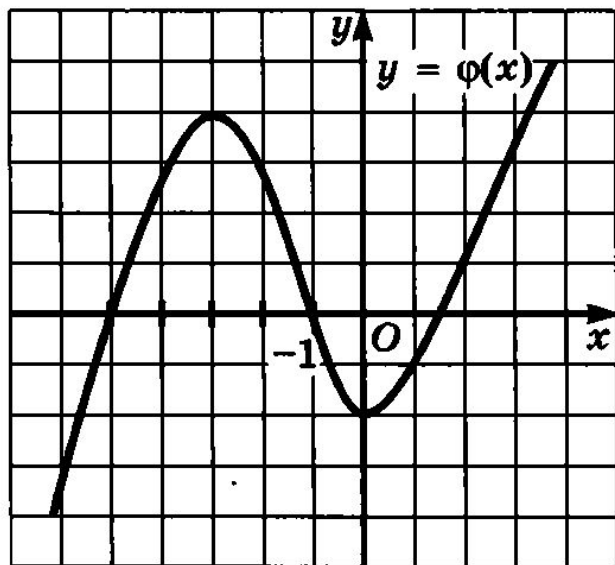
а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$ (т.е. $f'(x)$ меняет знак с + на -).

Точкой минимума называется точка x_0

с такой окрестностью, в которой при $x < x_0$ $f'(x) > 0$,

а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$.

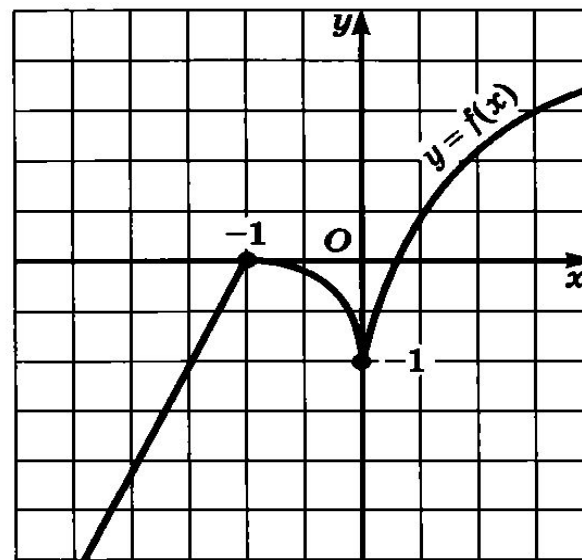
Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.



