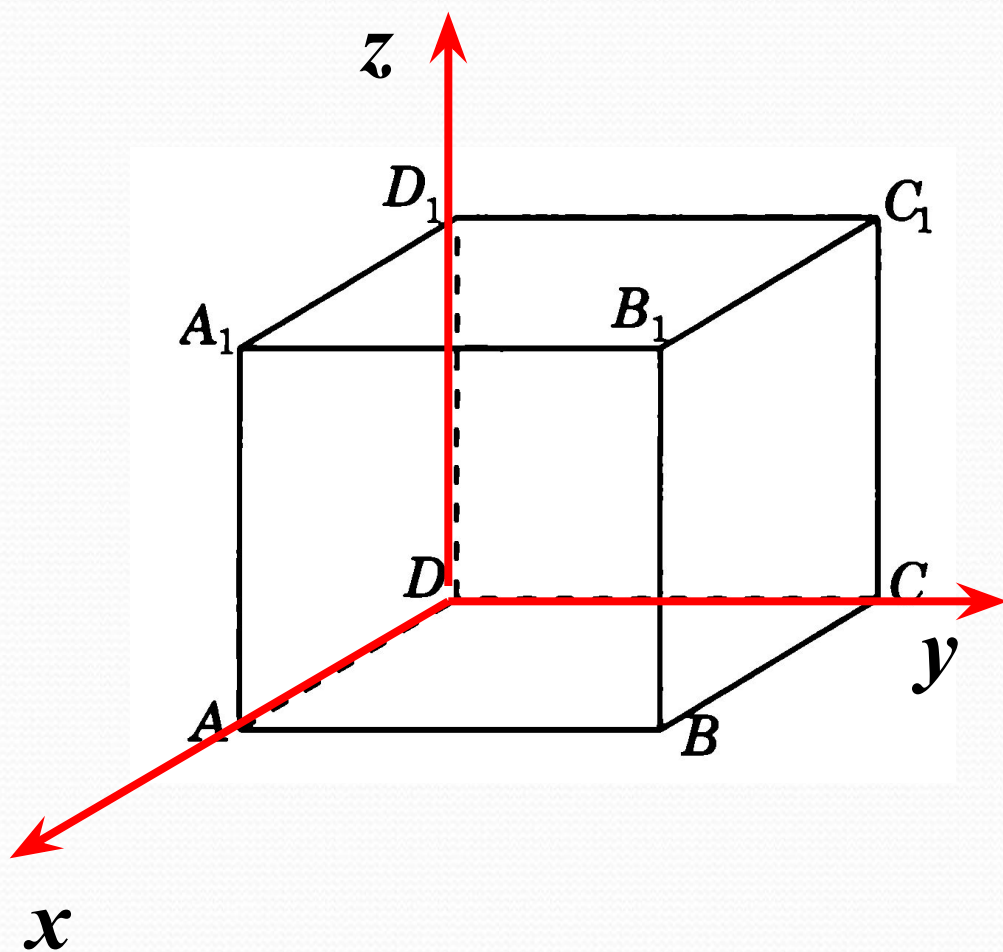


Координаты многогранников.

ЕДИНИЧНЫЙ КУБ.



