

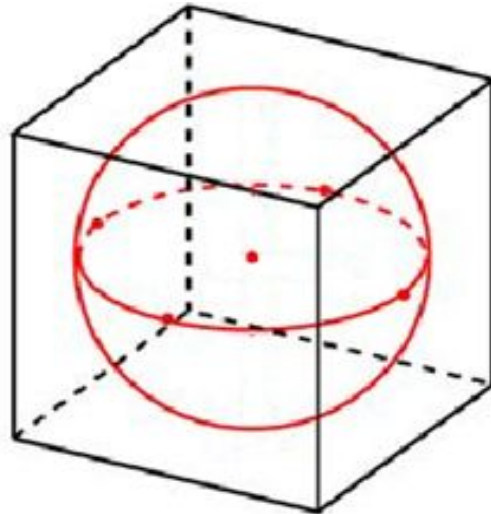
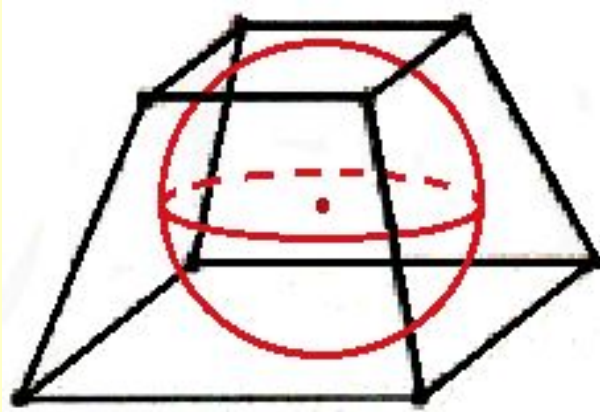
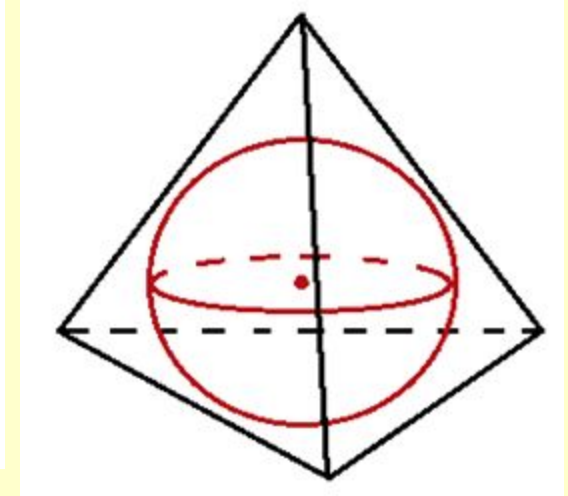
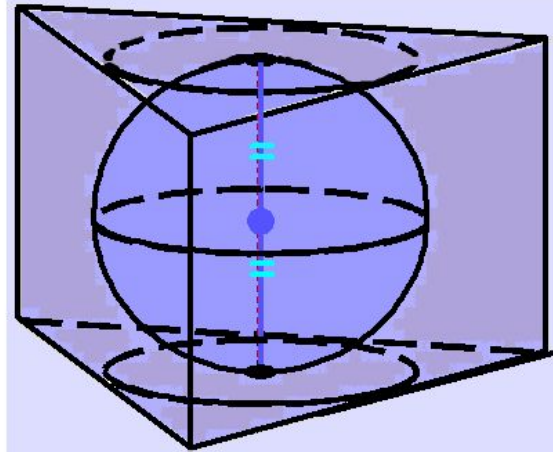
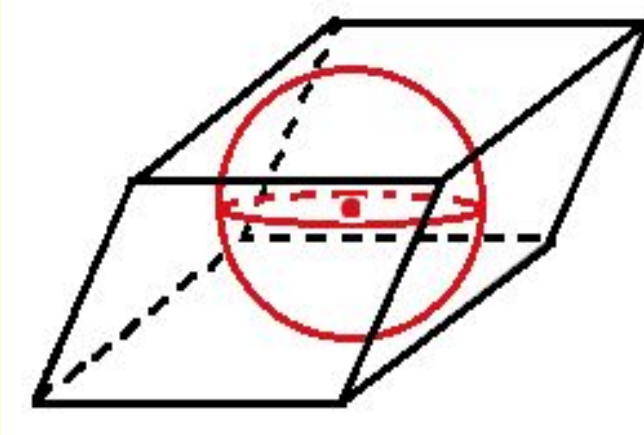
Сфера, вписанная в многогранник

Богаевская Галина Николаевна
учитель математики
ГБОУ гимназии 446
Санкт-Петербурга

Сфера, вписанная в многогранник

Определение

Многогранник называется **описанным около сферы** (а сфера **вписанной в многогранник**), если все грани многогранника касаются этой сферы.



