Координаты многогранников.

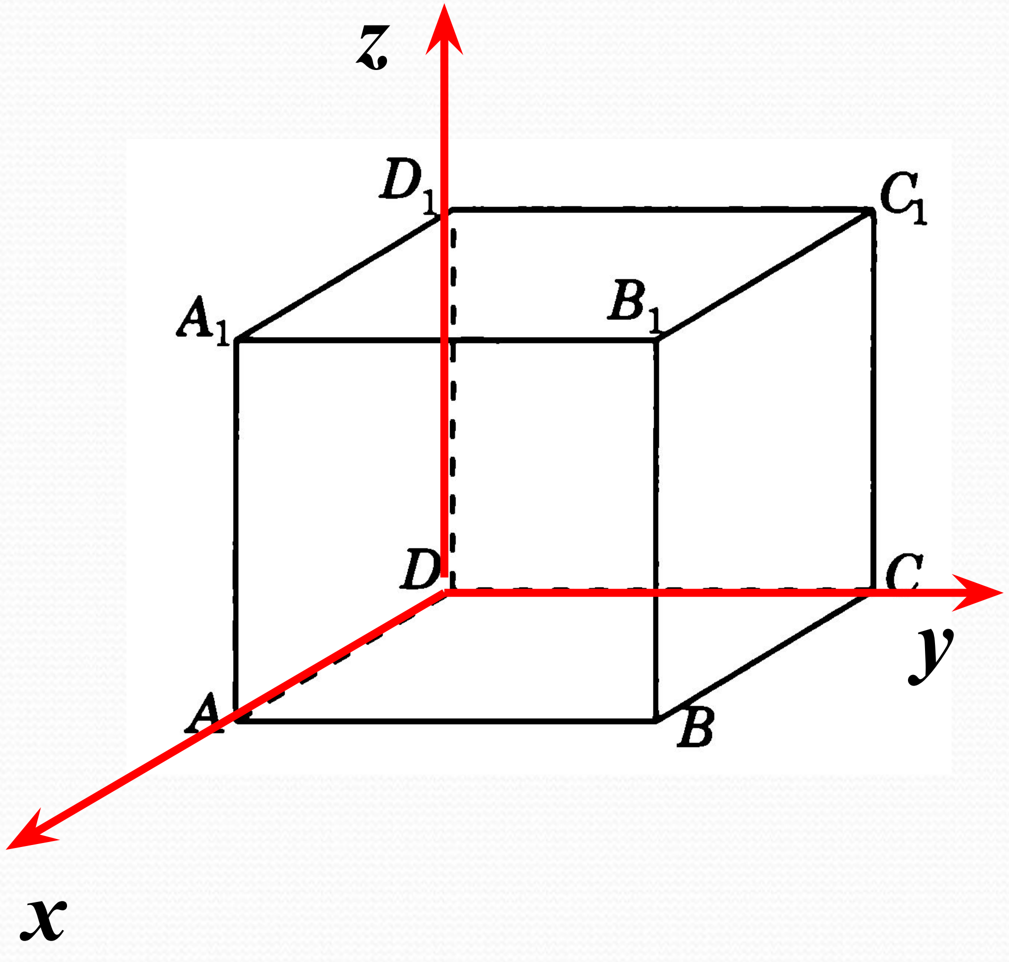
Единичный куб.

D (0; 0; 0) D_1 (0; 0; 1)

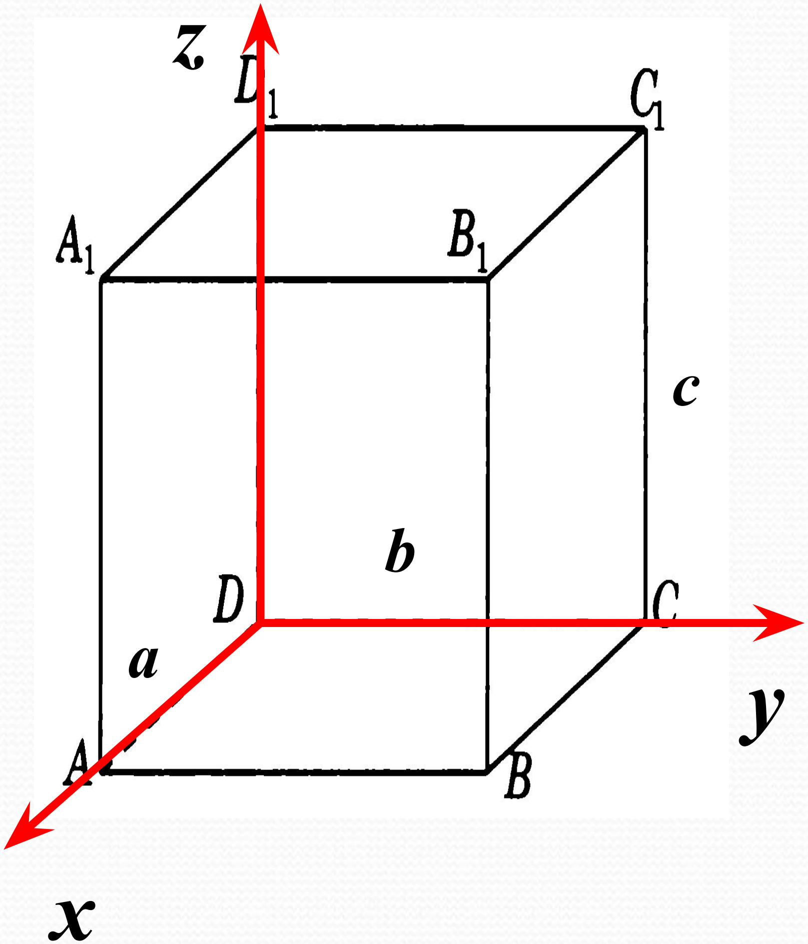
A (1; 0; 0) A_1 (1; 0; 1)