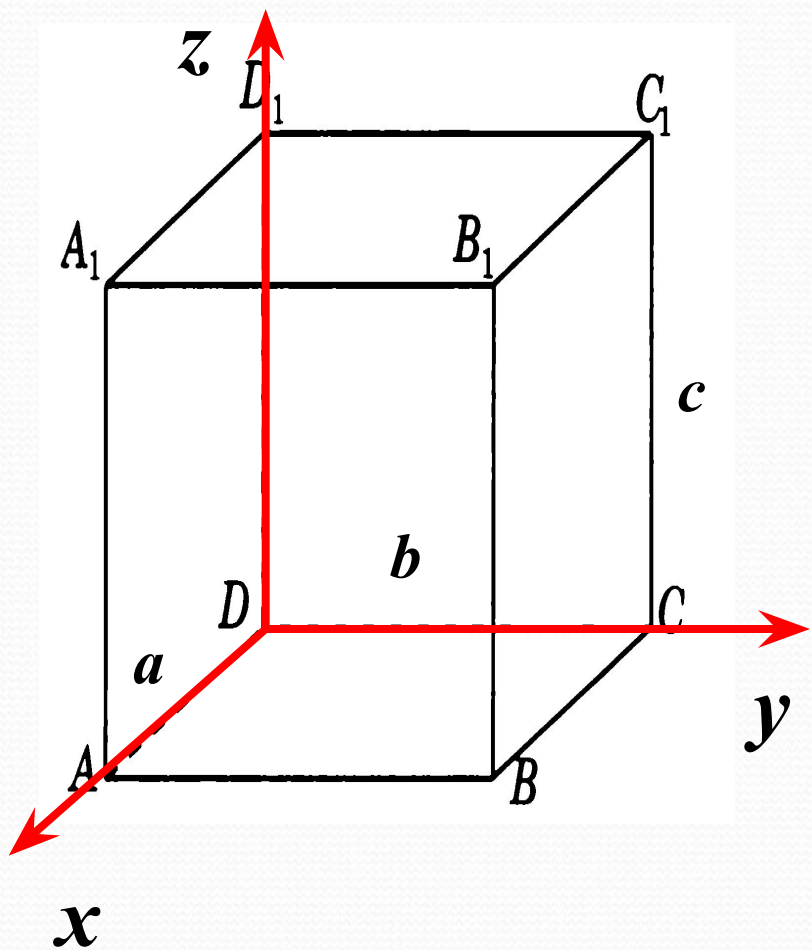
$D(0; 0; 0)$ $D_1(0; 0; 1)$

$A(1; 0; 0)$ $A_1(1; 0; 1)$

$C(0; 1; 0)$ $C_1(0; 1; 1)$

$B(1; 1; 0)$ $B_1(1; 1; 1)$

Прямоугольный параллелепипед.



$D(0; 0; 0)$

$D_1(0; 0; c)$

$A(a; 0; 0)$

$A_1(a; 0; c)$

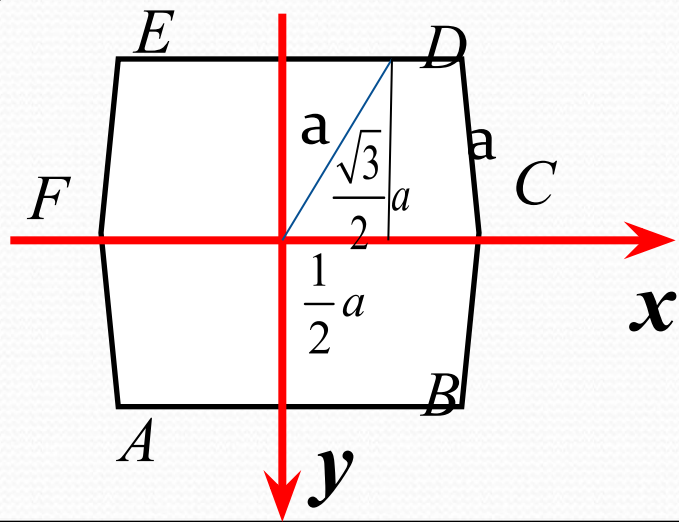
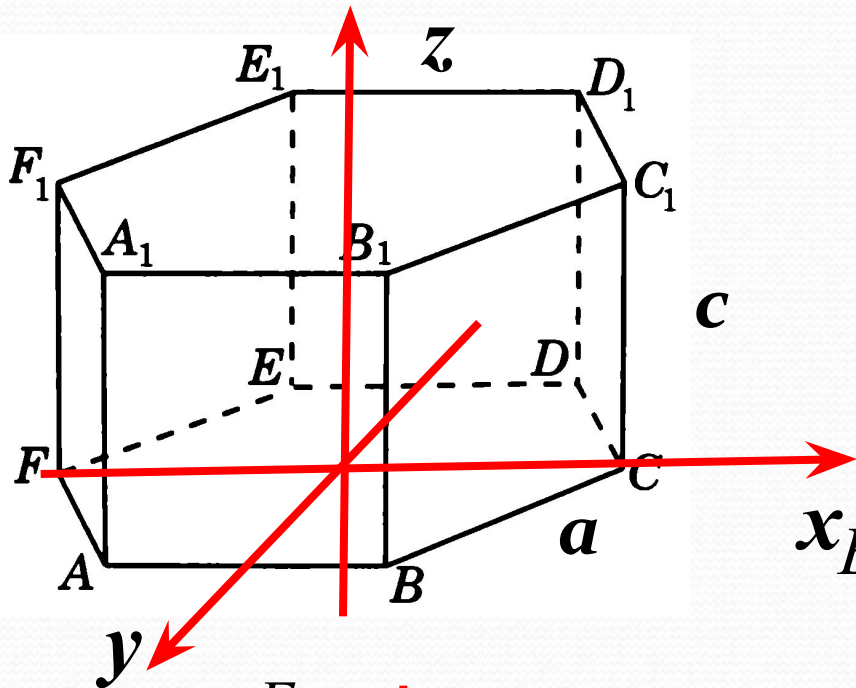
$C(0; b; 0)$