$$x_{\max} = -3 \quad y_{\max} = 4$$

$$x_{\min} = 0 \quad y_{\min} = -2$$

$$f'(-3) = 0 \quad f'(0) = 0$$



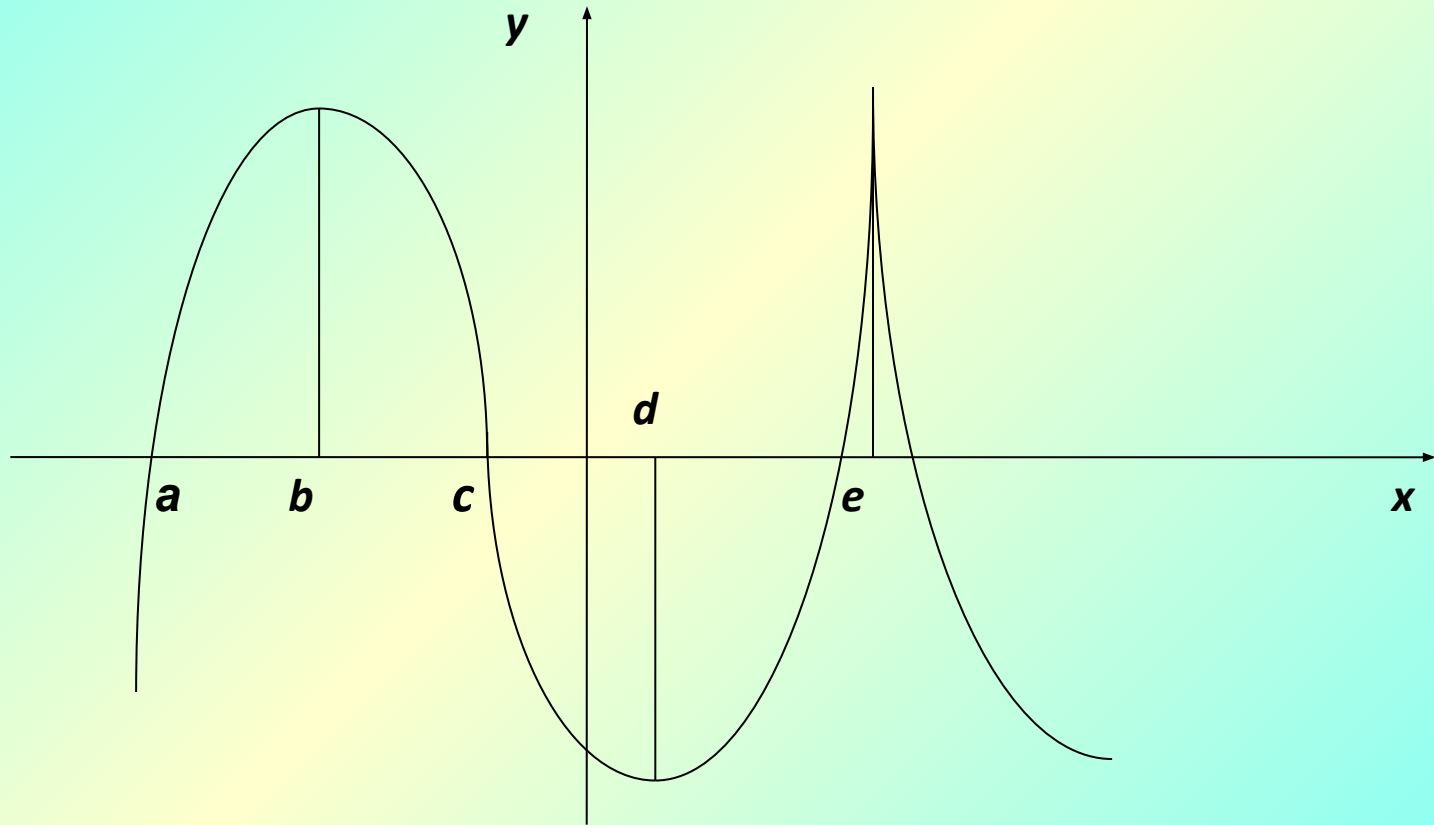
$$x_{\max} = -1 \quad y_{\max} = 0$$

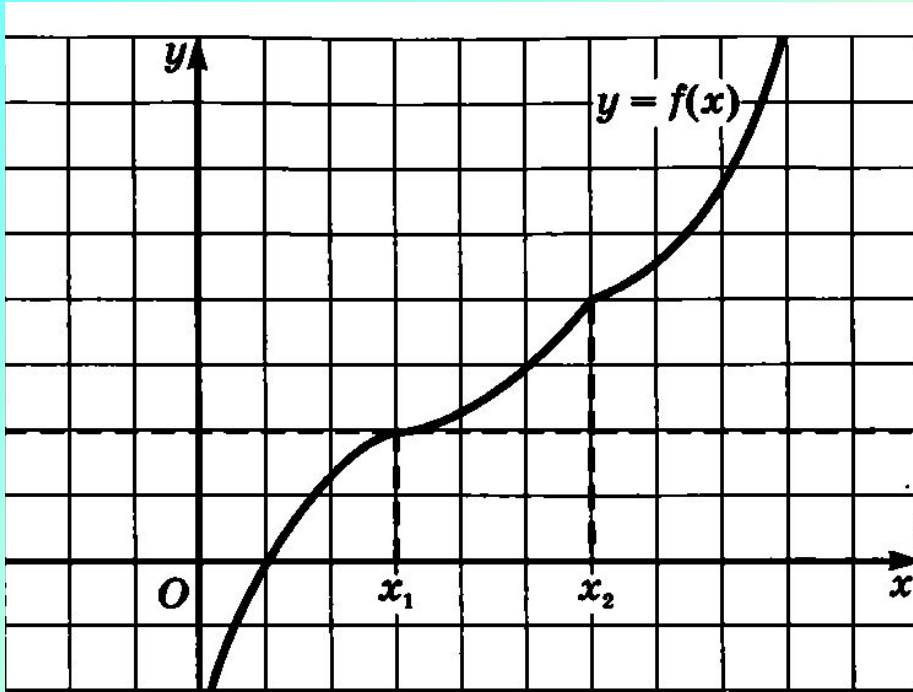
$$x_{\min} = 0 \quad y_{\min} = -1$$

$$f'(-1) - \text{не суц.} \quad f'(0) - \text{не суц.}$$

Устная работа

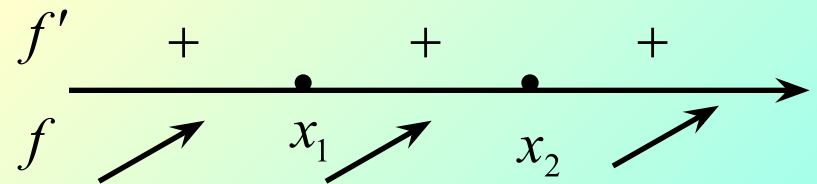
Задача. По графику функции $y=f(x)$, изображенному на рисунке, определить критические и стационарные точки.





x_1 – точка перегиба

x_2 – точка излома графика



Теорема 4 (необходимое и достаточное условия экстремума)

Для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума $f(x)$:

- 1) необходимо, чтобы x_0 была стационарной или критической;
- 2) достаточно, чтобы при переходе через x_0 $f'(x)$ меняла знак.