Следствие

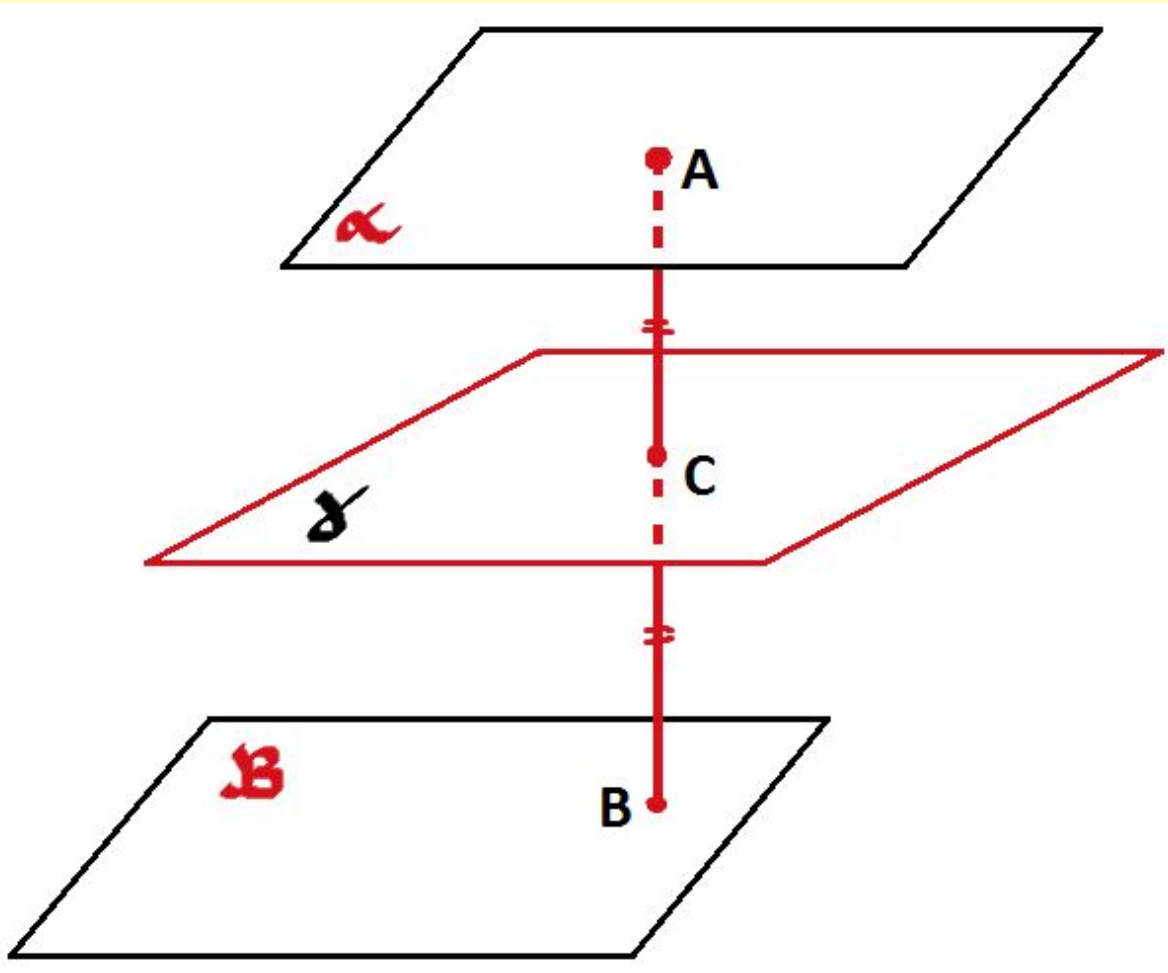
Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

Подготовительные задачи

1. Где расположено множество точек пространства, равноудаленных от двух плоскостей?

Теорема 1

Множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, есть плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра этих плоскостей.