C (0; 1; 0) C_1 (0; 1; 1)

B (1; 1; 0) B_1 (1; 1; 1)



Прямоугольный параллелепипед.



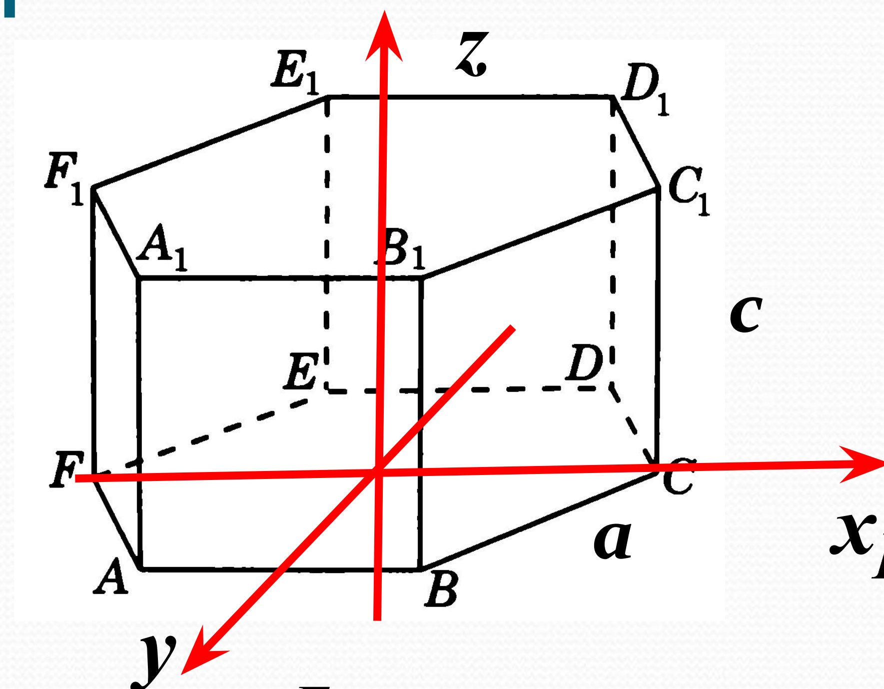
D (0; 0; 0) D_1 (0; 0; c)

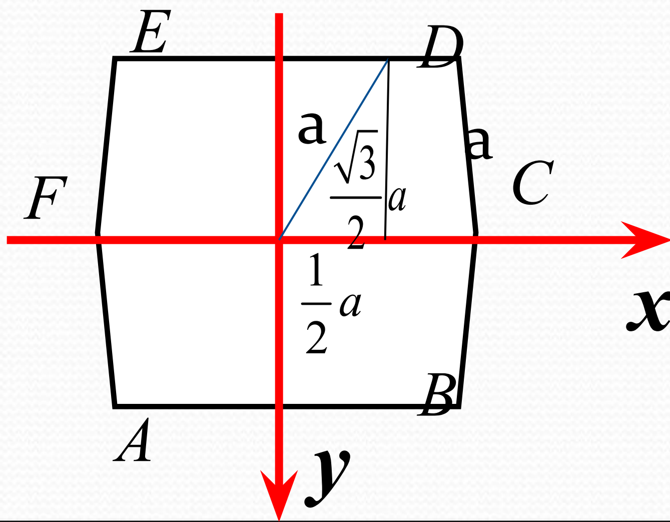
A (a; 0; 0) A_1 (a; 0; c)

C (0; b; 0) C_1 (0; b; c)

B (a; b; 0) B_1 (a; b; c)

Правильная шестиугольная призма.