Замечание

Если в точке x_0 , где $f'(x_0) = 0$ не происходит смены знака, то точка x_0 называется точкой перегиба.

Алгоритм отыскания точек экстремума

- 1) найти $f'(x_0)$;
- 2) найти стационарные и критические точки;
- 3) определить знаки $f'(x)$ на интервалах;
- 4) определить промежутки монотонности функции;
- 5) определить точки экстремума, перегиба.

Пример 5. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

Решение. а) Найдем производную данной функции:

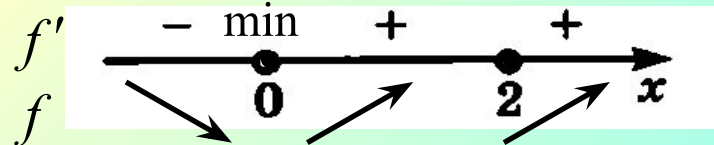
$$y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$

$$y' = 12x(x^2 - 4x + 4);$$

$$y' = 12x(x - 2)^2.$$

$$12x(x - 2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



$x_{min} = 0, x = 2$ – точка перегиба

(не является экстремумом)

Ответ: $x_{min} = 0$

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

- 1) найти $f'(x_0)$;
- 2) найти стационарные и критические точки, лежащие внутри отрезка;
- 3) вычислить значения $f(x)$ на концах отрезка и в точках п.2);
- 4) выбрать среди этих значений $y_{\text{наиб}}$ или $y_{\text{наим}}$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$: а) на отрезке $[-4; 6]$;

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

2)

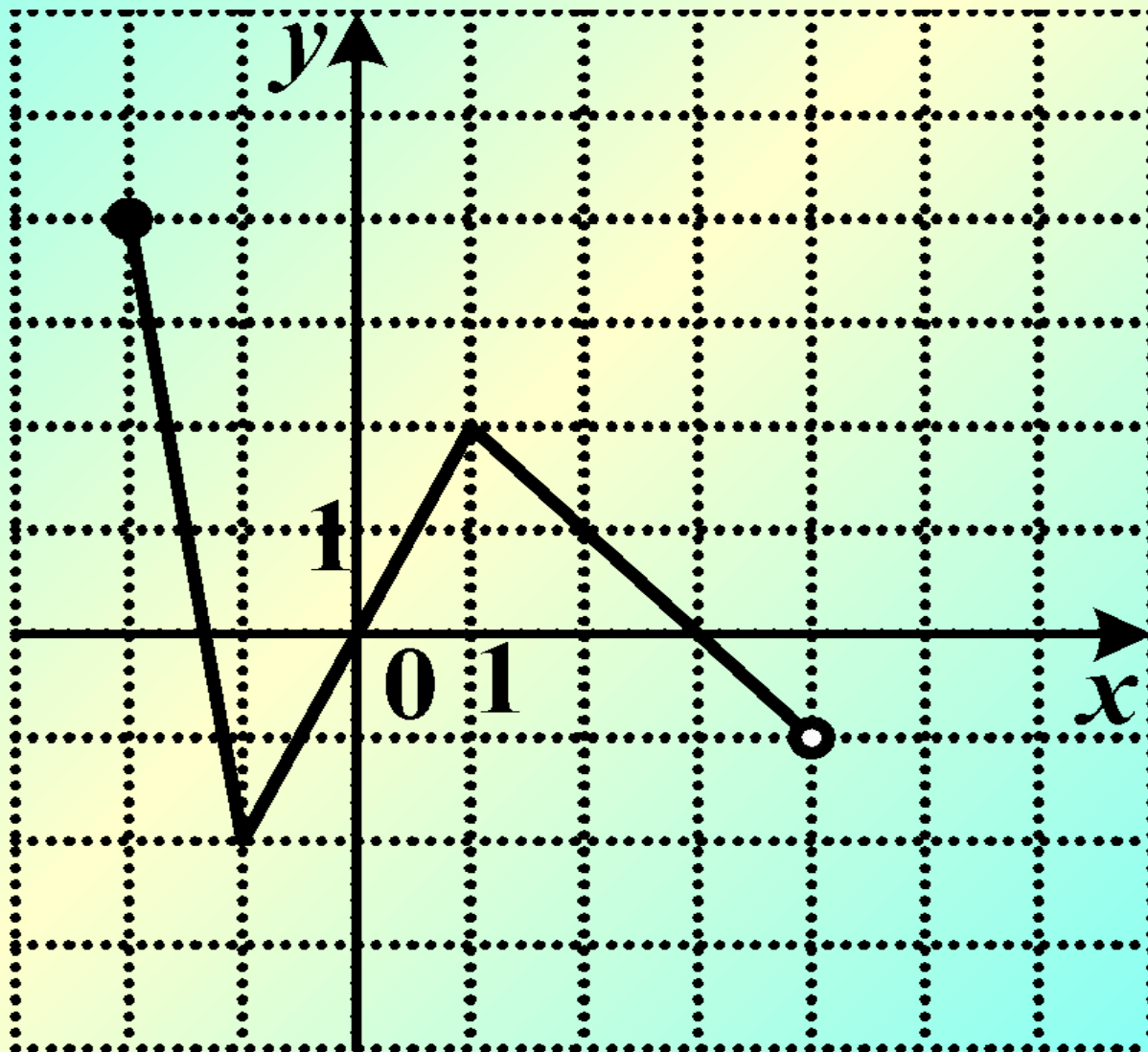
x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