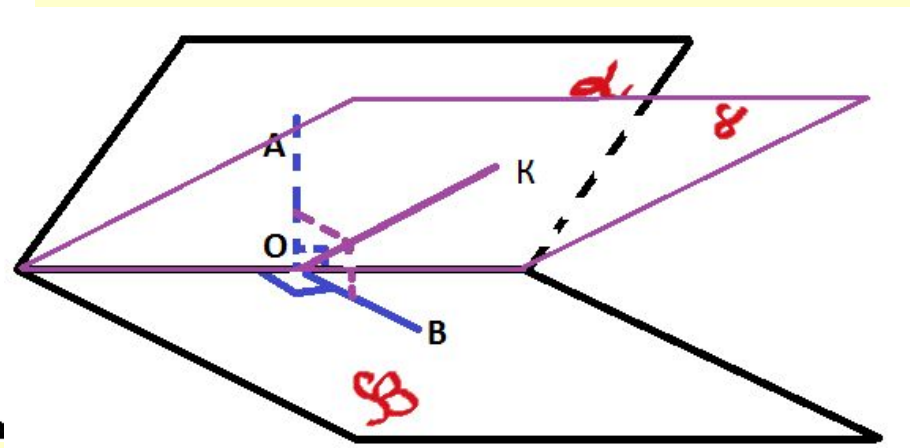
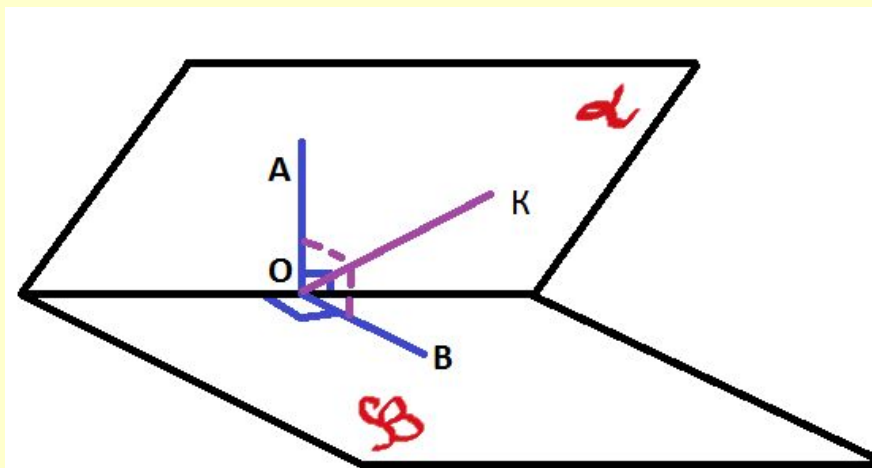
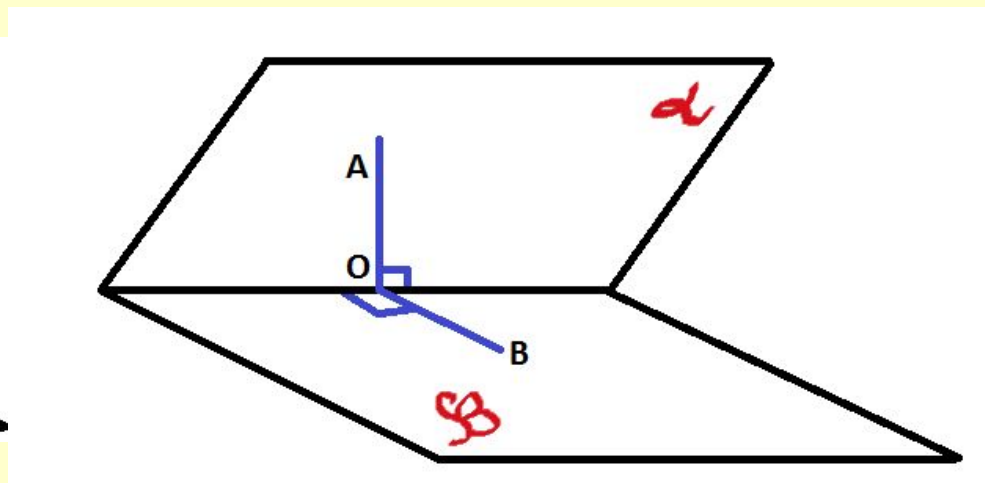
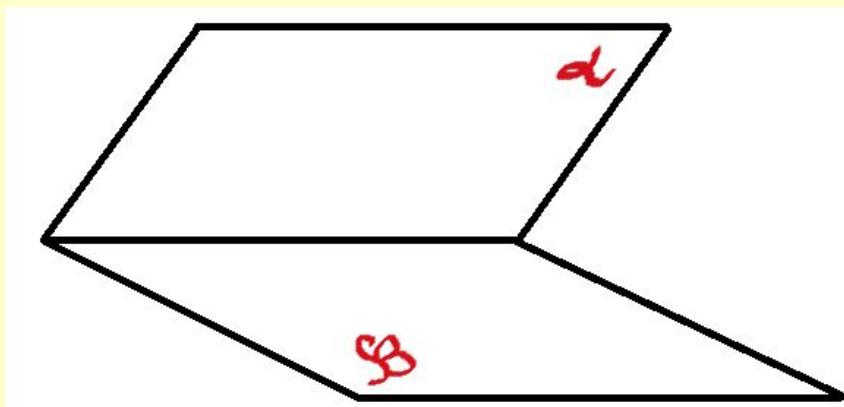


