решение систем тригонометрических уравнений

1. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – сумма или разность тригонометрических функций.

Примеры:

$$a)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$б)\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi, \\ tgx + tgy = 2\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{6}\pi, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ ctgx - ctgy = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – произведение тригонометрических функций.

Примеры:

$$a)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x \cdot \sin y = b; \end{cases}$$

$$б)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x \cdot \cos y = b; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b; \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} x + y = \frac{7}{12}\pi, \\ tgx \cdot ctgy = \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} x + y = \pi, \\ ctgx \cdot ctgy = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

3. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – отношение тригонометрических функций.

Примеры:

$$а)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = b; \end{cases} \quad б)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \dfrac{tgx}{tgy} = b; \end{cases} \quad в)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \dfrac{ctgx}{ctgy} = b; \end{cases}$$

$$г)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = b; \end{cases} \quad д)\begin{cases} x \pm y = a, \\ \dfrac{\cos x}{\sin y} = b; \end{cases}$$

4. Системы уравнений, содержащих только тригонометрические функции.

Примеры:

$$a)\begin{cases}\sin x+\cos y=\dfrac{1}{4},\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2};\end{cases}\qquad б)\begin{cases}tg\dfrac{x}{2}+tg\dfrac{y}{2}=2,\\ ctgx+ctgy=-1{,}8;\end{cases}$$

$$в)\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4},\\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{3}{4};\end{cases}\qquad г)\begin{cases}3tgx=tg^3 y,\\ \cos x=\sin 2y.\end{cases}$$

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x+\cos y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, (1) \\ \cos x+\cos y=\dfrac{3}{2}; (2). \end{cases}$$

Из (2) следует: $2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2}.$

Из (1) следует: $2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2},$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}, \cos\frac{x+y}{2}=\frac{3}{2\sqrt{3}}, \quad \cos\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{x+y}{2}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n, n\in Z,$$

$$\frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,$$

$$x+y=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in Z.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in Z, \\ x-y=\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in \mathrm{Z}, \\ x-y=\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$$

Если сложить и вычесть уравнения системы, то получим систему, равносильную исходной.

$$\begin{cases} 2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in \mathrm{Z}, \\ 2y=\pm\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in \mathrm{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathrm{Z}, \\ 2y = \pm\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathrm{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n + \dfrac{\pi}{6}, y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n - \dfrac{\pi}{6}, n \in \mathrm{Z}.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6},(1) \\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4}(2); \end{cases}$$

Из (2) следует:

$$\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(y-x))=\frac{1}{4},$$

$$(\sin(x+y)+\sin(y-x))=\frac{1}{2}.$$

Из (1) следует:

$$\sin(x+y)-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\sin(x+y)=1,$$

$$x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, \\ x-y=\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ 2y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, \\ 2y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $$x=\frac{\pi}{3}\cdot(3n+1), y=\frac{\pi}{6}(6n+1), n\in Z$$

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - \dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x = 2 \cdot \cos(x - \dfrac{\pi}{6}); \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы: $\sin x = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{6}), (1).$

Правую часть уравнения (1) распишем по формуле косинуса разности:

$$\sin x = 2\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 2\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{6},$$

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x + \sin x,$$

откуда cosx = 0,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ y = x - \dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n - \dfrac{\pi}{6}, n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, y = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Если сложить и вычесть уравнения системы, то получим систему равносильную исходной. Итак:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

Применим формулы сложения:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(x-y)=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in \mathrm{Z}, \\ x-y=\pi k, k\in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

При решении независимых простейших уравнений необходимо писать разные целочисленные параметры, иначе будет потеряно множество корней.

Сложим и вычтем уравнения системы(1):

$$\begin{cases} 2x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, n,k\in \mathrm{Z}, \\ 2y=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k, n,k\in \mathrm{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}(n+k)\pi, n, k \in Z, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}(n-k)\pi, n, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}(n+k) \cdot \pi,$

$$y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}(n-k) \cdot \pi, n, k \in Z$$