$C\,(a;\,0;0)$ $\quad$ $C_1\,(a;\,0;c)$

$F\,(-\,a;\,0;0)$ $\quad$ $F_1\,(-\,a;\,0;c)$

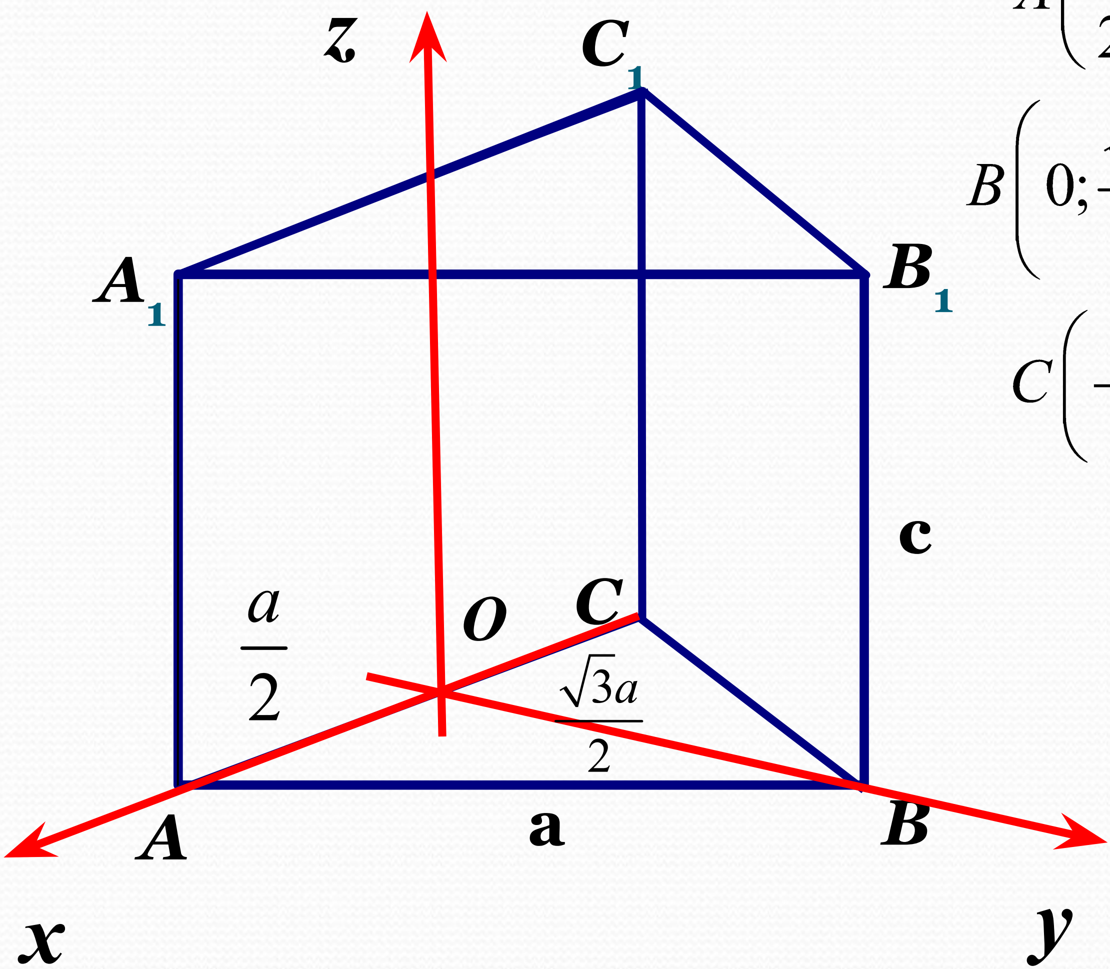
$$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right) \quad D_1\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$$

$$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right) \quad E_1\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$$

$$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right) \quad A_1\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$$

$$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right) \quad B_1\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$$

Правильная треугольная призма.