Дано:
 $\alpha \parallel \beta$;

$\gamma \parallel \alpha$; $\gamma \parallel \beta$;
 $AC = CD$; $AB \perp \alpha$; $AB \perp \beta$

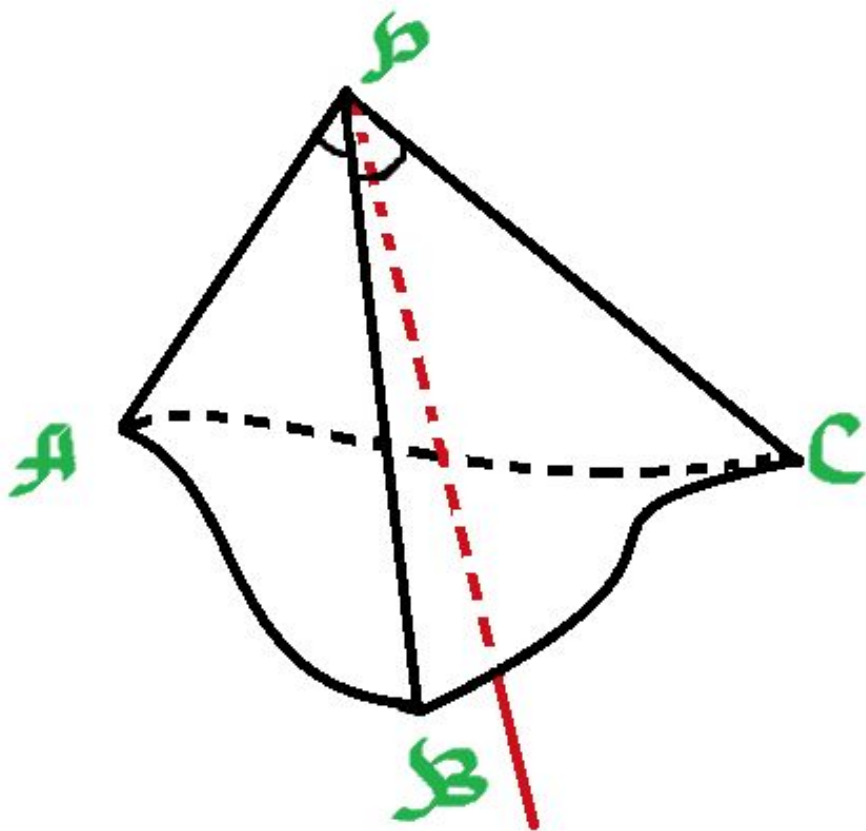
Теорема 2

Множество точек, равноудаленных от граней двугранного угла, есть биссектриса (биссекторная плоскость) этого двугранного угла.