$$y_{\text{наим}} = -174$$

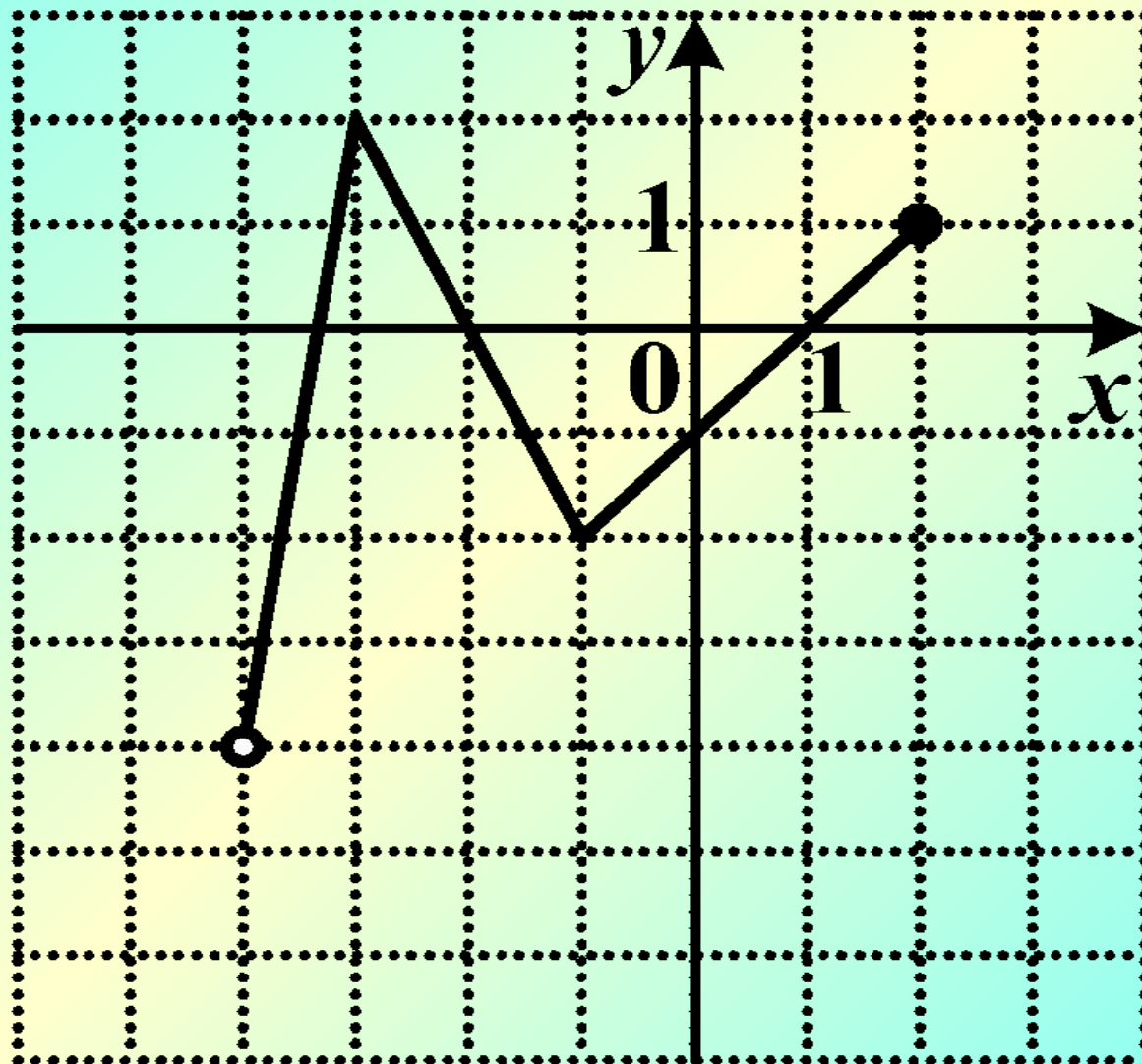
$$y_{\text{наиб}} = 82$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = -174$ $y_{\text{наиб}} = 82$

