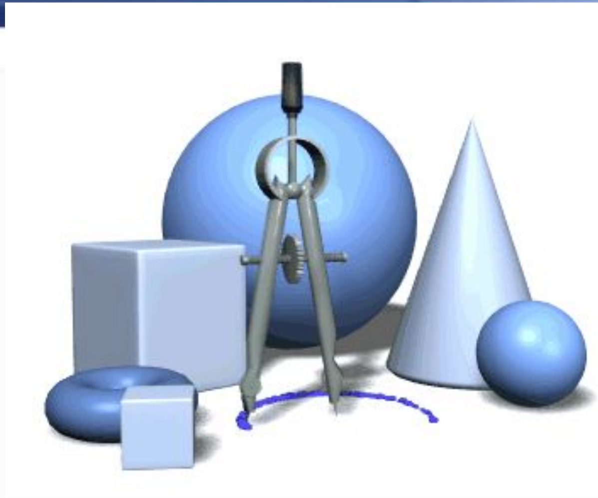


Готовимся к ЕГЭ.
Задача С2.
Задачи, где присутствует построение сечения

Основная волна (июнь – Центр)

Основная волна (июнь – Сибирь)

Вторая волна (резервный день)

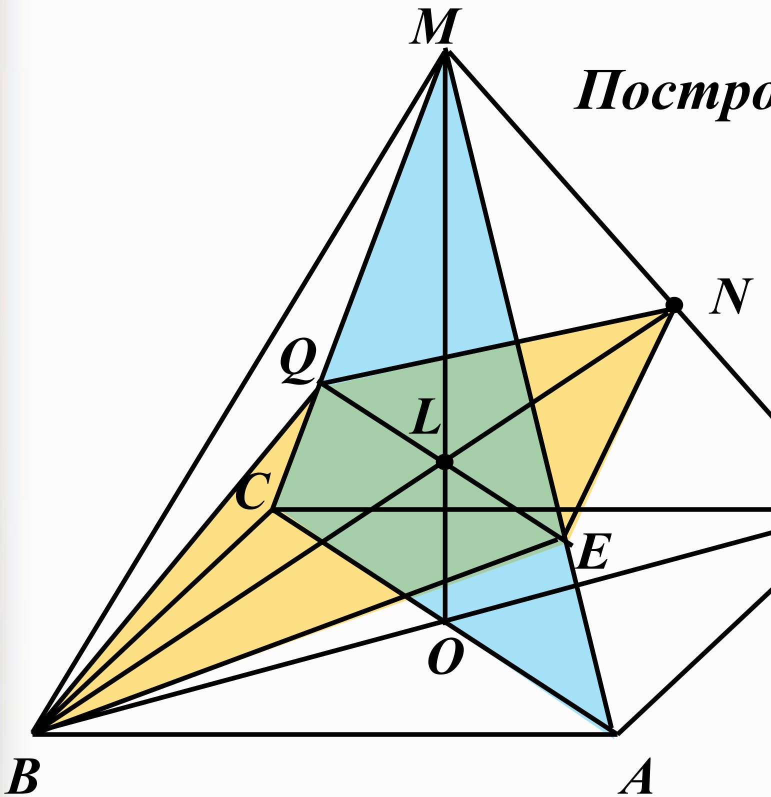
Задачи из тренировочных работ 2013-2014 (alexlarin.net)

1 2 3 4

Критерии.

Обоснованно получен правильный ответ (2 балла).
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано (1 балл).
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше (0 баллов).
Максимальный балл 2

В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Решение:

Построим сечение пирамиды плоскостью α.

$$BN \cap (CMA) = L(\in MO)$$

(CMA) проходит через прямую AC, параллельную α и пересекает α => линия пересечения плоскостей (CMA) и α параллельна AC.

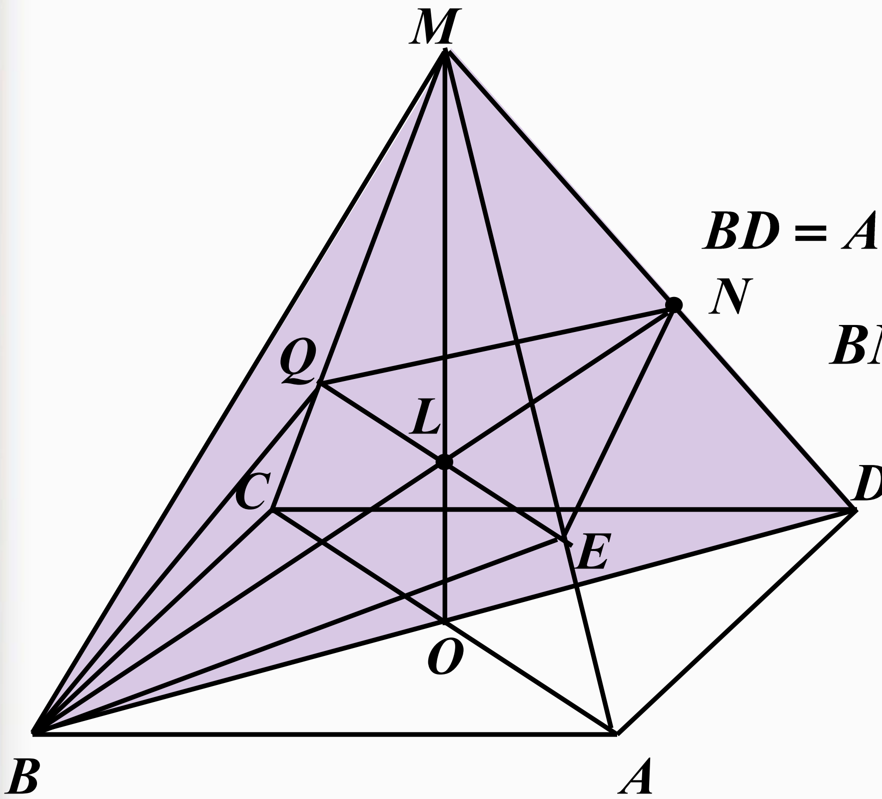
Д. п.: через точку L проведем QE||AC.