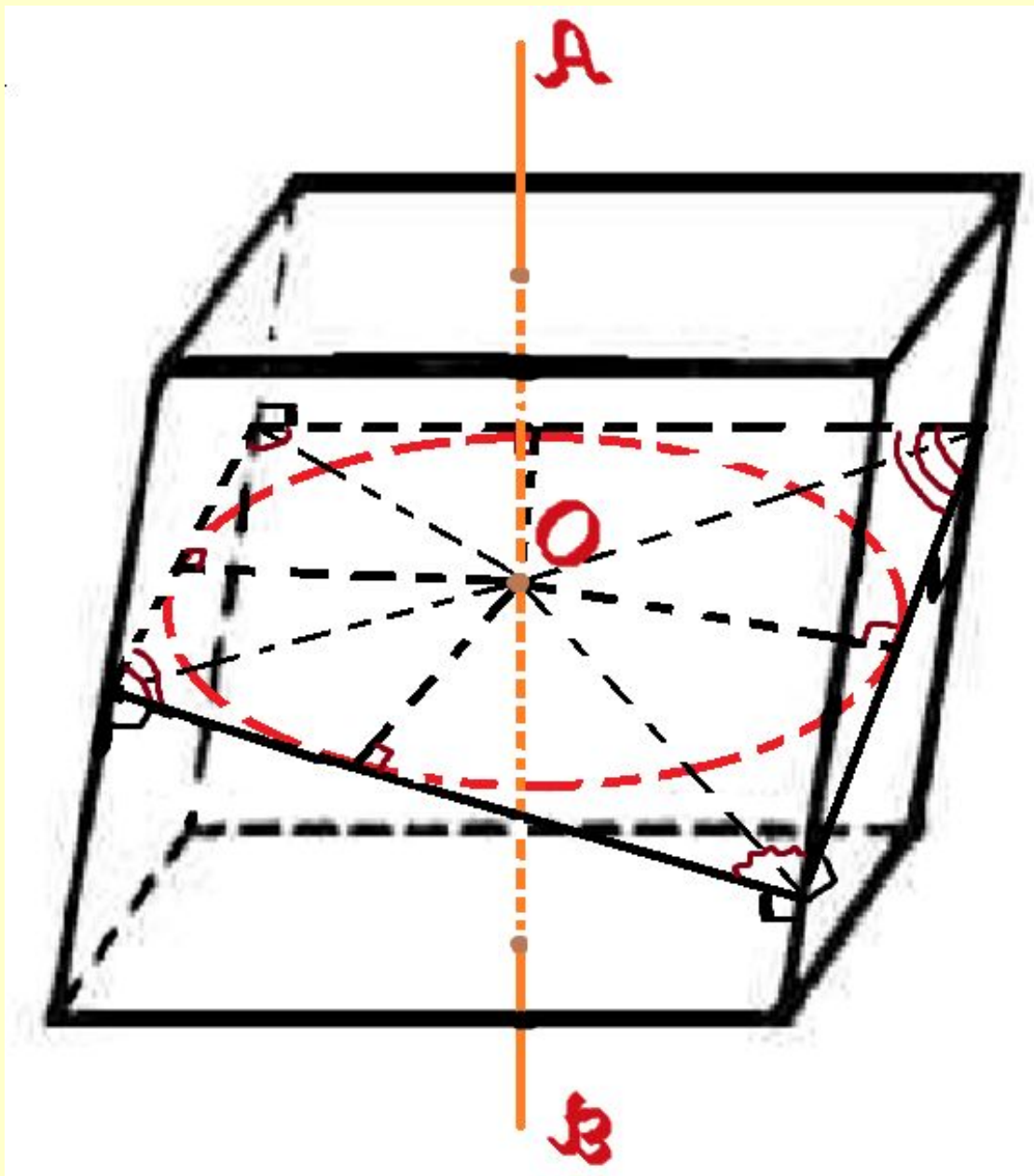
Теорема 3

Множество точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, есть биссектриса этого трехгранного угла.



Биссектрисой трехгранного угла называется луч с началом в вершине данного трехгранного угла, который образует равные углы с гранями этого трехгранного угла.