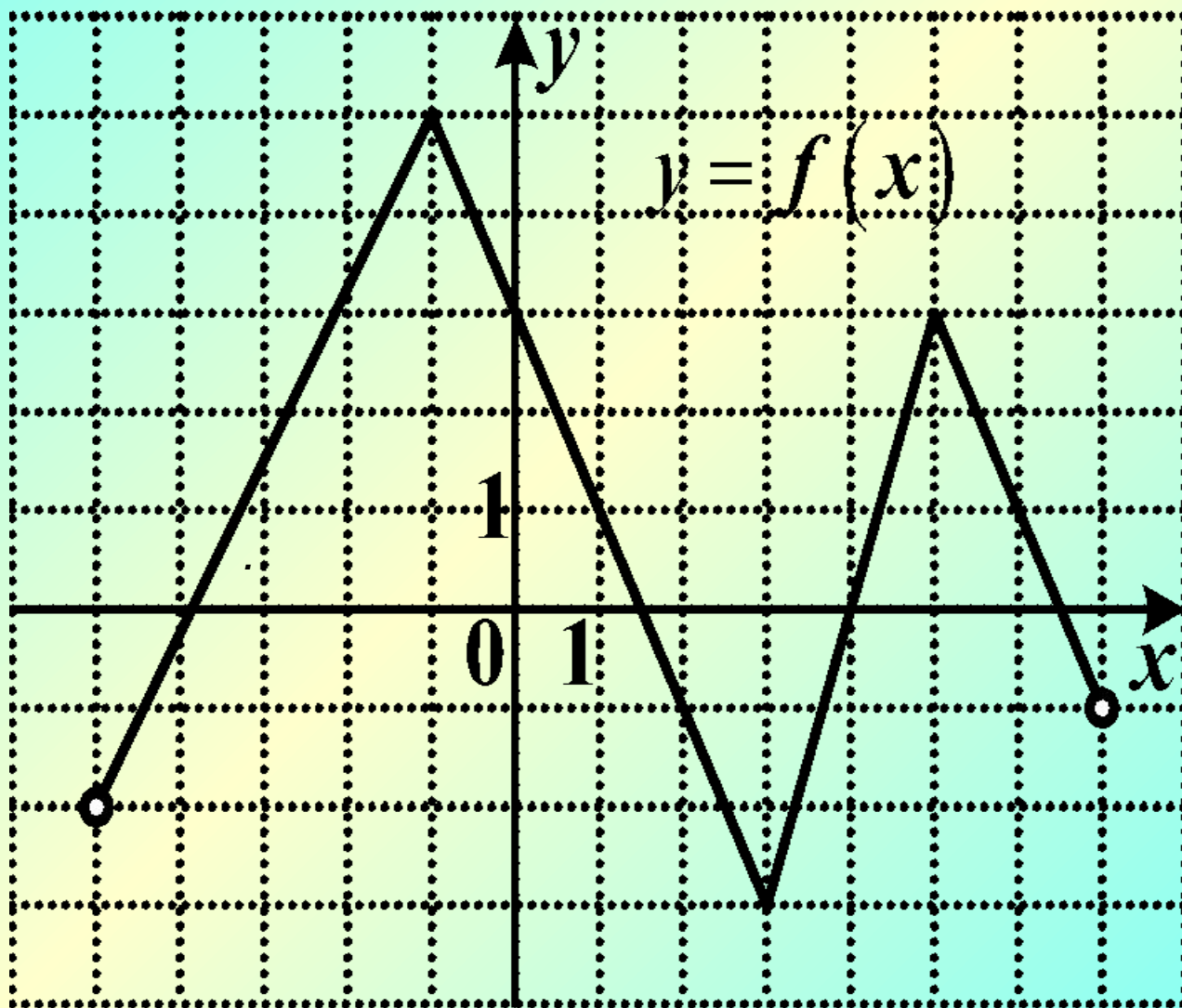
Укажите наиб. и наим. значение функции.