Четырехугольник BQNE – искомое сечение.

Задачи

В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение:



$$BD = AC = 3\sqrt{2}$$ (диагональ квадрата)

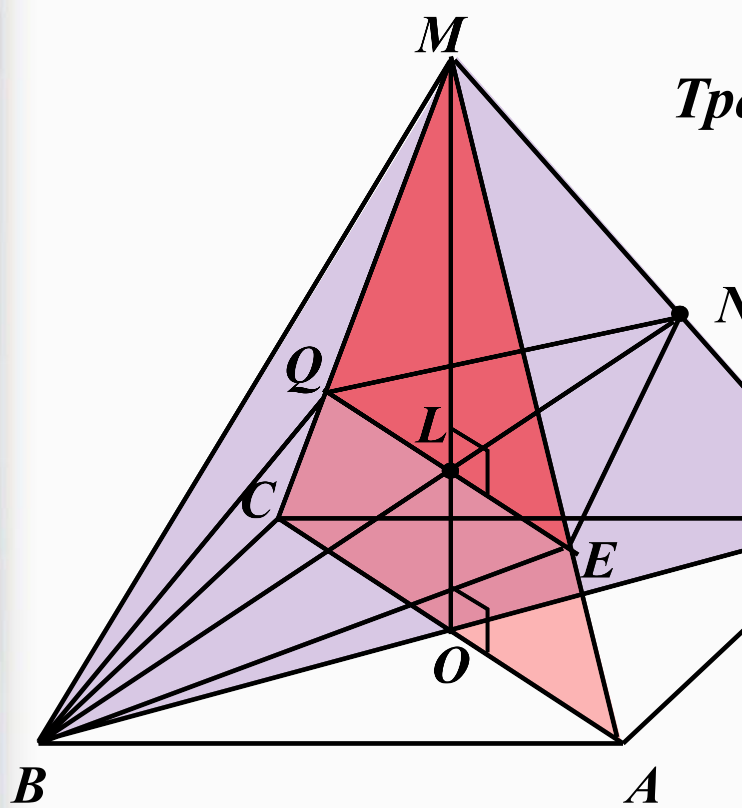
BN медиана треугольника BMD =>

$$BN = \frac{1}{2}\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(3\sqrt{2})^2 + 2\cdot 8^2 - 8^2} = 5$$

Задачи

В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Решение:

Треугольники CMA и OME – подобны,

MO и ML – их высоты $\Rightarrow \dfrac{AC}{QE} = \dfrac{MO}{ML}$

L – точка пересечения медиан треугольника BMD =>

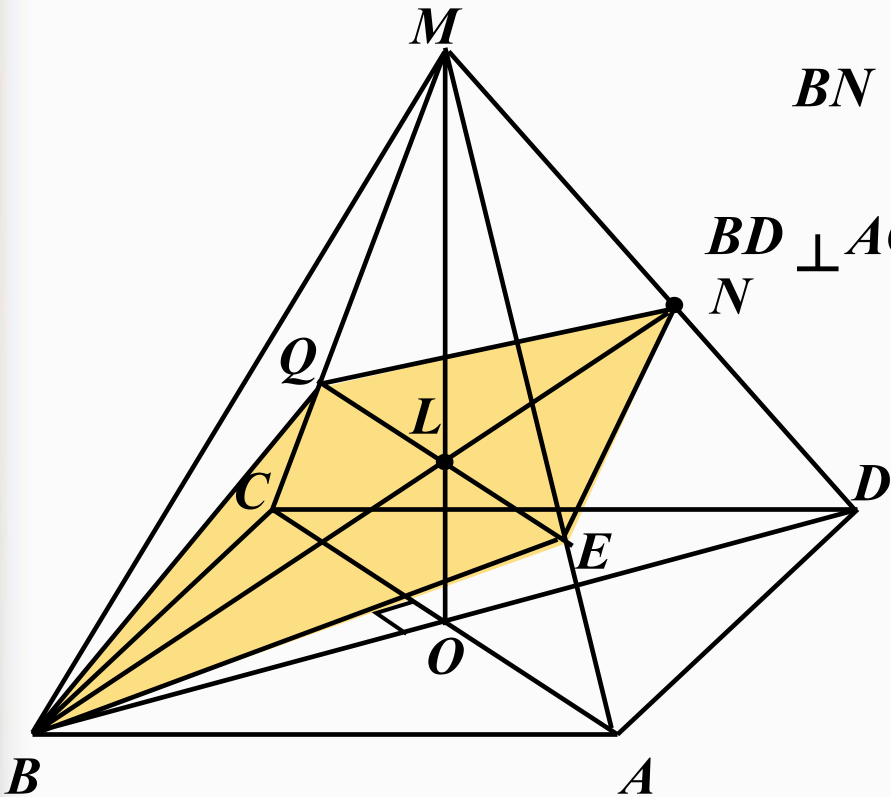
$$\Rightarrow \frac{ML}{LO} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{MO}{ML} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{QE}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{QE}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow QE = 2\sqrt{2}$$