$C_1(0; b; c)$

$B(a; b; 0)$

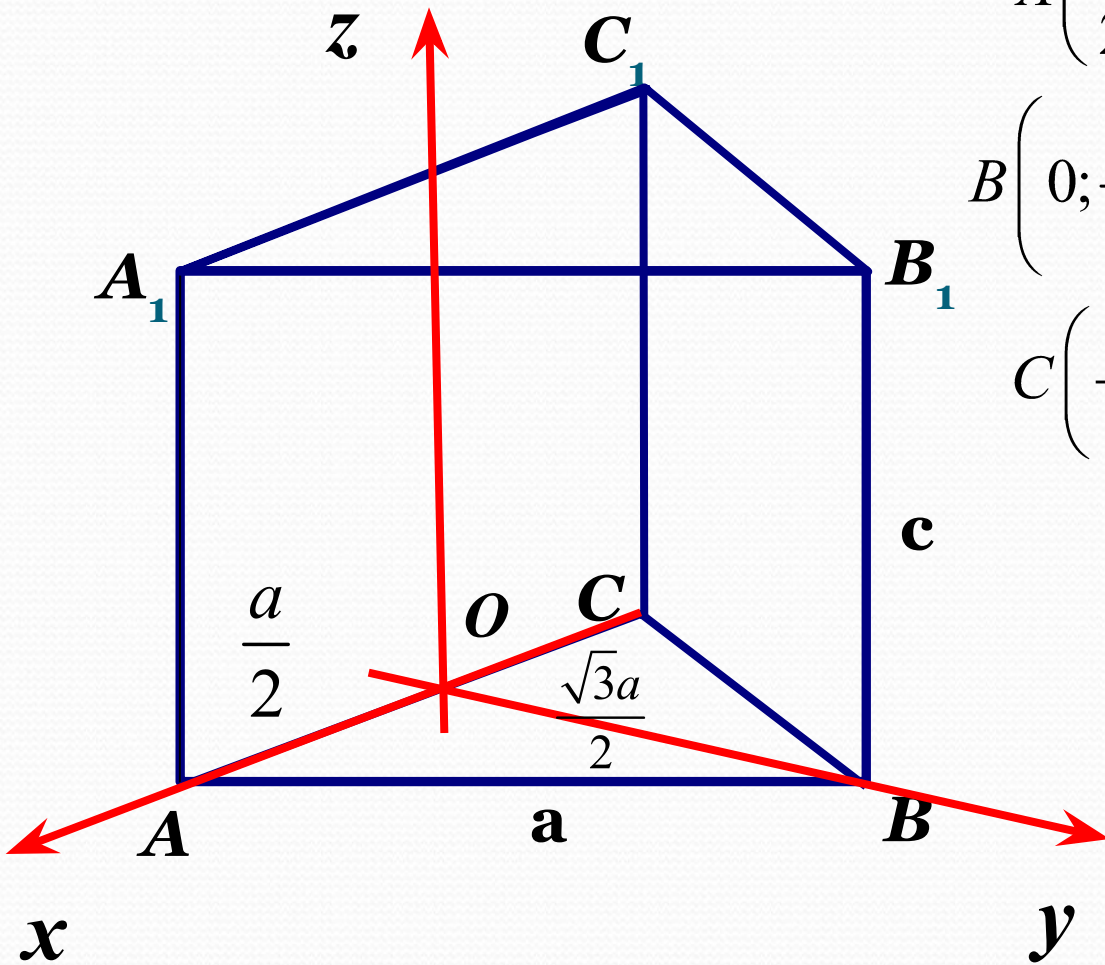
$B_1(a; b; c)$

Правильная шестиугольная призма.



$$\begin{array}{ll}
 C(a; 0; 0) & C_1(a; 0; c) \\
 F(-a; 0; 0) & F_1(-a; 0; c) \\
 D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & D_1\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right) \\
 E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & E_1\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right) \\
 A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & A_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right) \\
 B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & B_1\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)
 \end{array}$$

Правильная треугольная призма.



$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$A_1\left(\frac{a}{2}; 0; c\right)$$