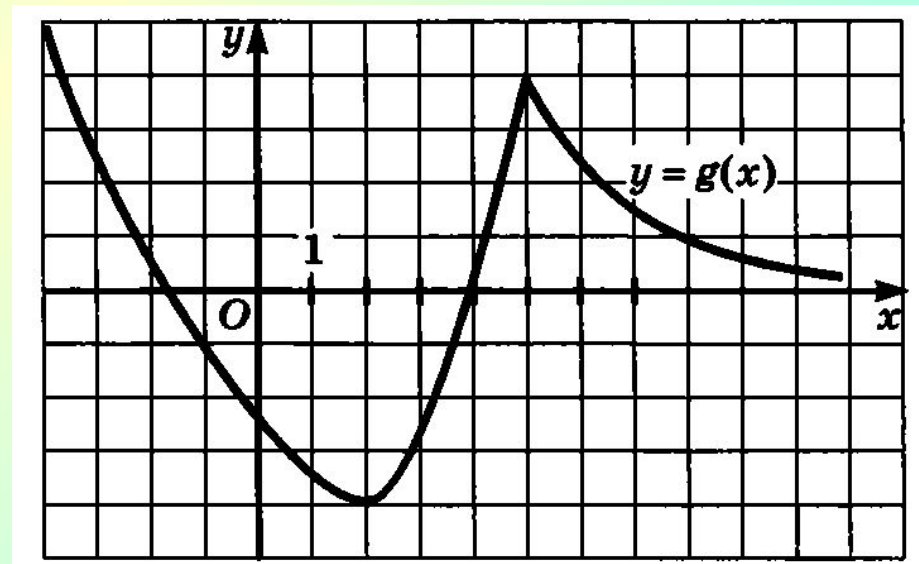
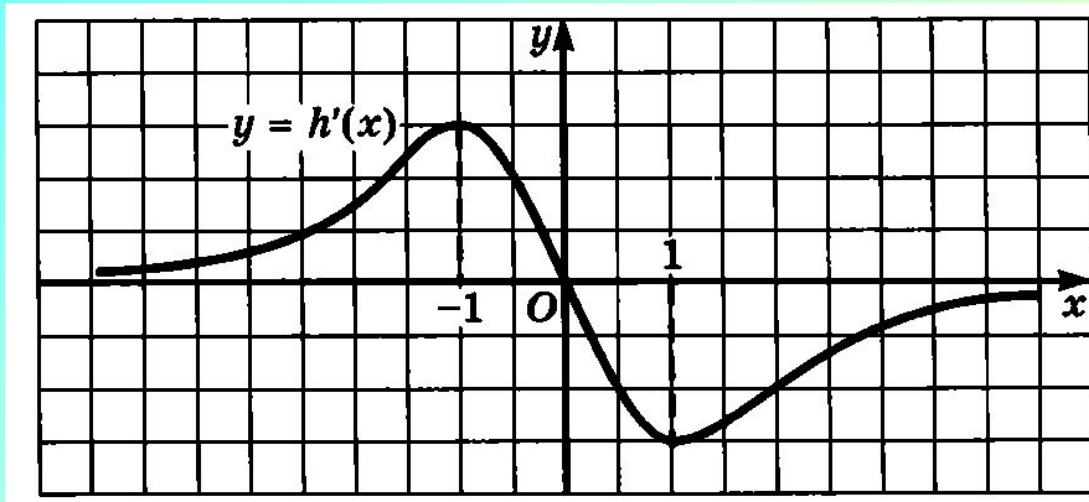
Укажите наиб. и наим. значение функции.



Укажите наиб. и наим. значение функции.



Укажите наиб. и наим. значение функции.



Укажите наиб. и наим. значение функции.