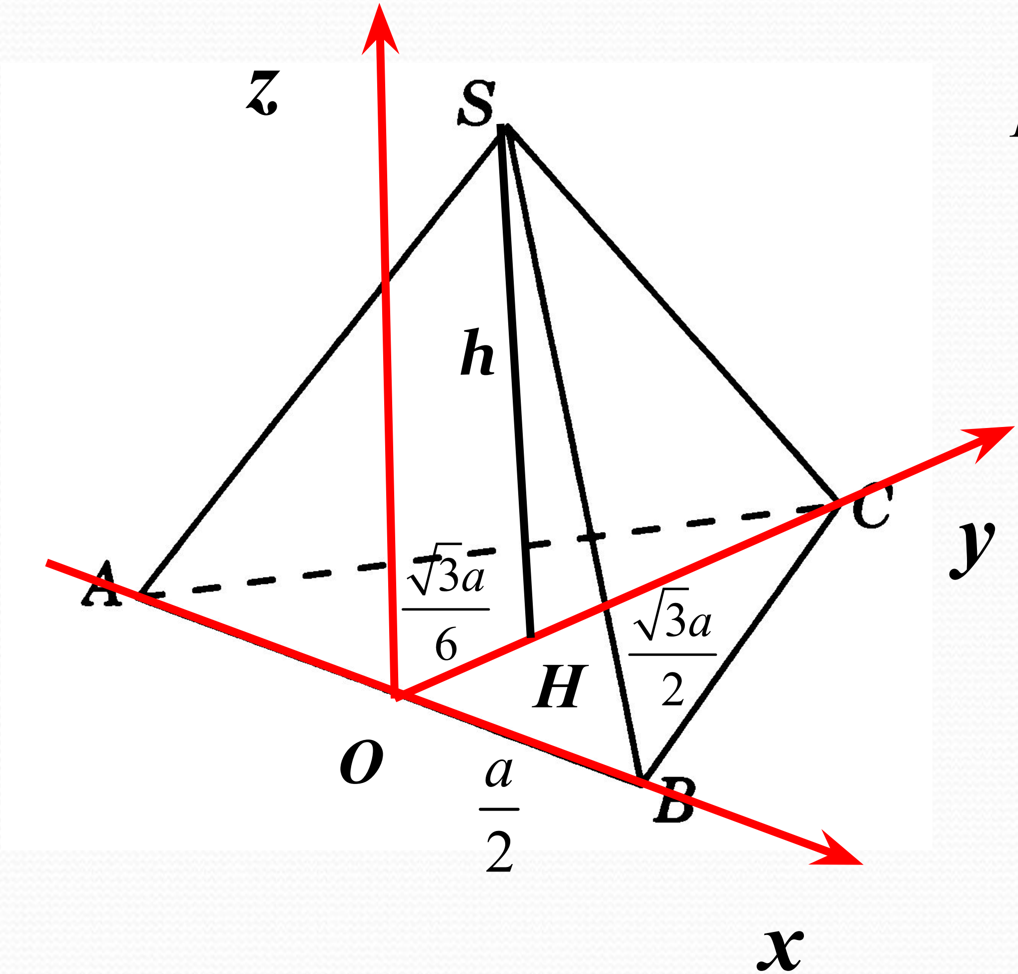


$A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ $A_1\left(\frac{a}{2};0;c\right)$

$B\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ $C_1\left(-\frac{a}{2};0;c\right)$

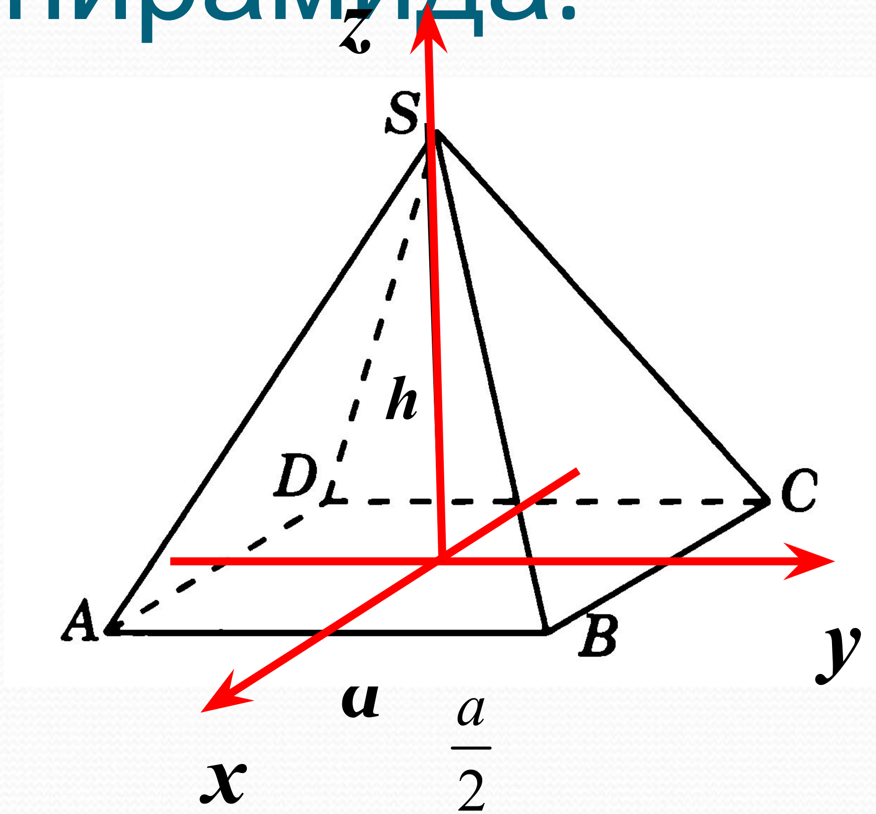
Правильная треугольная пирамида.



$$B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \qquad C\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \qquad S\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{6};h\right)$$

Правильная четырехугольная пирамида.