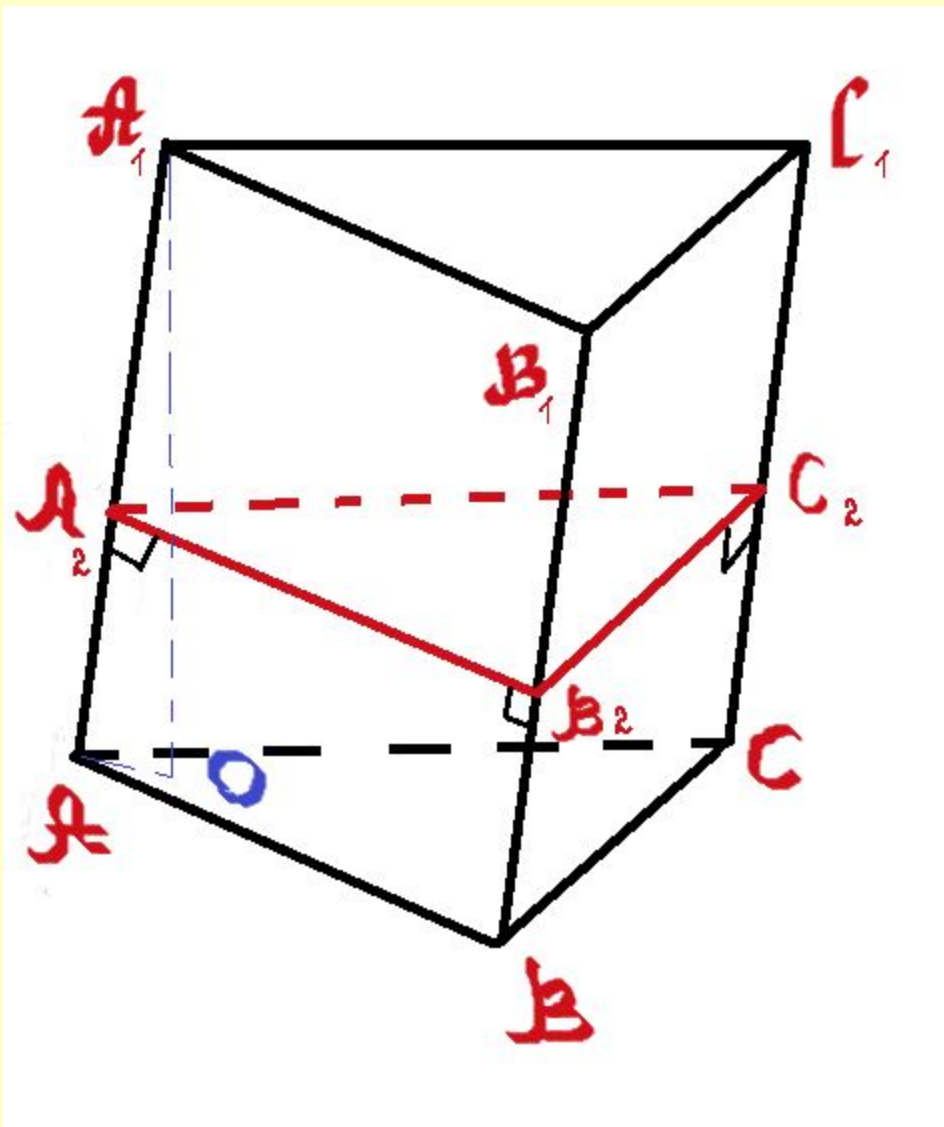
Сфера, вписанная в призму



Теорема 4

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

2. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы 13,14,15. В призму вписан шар. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем призмы и объем шара.



Решение.

$(A_2B_2C_2)$ -перпендикулярное сечение.

$$V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R_{ш.}^3$$

$$S = \frac{1}{2}Pr_{окр}$$

$$1) R_{ш.} = r_{впис.окр.} = S_{A_2B_2C_2} / p$$

$$p = 21;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S_{A_2B_2C_2} = 84;$$

$$R_{ш.} = 84/21 = 4;$$

$$V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R_{ш.}^3; V_{ш.} = 256\pi/3;$$

$$2) V_{пр.} = S_{перп.сеч.} * AA_1;$$

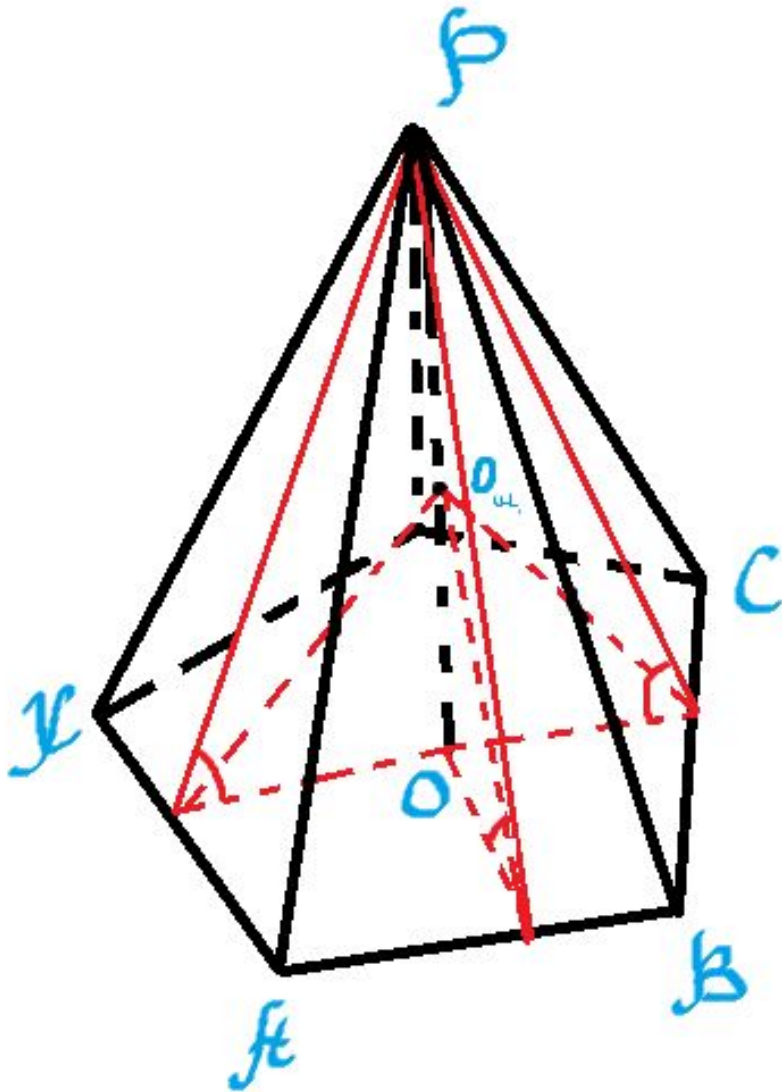
$$AA_1 = A_1O / \sin \alpha = 8 / \sin \alpha;$$

$$V_{пр.} = 84 * 8 / \sin \alpha = 672 / \sin \alpha.$$

Ответ: $256\pi/3$; $672 / \sin \alpha$.