Задачи

В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Решение:

$BN = 5 \qquad QE = 2\sqrt{2}$

$BD \perp AC$ (п-я BN на (ABD)) $\overset{ТТП}{\Rightarrow} \underset{н-я}{BN} \perp AC$

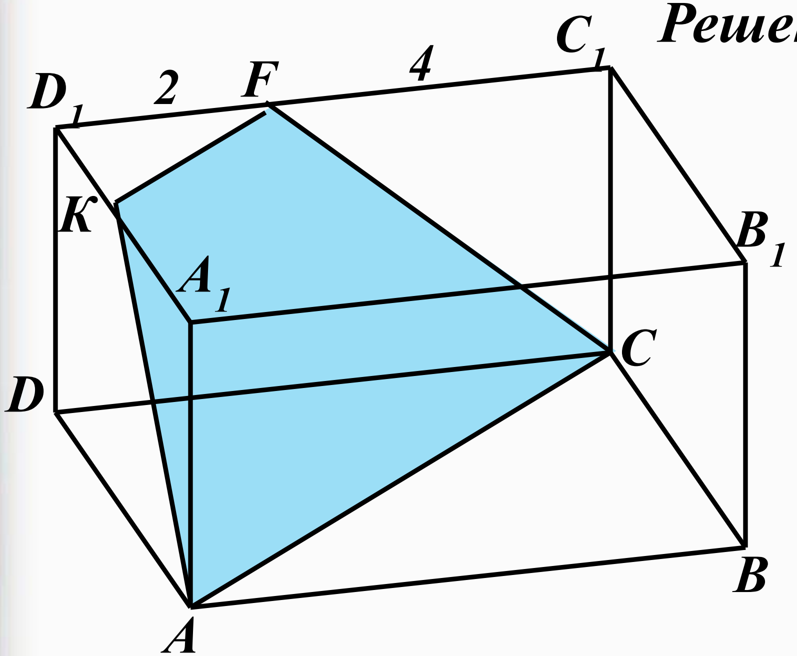
$$\left.\begin{array}{l} BN \perp AC \\ QE \parallel AC \end{array}\right| \Rightarrow BN \perp QE$$

Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot QE = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \qquad Ответ: 5\sqrt{2}$$

Задачи

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро AA_1=1. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F.



Решение:

Построим сечение.

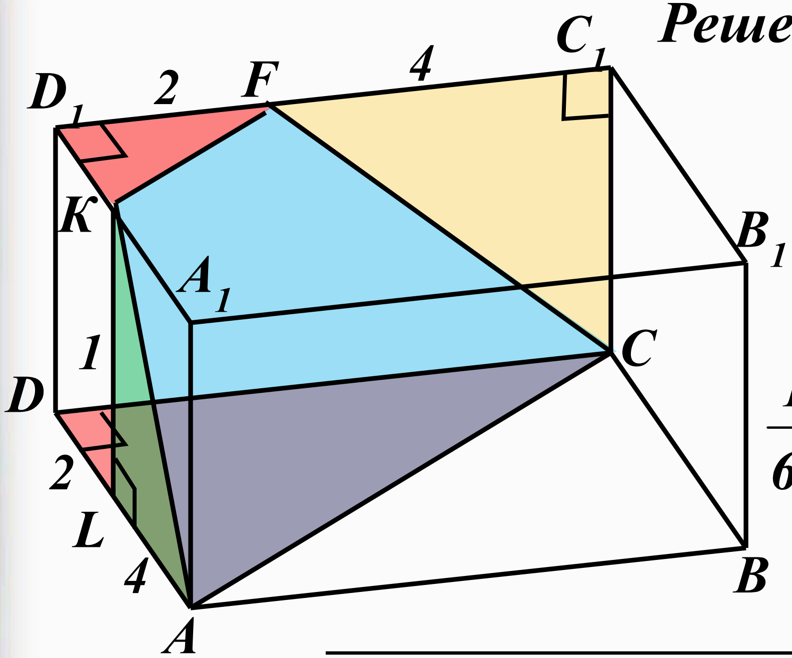
Секущая плоскость пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным прямым.

Д. п.: FK || AC.

Трапеция AKFC – искомое сечение.

Задачи

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1=1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F.



Решение: $AC=6\sqrt{2}$ *(диагональ квадрата)*

Треугольники KD_1F и ADC подобны

$$\frac{KF}{AC}=\frac{D_1K}{DA}=\frac{D_1F}{DC}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

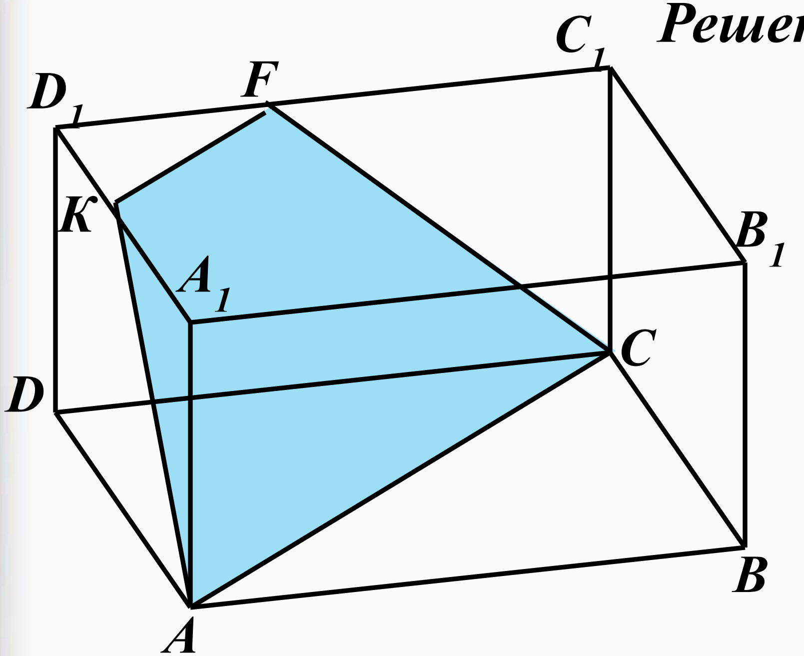
$$\frac{KF}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow KF=2\sqrt{2} \quad \Bigg| \quad \frac{D_1K}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow D_1K=2$$