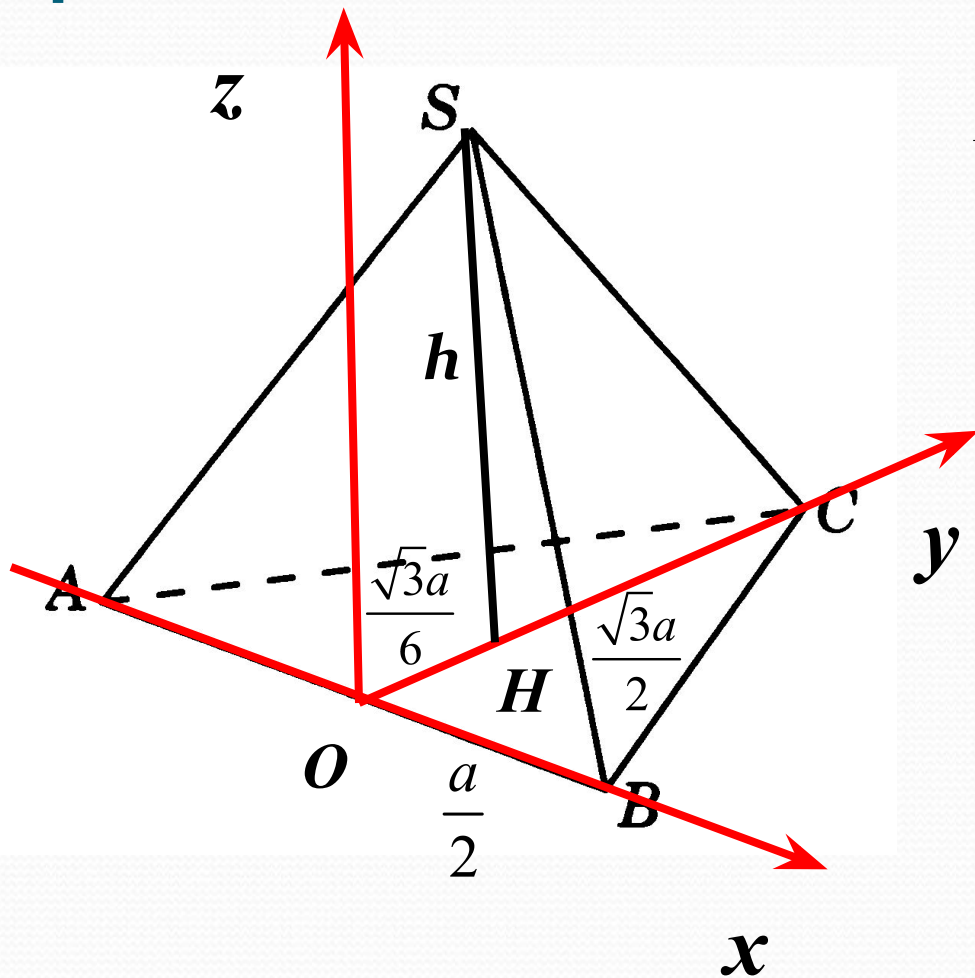
$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$B_1\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$C_1\left(-\frac{a}{2}; 0; c\right)$$

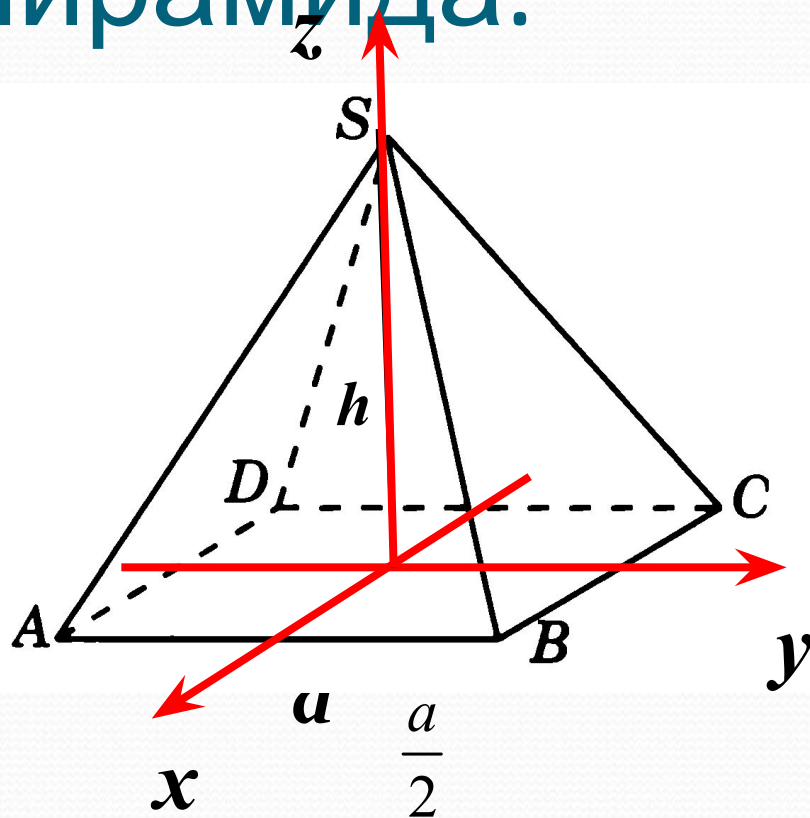
Правильная треугольная пирамида.