Сфера, вписанная в пирамиду

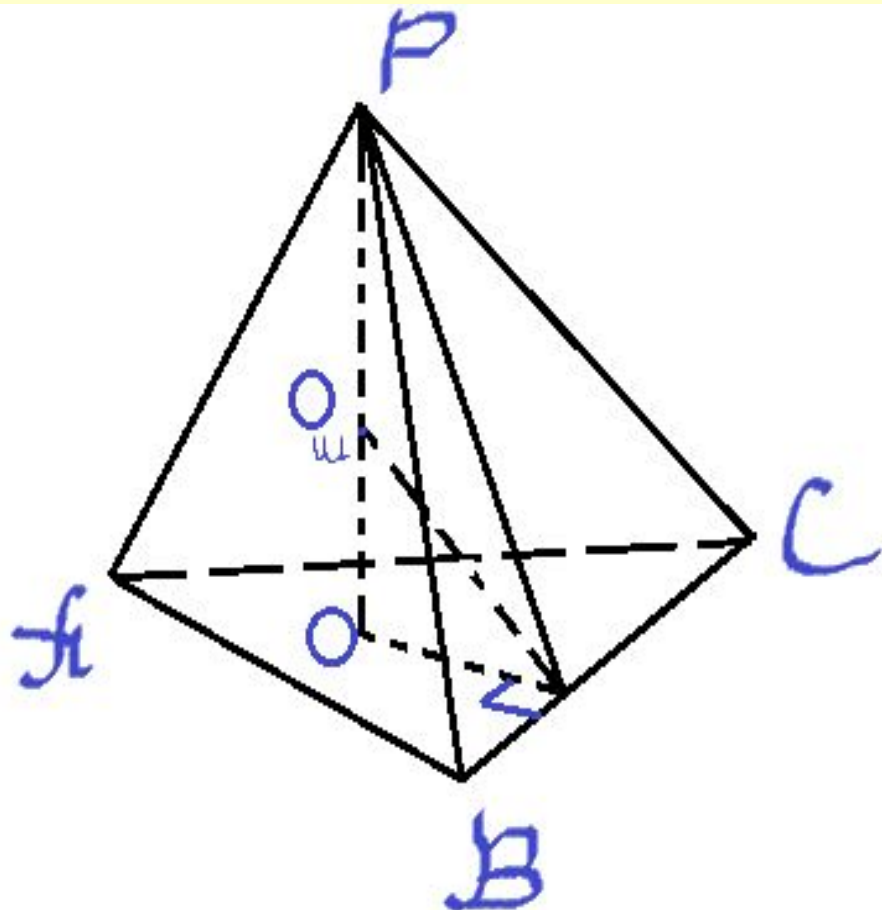
Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию.



Теорема 5

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию (двугранные углы при основании пирамиды равны), то в пирамиду можно вписать сферу, центр которой находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

3. Основание пирамиды - треугольник со сторонами 9, 10 и 17. Все боковые грани наклонены под углом 45° к основанию пирамиды. Найти радиус вписанного шара.



Решение.

$$1) OK = r_{\text{впис.окр.}} = S/p;$$

$$S = p * r_{\text{впис.окр.}}; p = 18;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S_{\Delta ABC} = 36; OK = 2.$$

2) ΔPOK : OK - биссектриса,
т.о.

$$OO_w / O_w p = OK / PK = \cos 45^\circ;$$

$$OO_w / O_w p = 1 / \sqrt{2};$$

$$\angle PKO = 45^\circ, \text{ т.е. } OK = OP = 2$$

$$\frac{1}{2} R_w - R_w = 1 / \sqrt{2};$$

$$\sqrt{2} R_w = 2 - R_w;$$

$$R_w = 2 / (1 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $2(\sqrt{2} - 1)$.

Теорема 6

В любой тетраэдр можно вписать сферу.