Д. п.: $LK \parallel AA_1$.

Из треугольника KLA:	***Из треугольника FC_1C:***
$KA=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$	$FC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

Задачи

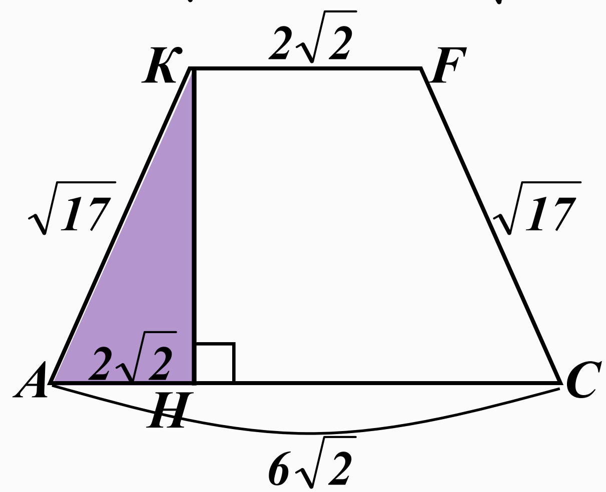
В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1=1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F.



Решение:

$AC = 6\sqrt{2}$ $\quad KF = 2\sqrt{2}$

$KA = \sqrt{17}$ $\quad FC = \sqrt{17}$



Из треугольника КНА:

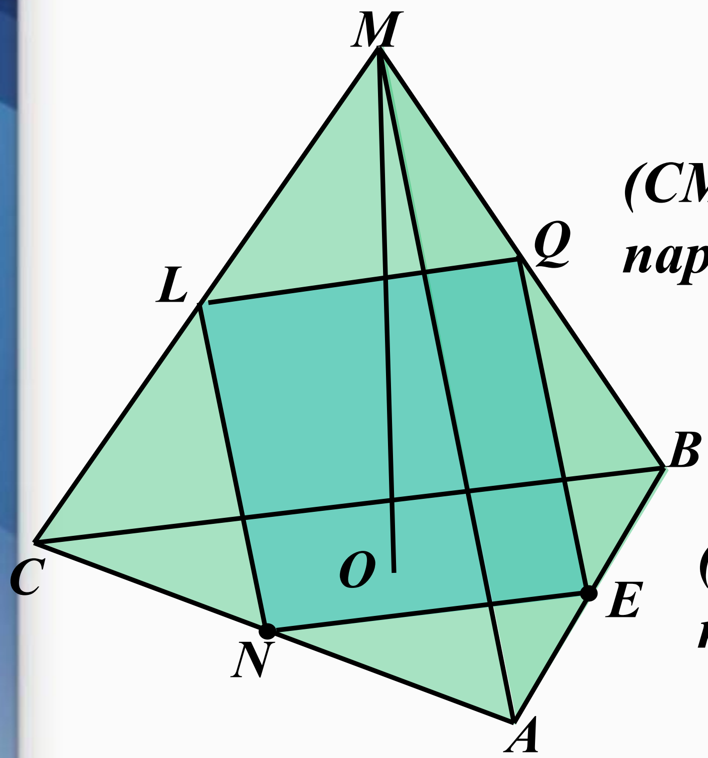
$$KH = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\Rightarrow S_{сеч} = \frac{(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2})\cdot 3}{2} = 12\sqrt{2}$$

Ответ : $12\sqrt{2}$

Задачи

В правильной треугольной пирамиде МАВС с вершиной М высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон АВ и АС параллельно прямой МА.



Решение:

Построим сечение плоскостью α.

(СМА) проходит через прямую МА, параллельную плоскости α и пересекает ее

=> линия пересечения плоскостей (СМА) и α параллельна МА.

Д. п.: NL || AM.

(ВМА) проходит через прямую МА, параллельную плоскости α и пересекает ее

=> линия пересечения плоскостей (СМА) и α параллельна МА.