$$B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \quad C\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

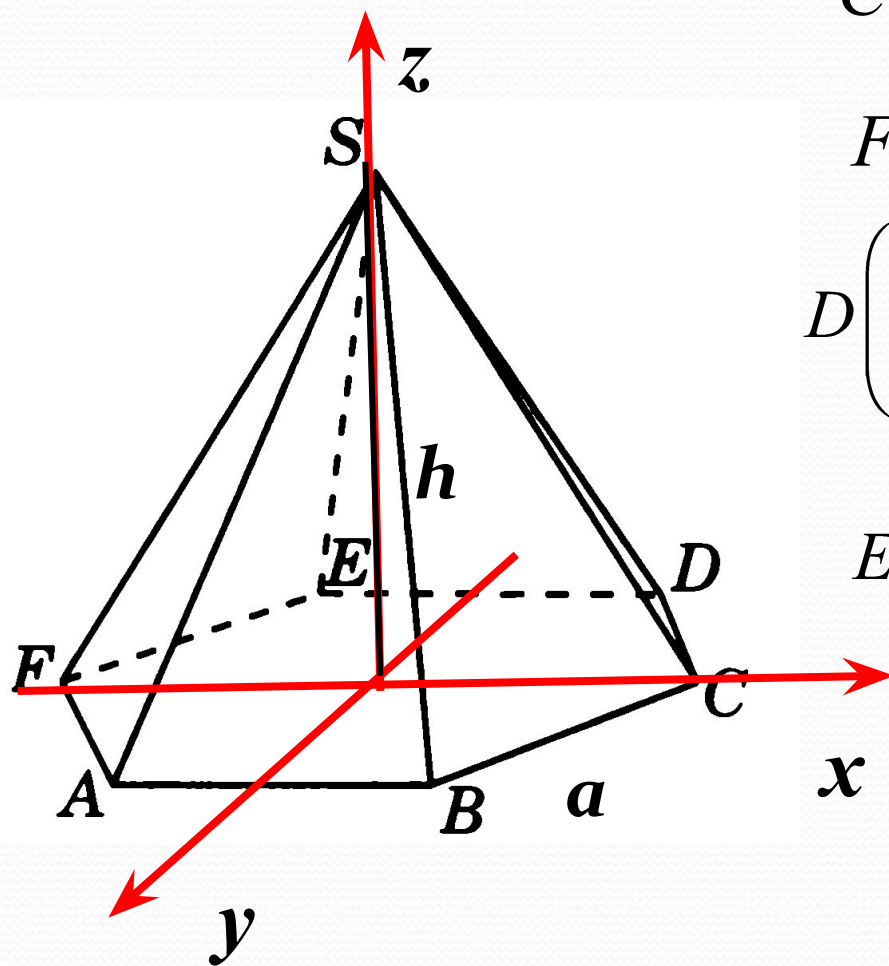
$$A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right) \quad S\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{6}; h\right)$$

Правильная четырехугольная пирамида.



$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \quad A\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$
$$C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \quad S(0; 0; h)$$
$$D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

Правильная шестиугольная пирамида.



$$C(a; 0; 0) \quad A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$F(-a; 0; 0)$$

$$D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad S(0; 0; h)$$

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$
до плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Например:

$$M(-3; 1; 2)$$

$$3x + 4y - 12z + 2 = 0$$

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{27}{13}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$$M(x_m; y_m; z_m)$$

$$N(x_n; y_n; z_n)$$

$$P(x_p; y_p; z_p)$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0$$

Числа **a, b, c** находим из системы уравнений

$$\begin{cases} ax_m + by_m + cz_m + d = 0 \\ ax_n + by_n + cz_n + d = 0 \\ ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \end{cases}$$

Например: Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0;1;0)$ $N(1;0;0)$ $P(1;1;1)$