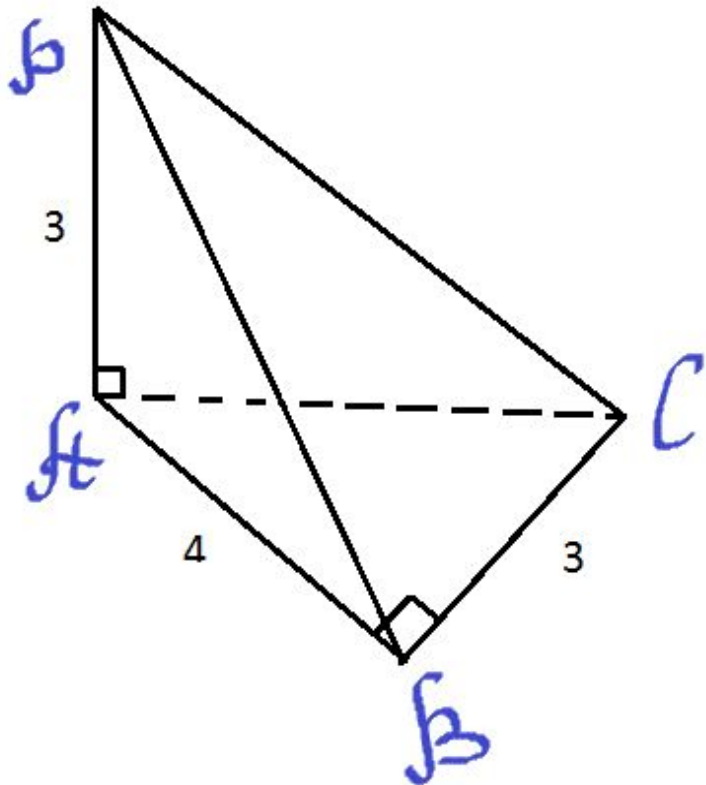
Теорема 7

Если в многогранник, объем которого равен V , а площадь поверхности равна S , вписан шар радиуса R , то имеет место соотношение:

$$V = \frac{1}{3} S * R$$

3. Основание пирамиды - треугольник ABC , в котором $AB \perp BC$, $AB=4$, $BC=3$. Боковое ребро PA перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 3. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Решение.



$$1) V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} * AP;$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * 3 * 4 * 3 = 6.$$

2) $PB \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах); $AC = PB = 5$.

$$3) S_{\Delta PAB} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} * 4 * 3 = 6.$$

$$S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} * 3 * 5 = 7,5.$$

$$S_{\text{полн.}} = 2 * 6 + 2 * 7,5 = 12 + 15 = 27.$$

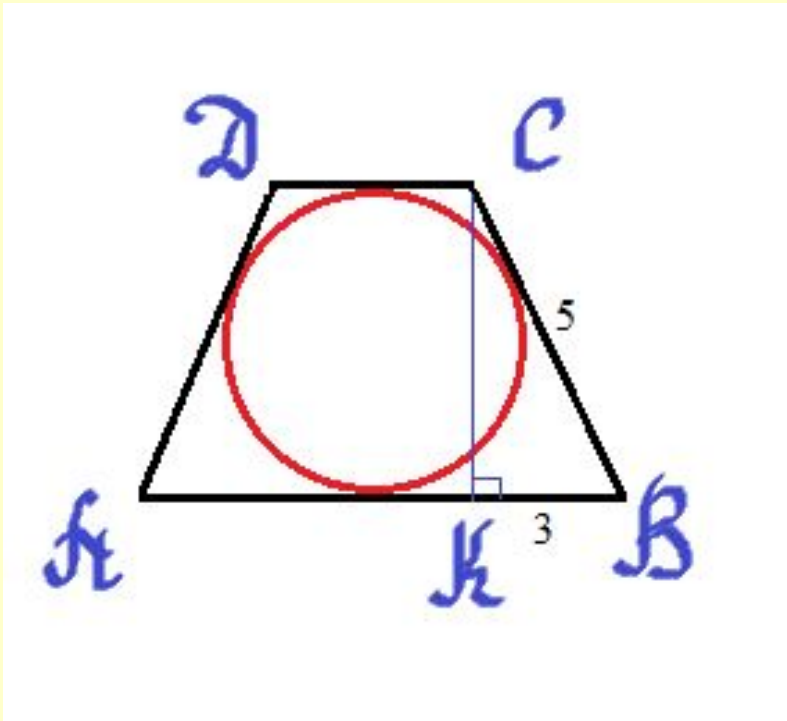
$$4) R_{\text{ш.}} = 3 V_{\text{пир.}} / S;$$

$$R_{\text{ш.}} = 3 * 6 / 27 = \frac{2}{3};$$

$$V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi}{81}.$$

Ответ: $\frac{32\pi}{81}$.

4. Шар вписан в прямую призму, основание которой - равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8. Найдите объем шара и объем призмы.



Решение.

- 1) $R_{ш.} = r_{впис.окр.}$; $H_{пр.} = D_{впис.окр.} = CK.$
 - 2) $DC + AB = AD + CB;$
 $2BC = 2 + 8; BC = 5.$
 - 3) $BC = \frac{1}{2}(AB - DC); BK = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3;$
 - 4) $\triangle BCK: CK = 4; R_{ш.} = 2.$
 - 5) $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H_{пр.};$
 $V_{пр.} = 80;$
 $V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R^3;$
 $V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi 2^3 = 32\pi/3.$
- Ответ: $32\pi/3.$

Спасибо за внимание