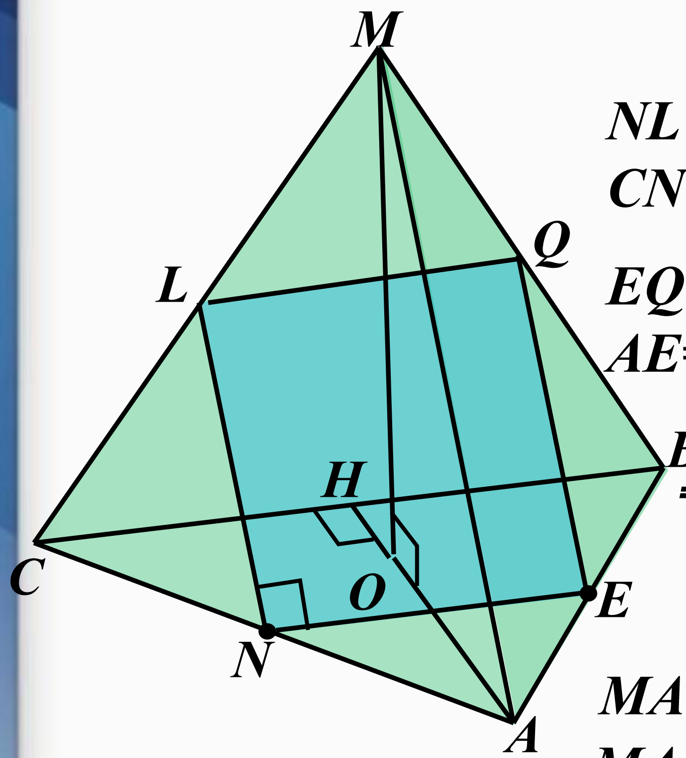
Д. п.: EQ || AM.

Четырехугольник NLQE – искомое сечение.

Задачи

В правильной треугольной пирамиде МАВС с вершиной М высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон АВ и АС параллельно прямой МА.

Т. Фалеса



Решение:

$NL \parallel AM$, $CN = NA$ $\Rightarrow$ *NL – средняя линия треугольника CMA* $\Rightarrow NL = \frac{1}{2}MA$

$EQ \parallel AM$, $AE = EB$ $\Rightarrow$ *EQ – средняя линия треугольника BMA* $\Rightarrow EQ = \frac{1}{2}MA$

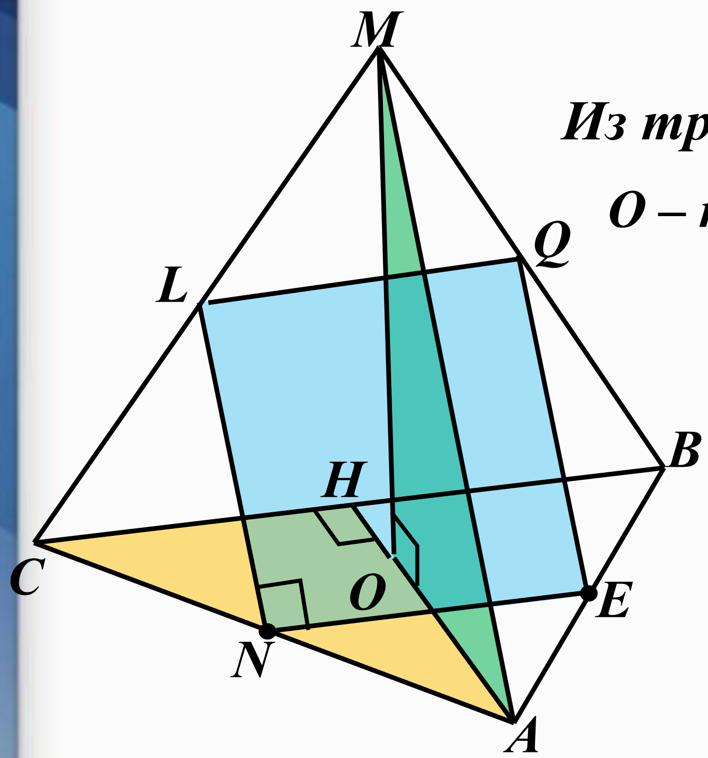
$\Rightarrow$ *NL= и || EQ* $\Rightarrow$ *NLQE – параллелограмм*

$AH \perp CB$ *(п-я MA на (ABC))* $\overset{ТТП}{\Rightarrow} \underset{н-я}{MA} \perp CB$

$MA \perp CB$, $MA \parallel NL$, $CB \parallel NE$ $\Rightarrow NL \perp NE$ => *NLQE – прямоугольник*

Задачи

В правильной треугольной пирамиде МАВС с вершиной М высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон АВ и АС параллельно прямой МА.



Решение:

Из треугольника МАО: $OA = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

О – точка пересечения медиан треугольника АВС

$$\Rightarrow \frac{AO}{OH} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AO}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Из треугольника САН:

$$AC = \frac{AH}{\cos CAH} = \frac{9\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 = CB$$

$$NE = \frac{1}{2} CB = \frac{9}{2} \qquad LN = \frac{1}{2} MA = 3$$

$$S_{сеч} = \frac{9}{2} \cdot 3 = 13,5$$

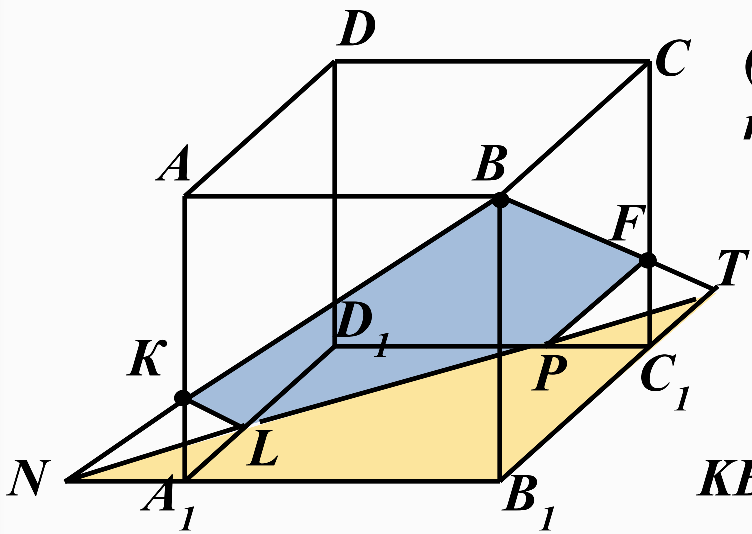
Ответ : 13,5

Задачи

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки К и F такие, что $AE=2A_1K$, $CF=2C_1F$. Через точки В,К и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