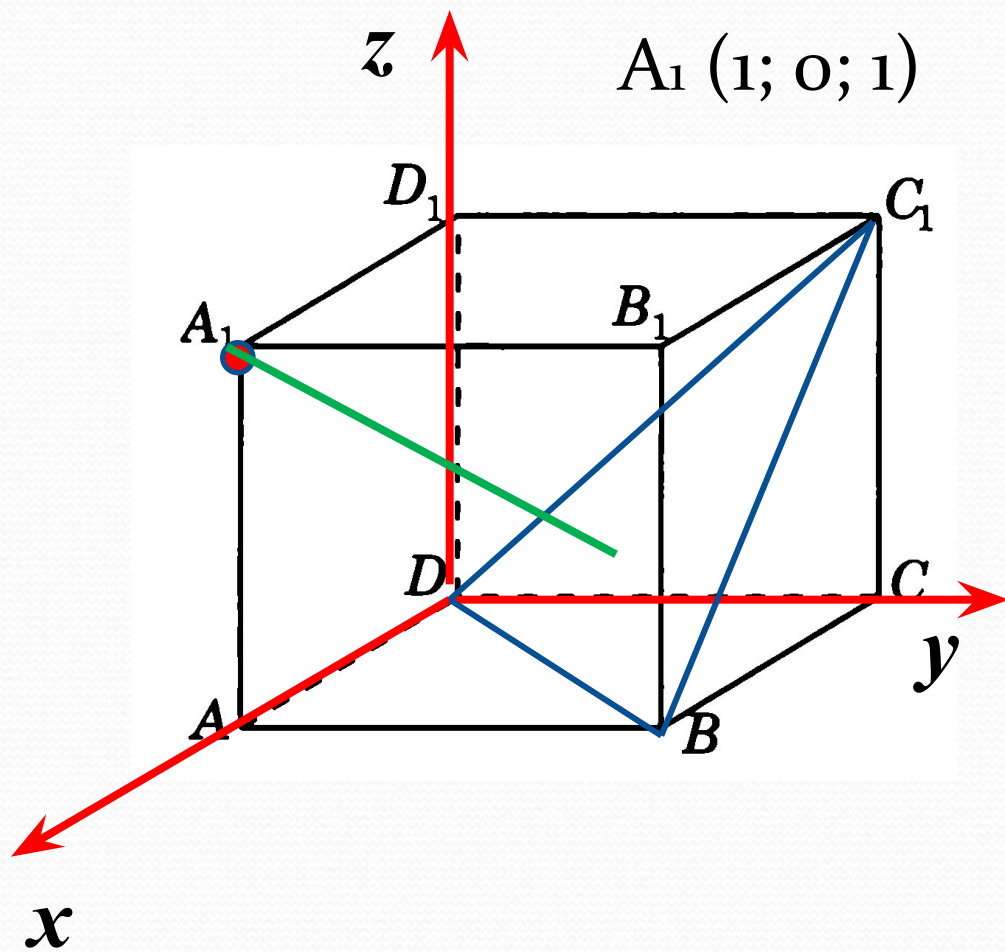
$$ax + by + cz + d = 0 \quad \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -d \\ a = -d \\ -d - d + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -d \\ a = -d \\ c = d \end{cases}$$

$$-dx - dy + dz + d = 0 \quad /: (-d)$$

$$x + y - z + 1 = 0 \quad \text{- уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.}$$

№ 1 В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости (BDC_1) .



$$A_1 (1; 0; 1)$$

$$D (0; 0; 0)$$

$$B (1; 1; 0)$$

$$C_1 (0; 1; 1)$$

Запишем уравнение плоскости DBC_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$-bx + by - bz = 0 / :(-b)$ Найдем искомое расстояние по формуле

$$x - y + z = 0$$

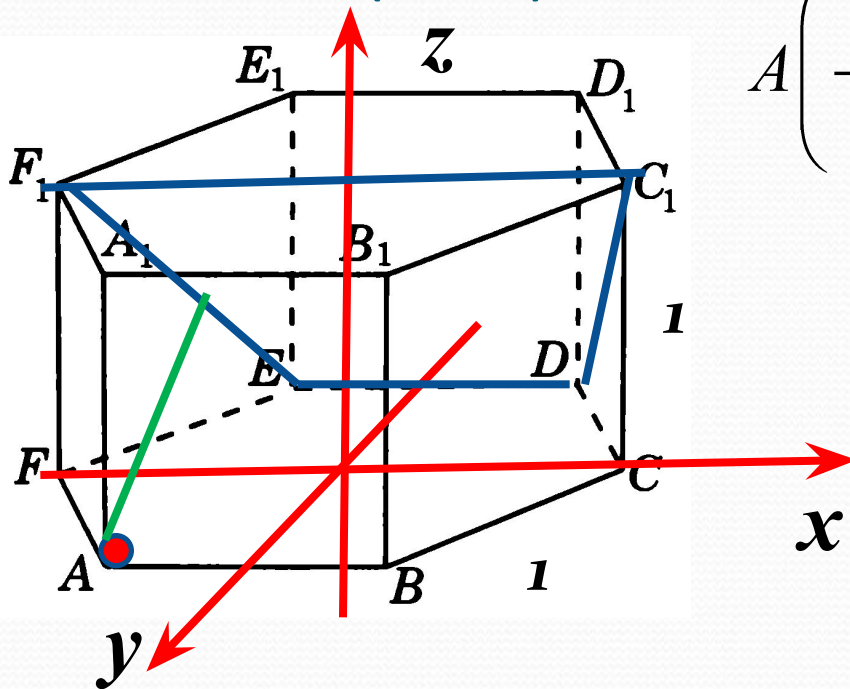
$$A_1 (1; 0; 1)$$

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho(A_1; (BC_1D)) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости (DEF_1)