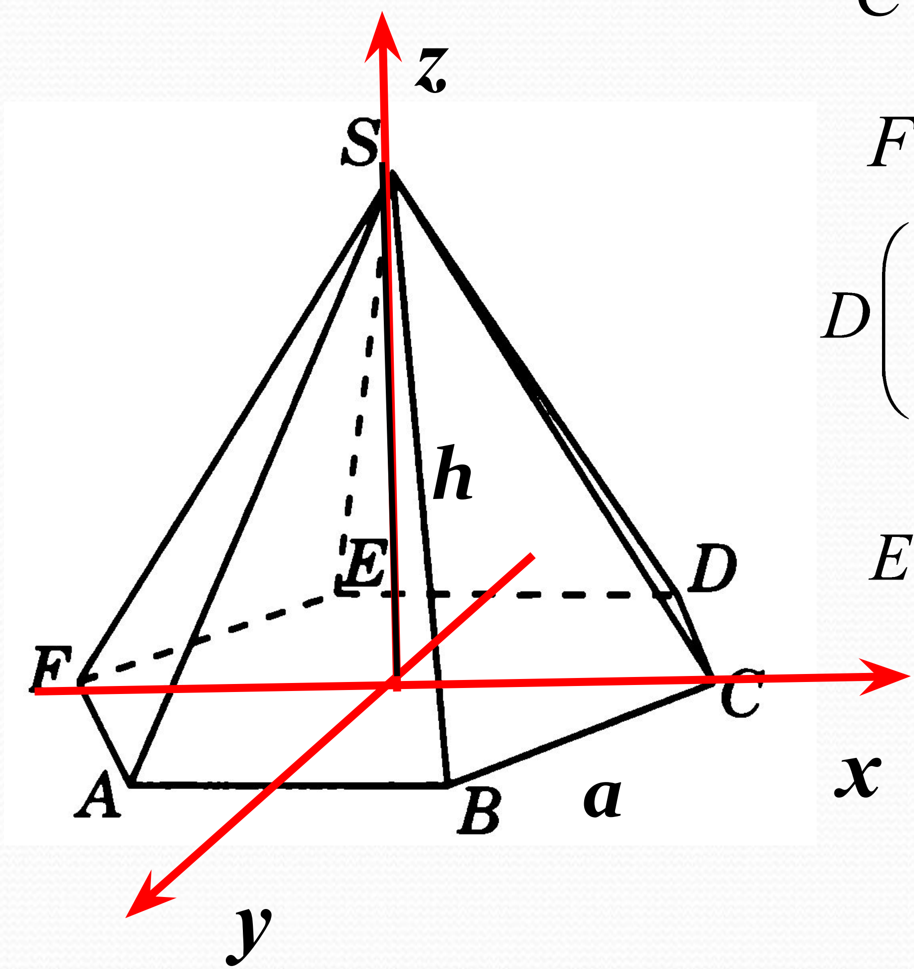
$\frac{a}{2}$

$B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ $A\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ $S(0;0;h)$

$D\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

Правильная шестиугольная пирамида.



C (a; 0;0)

$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

F (- a; 0;0)

$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$S\left(0;0;h\right)$

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки M(x_0;y_0;z_0) до плоскости ax + by + cz + d = 0.

$$\rho\left(M;\alpha\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Например:

$M\left(-3;1;2\right)$ $\qquad 3x+4y-12z+2=0$

$$\rho\left(M;\alpha\right)=\frac{\left|3\cdot\left(-3\right)+4\cdot1-12\cdot2+2\right|}{\sqrt{3^2+4^2+\left(-12\right)^2}}=\frac{27}{13}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$M(x_m; y_m; z_m)$

$N(x_n; y_n; z_n)$

$P(x_p; y_p; z_p)$

Уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0$$

Числа **a, b, c** находим из системы уравнений

$$\begin{cases} ax_m + by_m + cz_m + d = 0 \\ ax_n + by_n + cz_n + d = 0 \\ ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \end{cases}$$

Например: Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0;1;0)$ $N(1;0;0)$ $P(1;1;1)$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0 \end{cases}$$