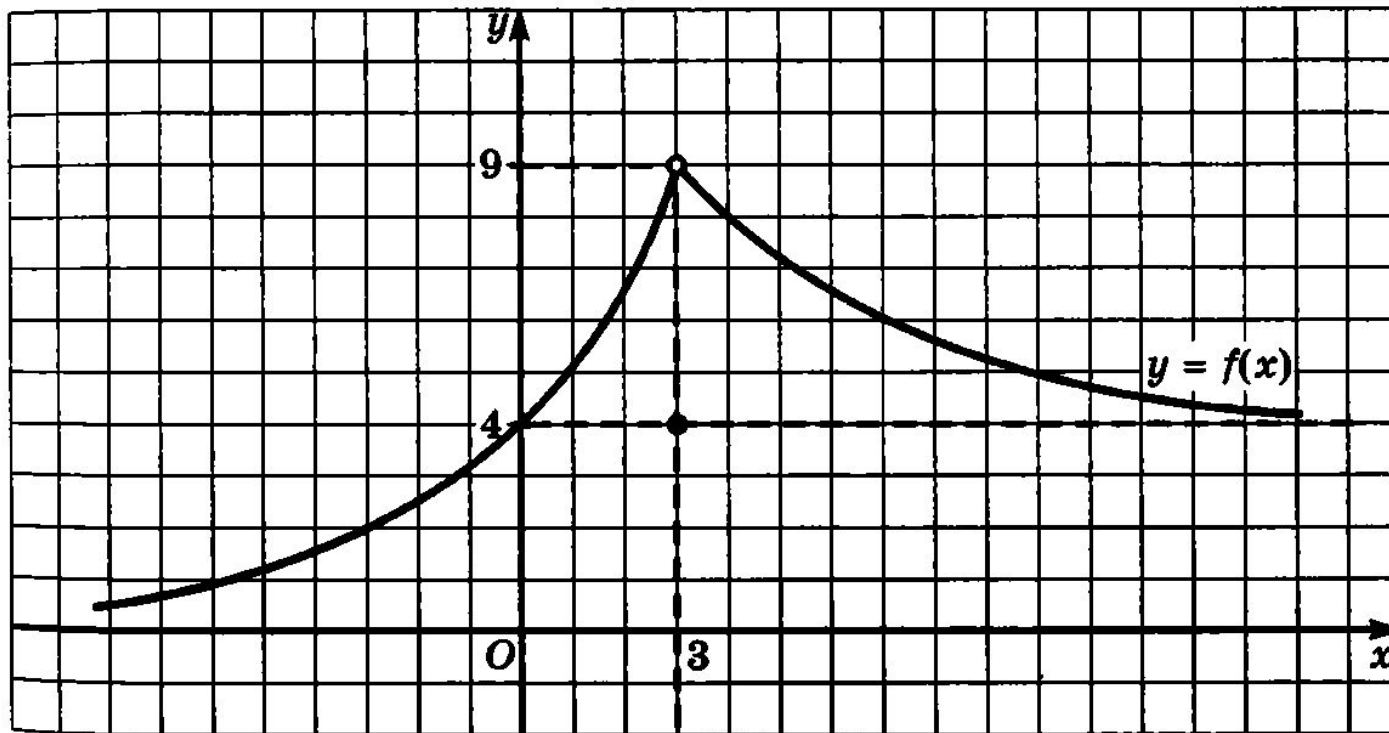
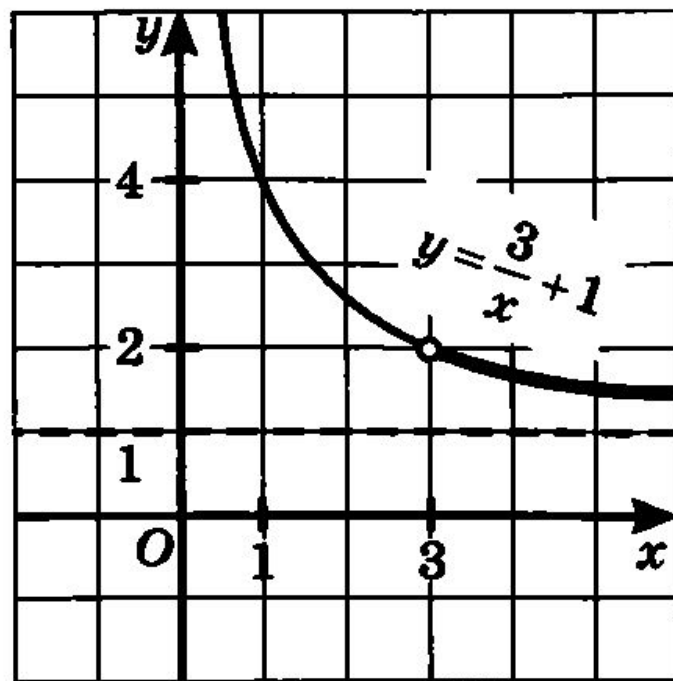
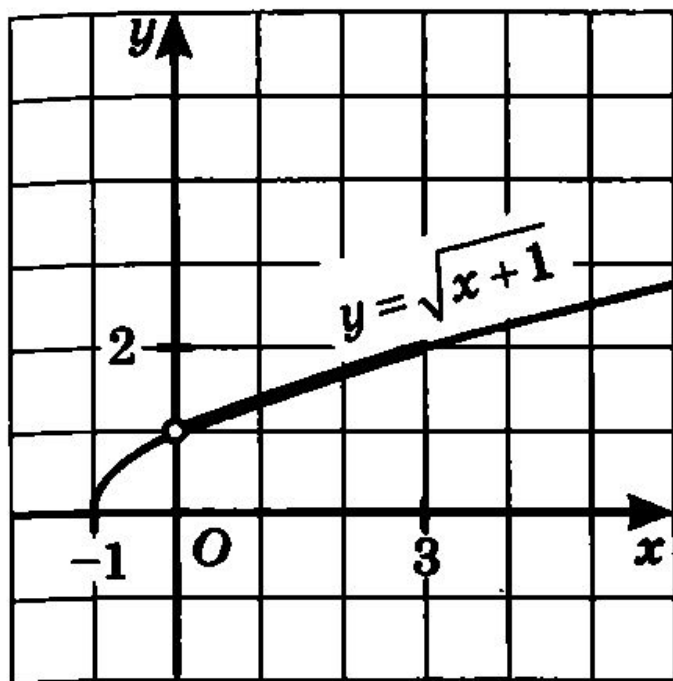
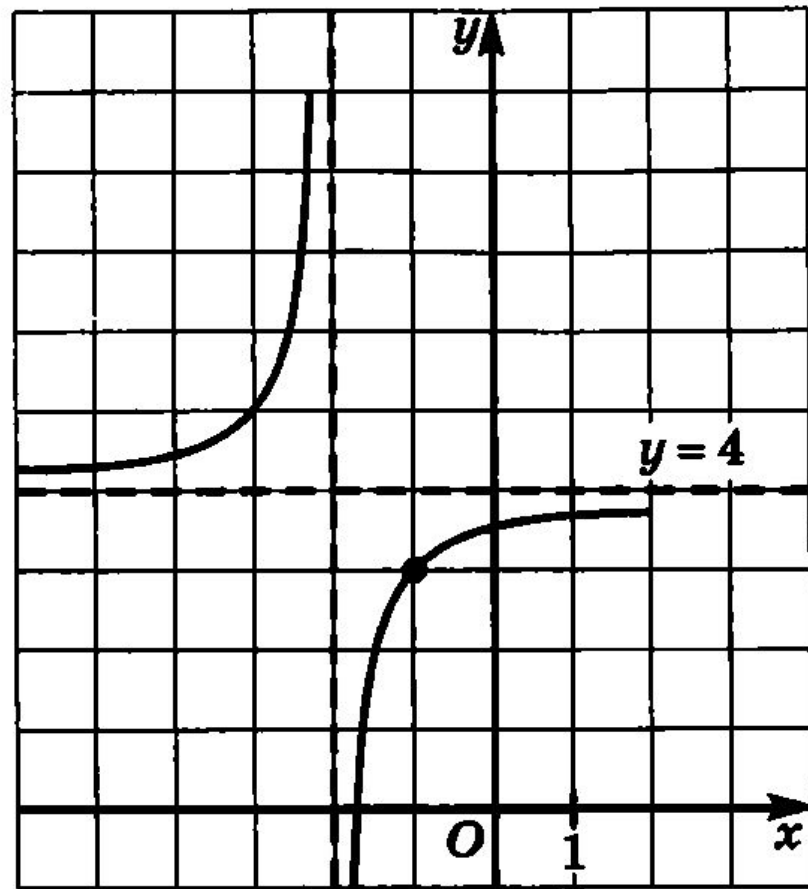