$$A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$C_1 (1; 0; 1)$$

$$D \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$F_1 (-1; 0; 1)$$

Запишем уравнение плоскости DC_1F_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{a + c + d = 0} \\ \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ \underline{-a + c + d = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = -d \\ b = \frac{2}{\sqrt{3}}d \end{cases}$$

$$0 \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3}}dy - dz + d = 0 \quad / : d$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}y - z + 1 = 0$$

Найдем искомое

расстояние по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

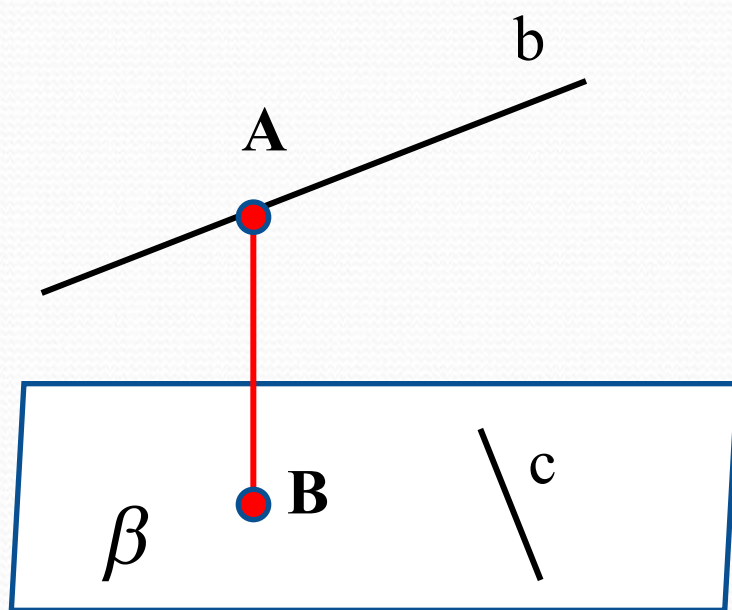
$$0 \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3}} y - z + 1 = 0 \quad A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\rho\left(A; (DC_1F_1)\right) = \frac{\left|0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

**Расстояние между
скрещивающимися
прямыми.**

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через вторую прямую, параллельно первой.