Решение:

Построим сечение куба плоскостью (KBF)



$(ABB_1)\|(DCC_1)$ => $(KBF)\cap(ABB_1)$ и (DCC_1) по параллельным прямым

Д.п.:FP || KB

$(ADD_1)\|(BCC_1)$ => $(KBF)\cap(ADD_1)$ и (BCC_1) по параллельным прямым

Д.п.:KL || BF

KBFPL – искомое сечение

Отсеченная часть – пир

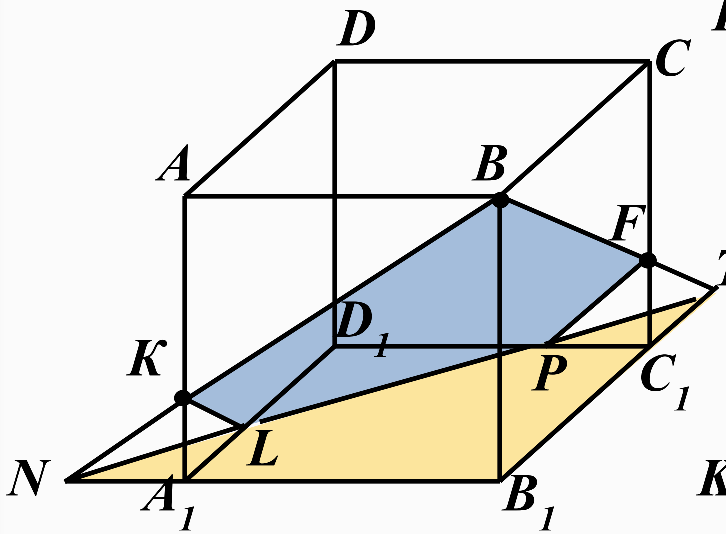
Такая идея возникнет сама собой, если построить сечение методом следов

ы равные пирамидки с основаниям

Задачи

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки К и F такие, что $AE=2A_1K$, $CF=2C_1F$. Через точки B,К и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

Решение:



Построим сечение куба плоскостью (KBF)

$BK \cap A_1B_1 = N$ (лежат в одной плоскости)

$BF \cap B_1C_1 = T$ (лежат в одной плоскости)

т. N и T $\in A_1B_1C_1$,
$NT \cap A_1D_1 = L$, $NT \cap D_1C_1 = P$

KBFPL – искомое сечение

Отсеченная часть – пирамида BNB_1D, от которой отрезаны равные пирамидки с основаниями NLA_1 и PTC_1

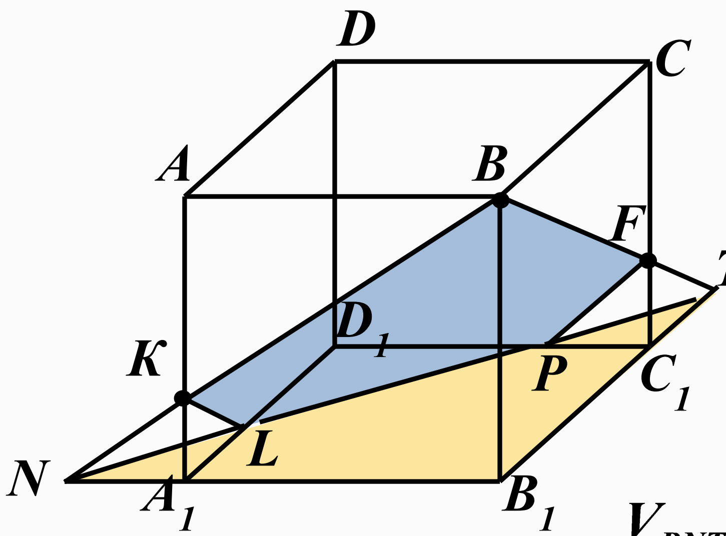
Задачи

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки К и F такие, что $AE=2A_1K, CF=2C_1F$. Через точки B, К и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

Решение:

Пусть ребро куба = 3, тогда $V_{куба} = 27$

Треугольник NBB_1 подобен треугольнику NKA_1 $k=3/1$



$$\Rightarrow NA_1 = \frac{1}{3}NB_1 \qquad NA_1 = \frac{1}{3}(NA_1 + 3)$$

$$NA_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow NB_1 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

Аналогично: $B_1T = \frac{9}{2}$

$$V_{BNTB_1} = \frac{1}{3}S_{NTB_1} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{81}{8}$$