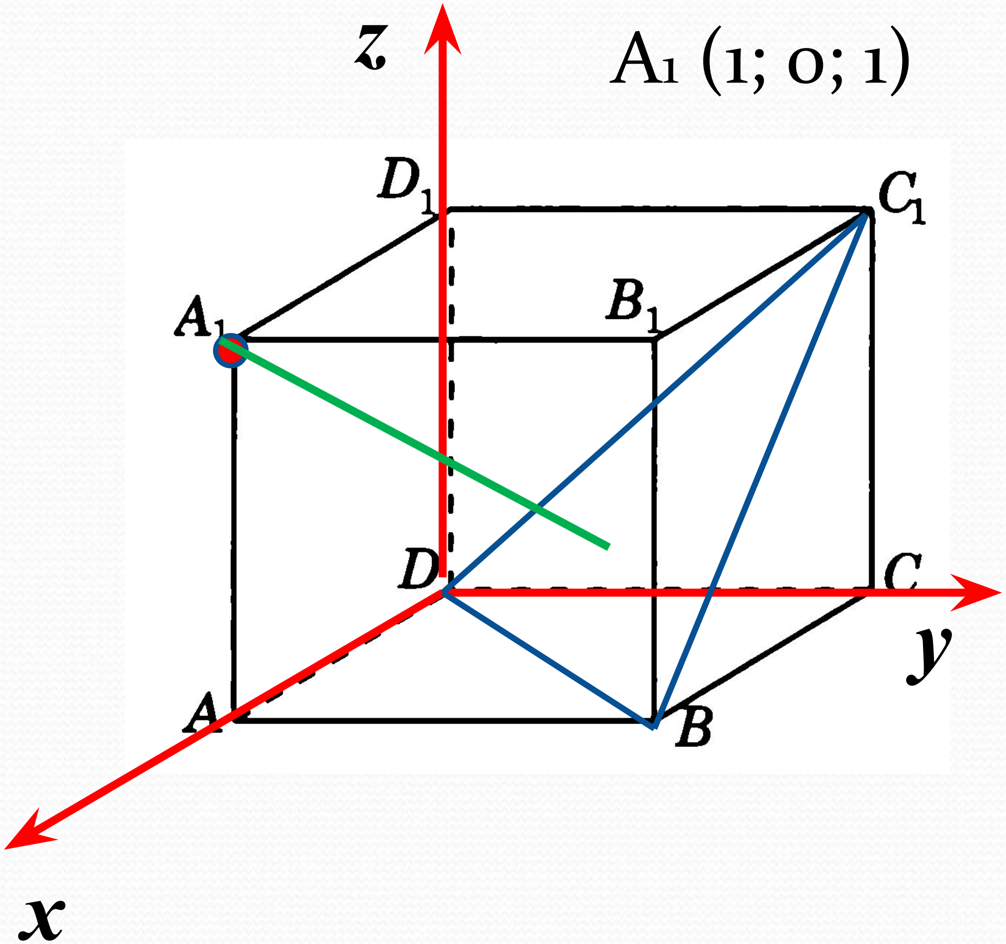
$$\begin{cases} b+d=0 \\ a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-d \\ a=-d \\ -d-d+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-d \\ a=-d \\ c=d \end{cases}$$

$$-dx-dy+dz+d=0 \,/ :(-d)$$

$$x+y-z+1=0$$

- уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

№ 1 В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости (BDC_1) .



A_1 (1; 0; 1)

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

Запишем уравнение плоскости DBC_1.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases}$$

$$-bx+by-bz=0 \,\Big/ :(-b)$$

Найдем искомое расстояние по формуле

$$x-y+z=0$$

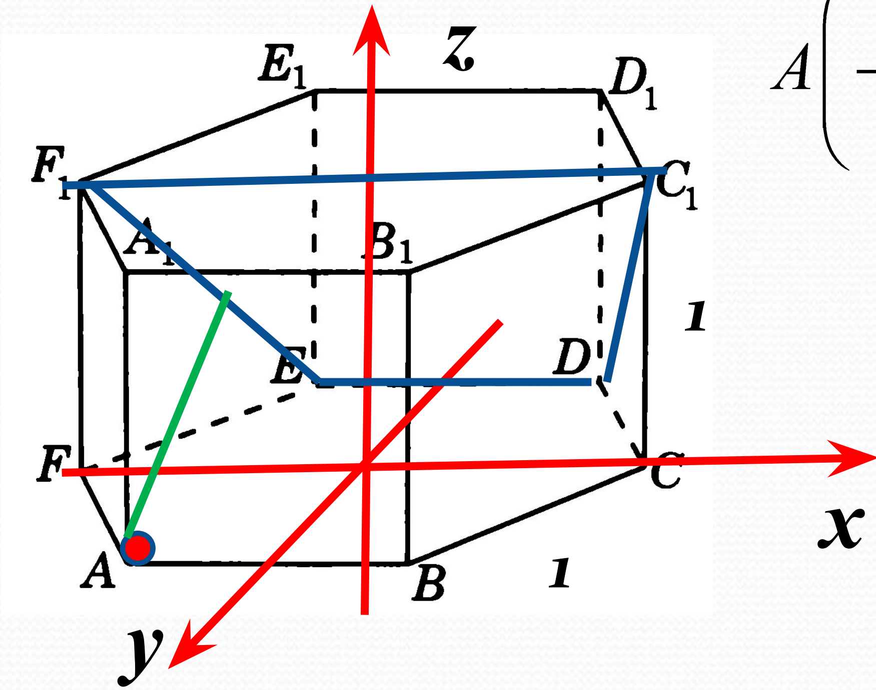
A1 (1; 0; 1)

$$\rho\left(M;\alpha\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\rho\left(A_1;(BC_1D)\right)=\frac{\left|1\cdot 1-1\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки А до плоскости (DEF_1)



$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C_1\ (1;\ 0;1)$

$D\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$F_1\ (-\ 1;\ 0;1)$

Запишем уравнение плоскости DC_1F_1.