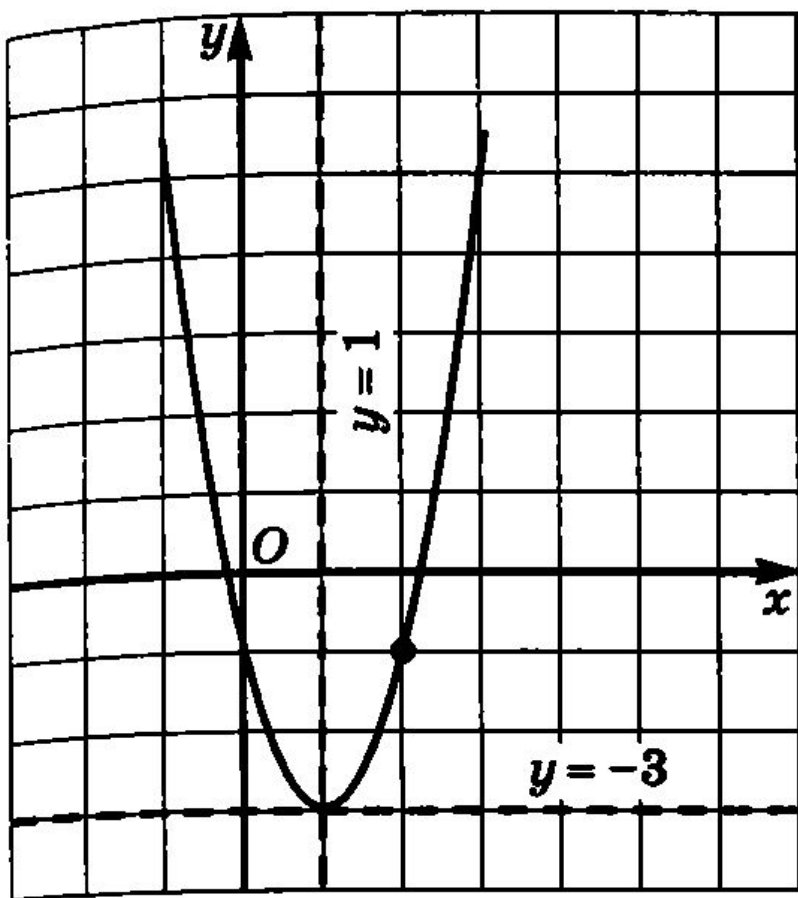


Рис. 82

Укажите наиб. и наим. значение функции.



Укажите наиб. и наим. значение функции.





За урок!