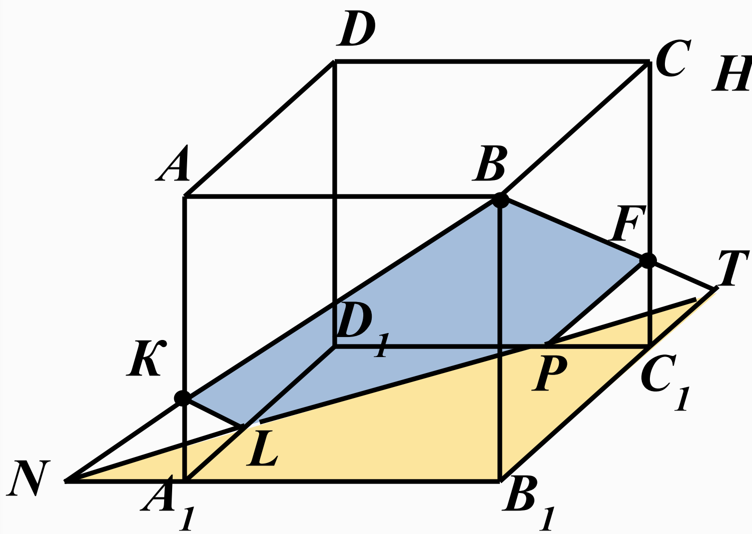
Найдем объемы маленьких равных пирамид

Задачи

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки К и F такие, что $AE=2A_1K$, $CF=2C_1F$. Через точки B,К и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

Решение:

$V_{куба} = 27 \qquad V_{BNTB_1} = \frac{81}{8}$



Найдем объемы маленьких равных пирамид

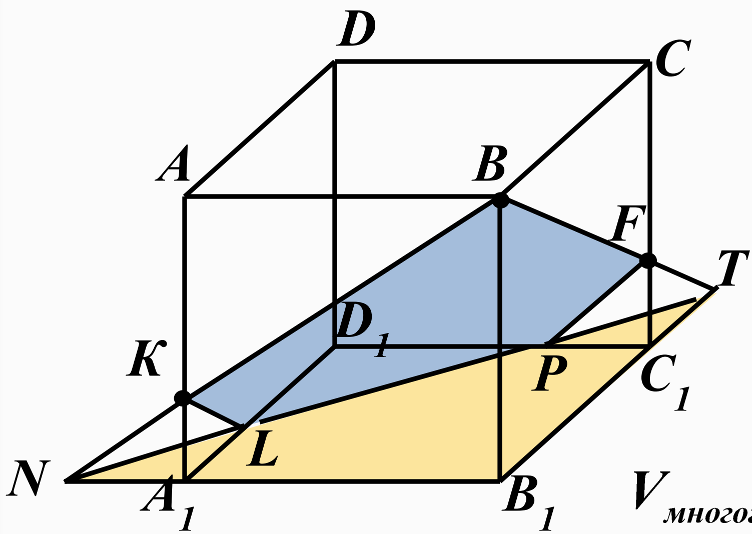
Они подобны пирамиде BNB_1T $k=3/1$

=> их объемы относятся как $k^3=27/1$

$V_{KA_1LN} = \frac{1}{27} S_{BNB_1T} = \frac{3}{8}$

Задачи

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки К и F такие, что $AE=2A_1K, CF=2C_1F$. Через точки B,K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.



Решение:

$$V_{куба}=27 \qquad V_{BNTB_1}=\frac{81}{8}$$

$$V_{мал\ \ пир}=\frac{3}{8}$$

$$V_{многогранника}=V_{BNTB_1}-V_{NA_1LK}-V_{TC_1FP}=$$

$$=\frac{81}{8}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=\frac{75}{8}$$

$$\frac{V_{многогранника}}{V_{куба}}=\frac{75}{8}:27=\frac{75}{8}\cdot\frac{1}{27}=\frac{25}{72}$$

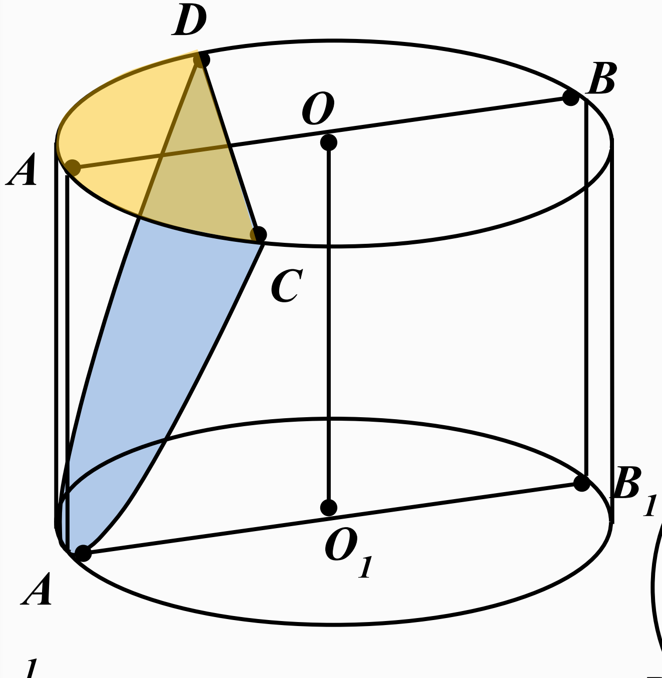
$$Ответ:\frac{25}{72}$$

Задачи

В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD, равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1, если AA_1 - образующая цилиндра.

Решение:

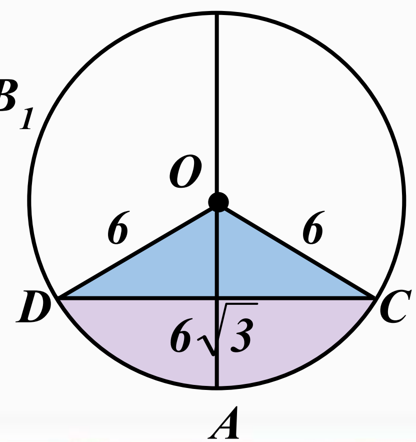
Сечением является фигура, ограниченная частью эллипса.