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \\ a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot(-1)+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ -a+c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ c=-d \\ b=\frac{2}{\sqrt{3}}d \end{cases}$$

$$0\cdot x+\frac{2}{\sqrt{3}}dy-dz+d=0 \Big/ :d$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}y-z+1=0$$

Найдем искомое расстояние по формуле $\rho(M;\alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

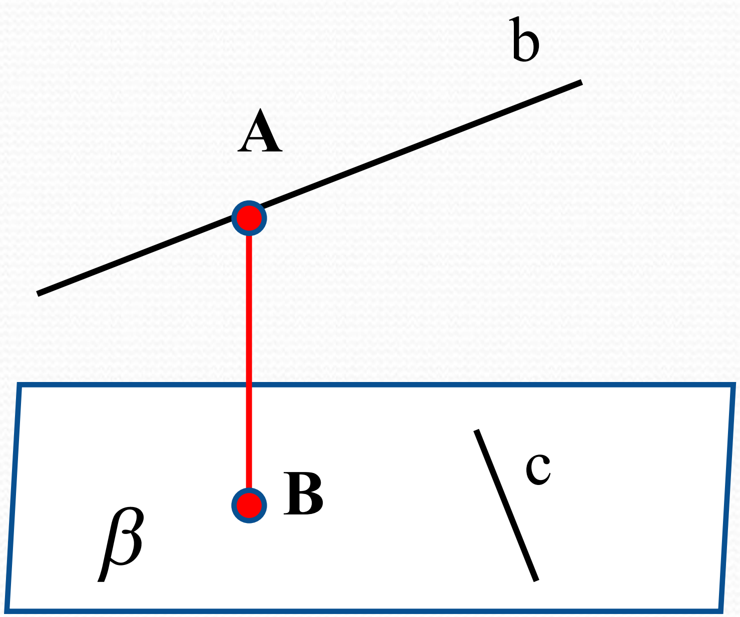
$$0\cdot x+\frac{2}{\sqrt{3}}y-z+1=0 \qquad A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\rho(A;(DC_1F_1))=\frac{\left|0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot 0+1\right|}{\sqrt{0^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через вторую прямую, параллельно первой.