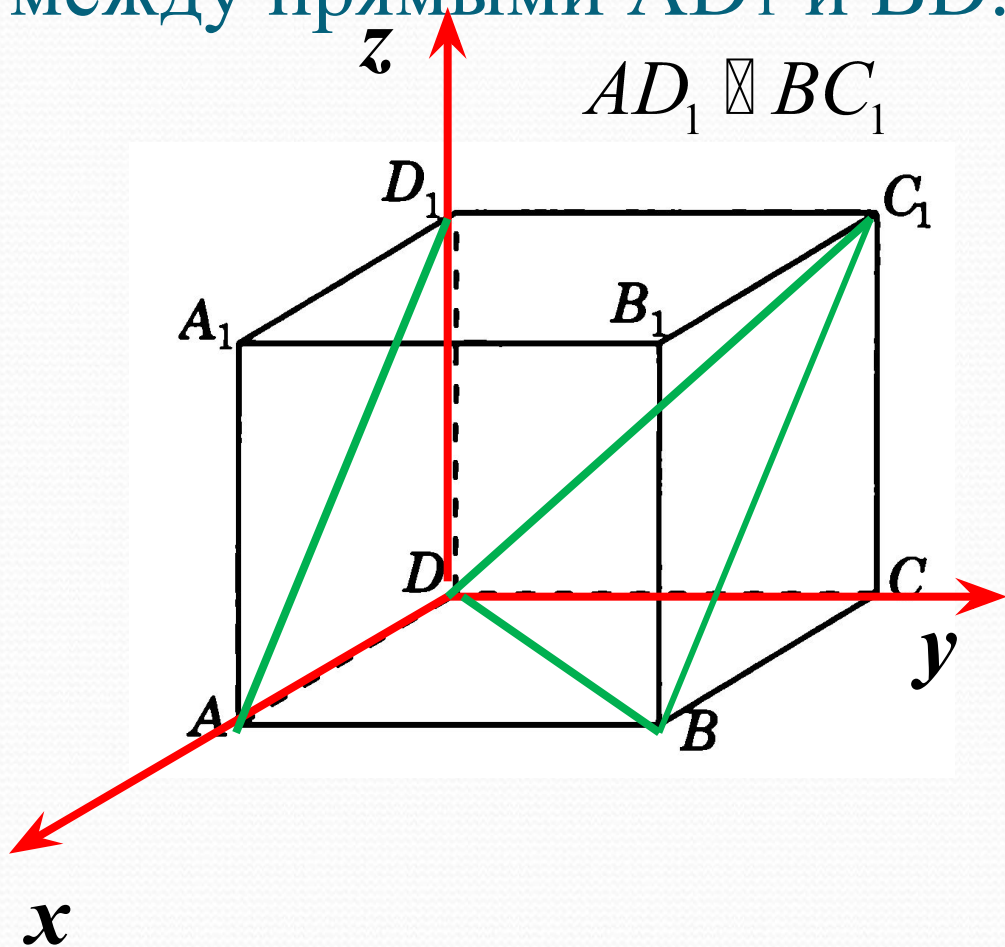
$$b \boxtimes \beta$$

$$\rho(b; c) = \rho(b; \beta) = \rho(A; \beta)$$

№ 1. В единичном кубе найдите расстояние между прямыми AD_1 и BD .

$$AD_1 \parallel BC_1$$

$$AD_1 \parallel (DBC_1)$$



$$\rho(AD_1; BD) =$$

$$\rho(AD_1; (BDC_1)) =$$

$$\rho(A; (BDC_1))$$

$$A (1; 0; 0)$$

$$D (0; 0; 0)$$

$$B (1; 1; 0)$$

$$C_1 (0; 1; 1)$$

Запишем уравнение
плоскости BDC_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0$$

$$x - y + z = 0$$

Найдем искомое
расстояние по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

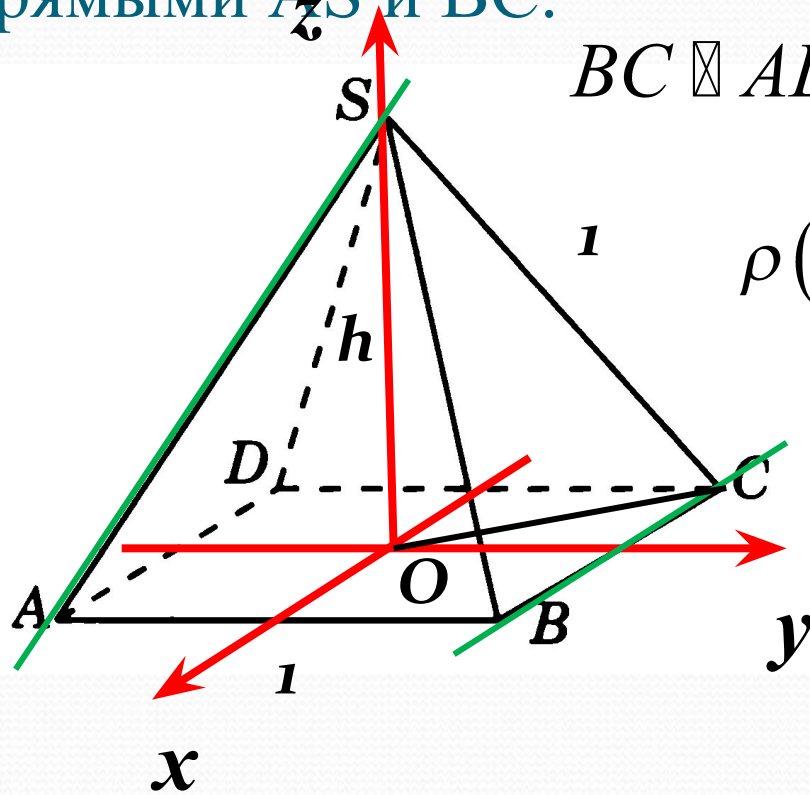
$A(1; 0; 0)$

$$x - y + z = 0$$

$$\rho(A; (BC_1D)) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AS и BC .



$$BC \parallel AD$$

$$BC \parallel (ADS)$$

$$\begin{aligned} \rho(AS; BC) &= \rho(BC; (ADS)) = \\ &= \rho(B; (ADS)) \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{2} \quad OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \quad S\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$

Запишем уравнение
плоскости ADS.

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} - b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + d = 0 \\ \hline -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + d = 0 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2}c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2d \\ c = -\sqrt{2}d \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \cdot x + 2dy - \sqrt{2}dz + d = 0 \quad | : d \\ 0 \cdot x + 2y - \sqrt{2}z + 1 = 0 \end{cases}$$

Найдем искомое расстояние по формуле $\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$\rho\left(B; (ASD)\right) = \frac{B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\left|0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$