Региональный этап

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012 – 2013 учебный год

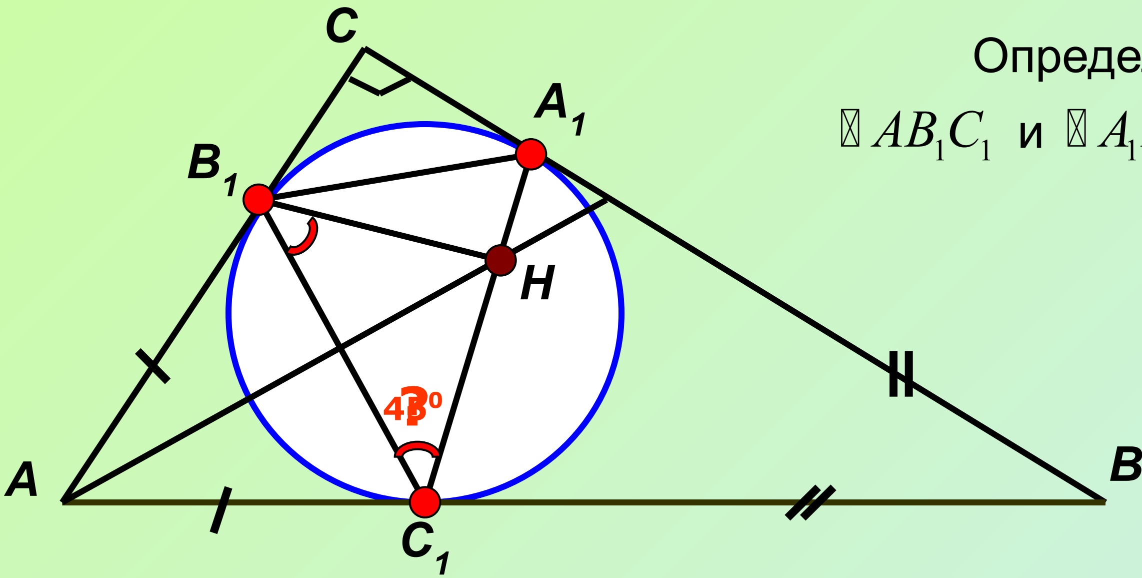
Первый день

26 – 27 января 2013 г.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

(*Н. Агаханов*)



Определим $\angle A_1B_1C_1$

$\triangle AB_1C_1$ и $\triangle A_1BC_1$ - равнобедренные

$$\angle AC_1B_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC;$$

$$\angle BC_1A_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

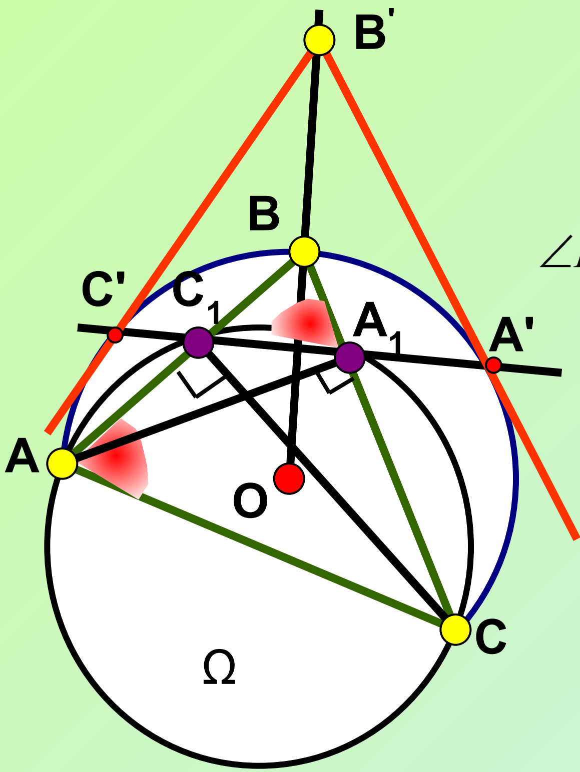
$$\angle A_1C_1B_1 = 180^0 - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2}\left(\angle BAC + \angle ABC\right) = 45^0.$$

$\triangle B_1HC_1$ – равнобедренный

Точка H лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_1C_1. Но этим же серединным перпендикуляром является биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C_1. Это и значит, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

(Л. Емельянов)



Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^0$, точки A, C_1, A_1 и C лежат на окружности с диаметром AC.

$$\angle BA_1C_1 = 180^0 - \angle CA_1C_1 = \angle BAC.$$

$$\angle BA_1C_1 = \angle BA_1C' = \frac{1}{2}\left(\cup BC' + \cup CA'\right)$$ как угол между хордами

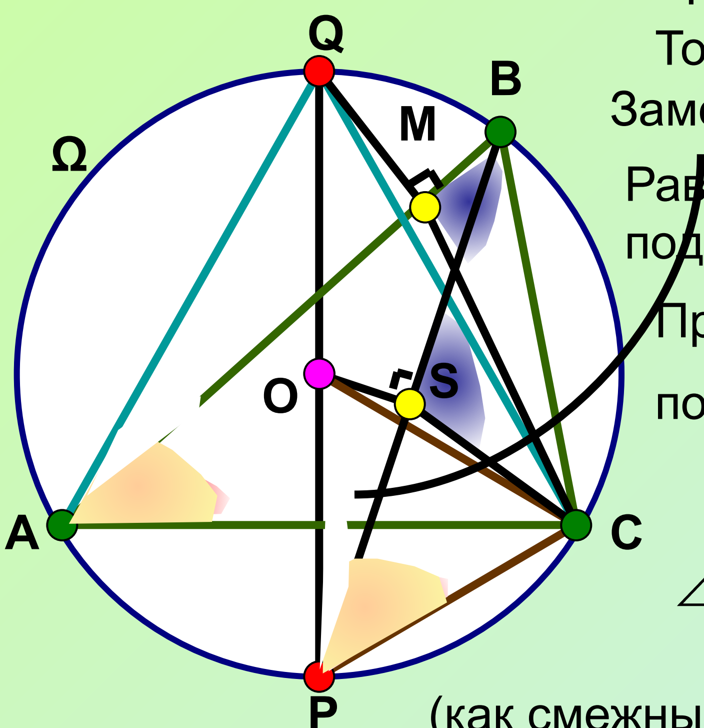
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\left(\cup BA' + \cup CA'\right)$$ как вписанный угол

$$\cup BA' = \cup BC';\, BA' = BC'.$$

Наконец, отрезки касательных B‘A‘ и B‘C‘ равны.

Точки B‘ и B лежат на серединном перпендикуляре к хорде A'C‘ окружности Ω. Центр окружности Ω также лежит на этом серединном перпендикуляре.

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP. *(Ф. Ивлев)*



Пусть S – середина BP, O – центр окр. Ω.

Тогда O – середина PQ, а S – проекция O на BP.

Заметим, что QA = QC, т.к. Q – середина дуги AC.

Равнобедренные треугольники AQC и POC подобны, т.к. $\angle QAC, \angle OPC$ опираются на QC.

Прямоугольные треугольники AQM и POS подобны, т.к. $\angle QAM, \angle OPS$ опираются на QB.

Из доказанных подобий: $\frac{AM}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AC}{PC}$.

$\angle MAC = \angle SPC$ (опираются на BC)

$\triangle AMC \sim \triangle PSC \Rightarrow \angle BMC = \angle BSC$

(как смежные с соответственными углами в треугольниках)

Отсюда следует, что точки B, C, M, S лежат на одной окружности.