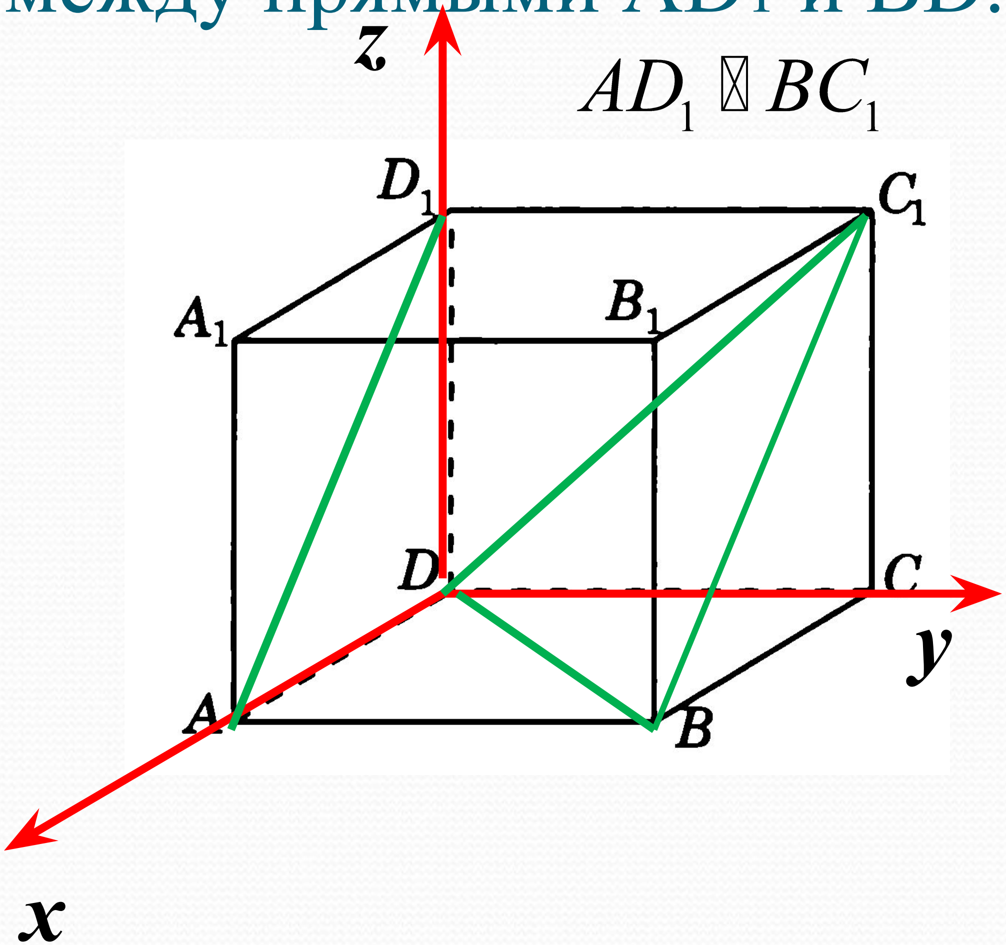


$$b \parallel \beta$$

$$\rho\left(b;c\right)=\rho\left(b;\beta\right)=\rho\left(A;\beta\right)$$

№ 1. В единичном кубе найдите расстояние между прямыми AD1 и BD.

$$AD_1 \parallel BC_1 \qquad AD_1 \parallel (DBC_1)$$



$$\rho\left(AD_1; BD\right) =$$

$$\rho\left(AD_1; \left(BDC_1\right)\right) =$$

$$\rho\left(A; \left(BDC_1\right)\right)$$

A (1; 0; 0)

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

Запишем уравнение плоскости BDC_1.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0$$

$$x - y + z = 0$$

Найдем искомое расстояние по формуле

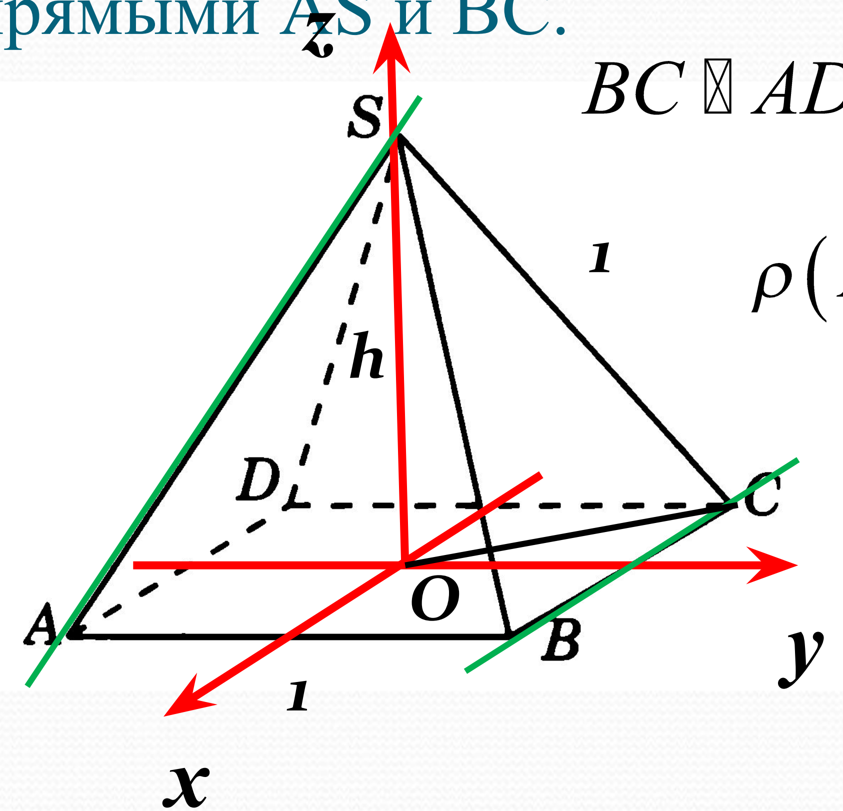
$$\rho(M;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

A (1; 0; 0) $$x - y + z = 0$$

$$\rho\left(A;(BC_1D)\right) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AS и BC.



$$BC \parallel AD \qquad BC \parallel (ADS)$$

$$\rho(AS;BC)=\rho\big(BC;(ADS)\big)=$$
$$=\rho\big(B;(ADS)\big)$$

$$AC=\sqrt{2} \qquad OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ $S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$D\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$

Запишем уравнение плоскости ADS.

$$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{2}-b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2d \\ c = -\sqrt{2}d \end{cases}$$

$$0 \cdot x + 2dy - \sqrt{2}dz + d = 0 \quad \Big/ : d$$

$$0 \cdot x + 2y - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

Найдем искомое расстояние по формуле

$$\rho\left(M;\alpha\right) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

$$\rho\left(B;(ASD)\right) = \frac{\left|0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$