Сегмент круга ACD – ортогональная проекция сечения на плоскость (ADC)

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\angle((ADC);(A_1DC))}$$

Найдем площадь сегмента



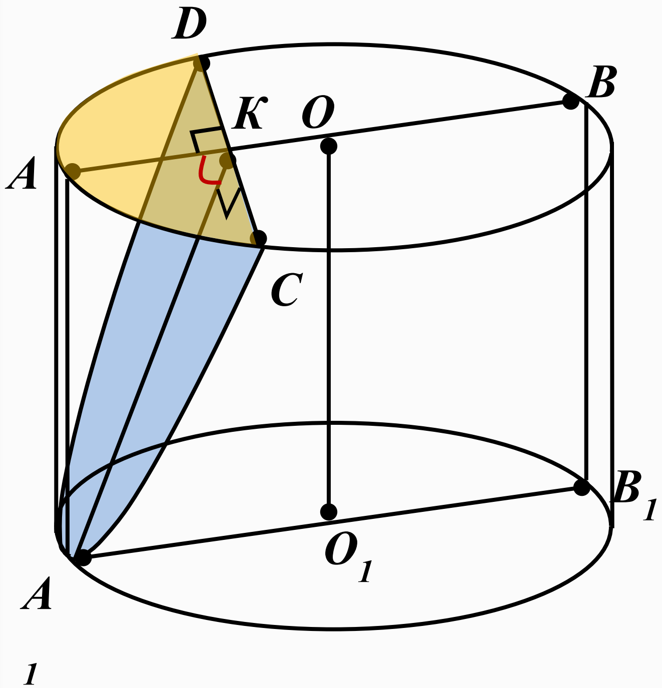
$$S_{сегм} = S_{сектора} - S_{\Delta DOC}$$

$$\cos DOC = \frac{6^2 + 6^2 - (6\sqrt{3})^2}{2\cdot 6\cdot 6} =$$

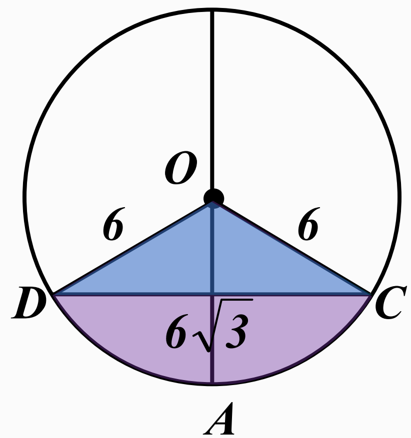
$$= -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle DOC = 120^0$$

Задачи

В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD, равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1, если AA_1 - образующая цилиндра.



Решение:



$$\angle DOC = 120^0$$

$$S_{\Delta DOC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^0 = $$
$$= 9\sqrt{3}$$

$$S_{сектора} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^0} \cdot 120^0 = $$
$$= 12\pi$$

$$S_{сегм} = S_{сектора} - S_{\Delta DOC} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

$$\text{Найдем } \cos\angle((ADC);(A_1DC))$$

$$AK \perp DC \overset{ТТП}{\Rightarrow} A_1K \perp DC \Rightarrow$$

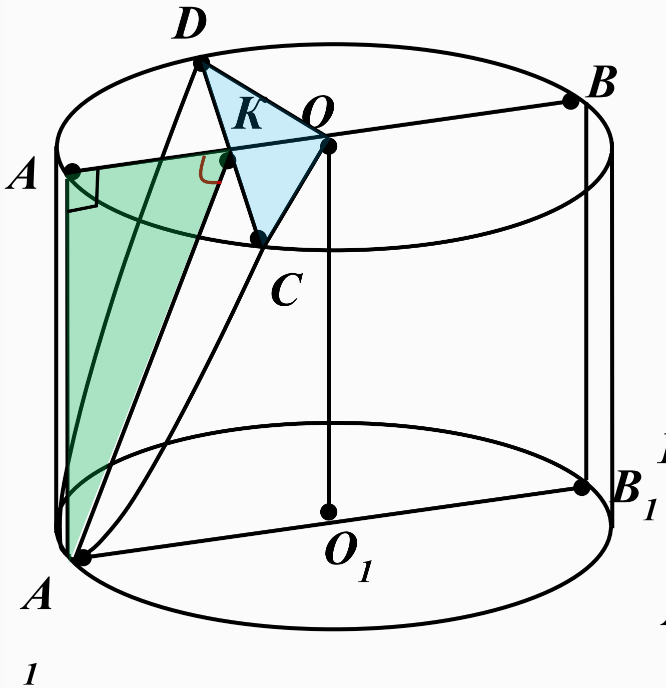
$$\Rightarrow \angle AKK_1 \text{ - линейный угол двугранного угла}$$

Задачи

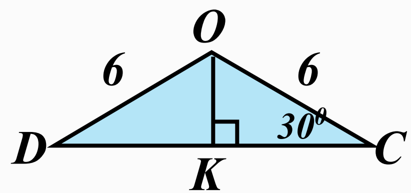
В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD, равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1, если AA_1 - образующая цилиндра.

$$S_{сегм} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

Решение:

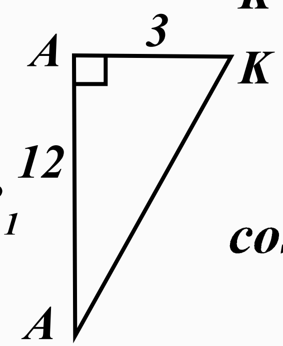


Косинус искомого угла найдем из треугольника A_1AK



$$OK = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = 6 - 3 = 3$$



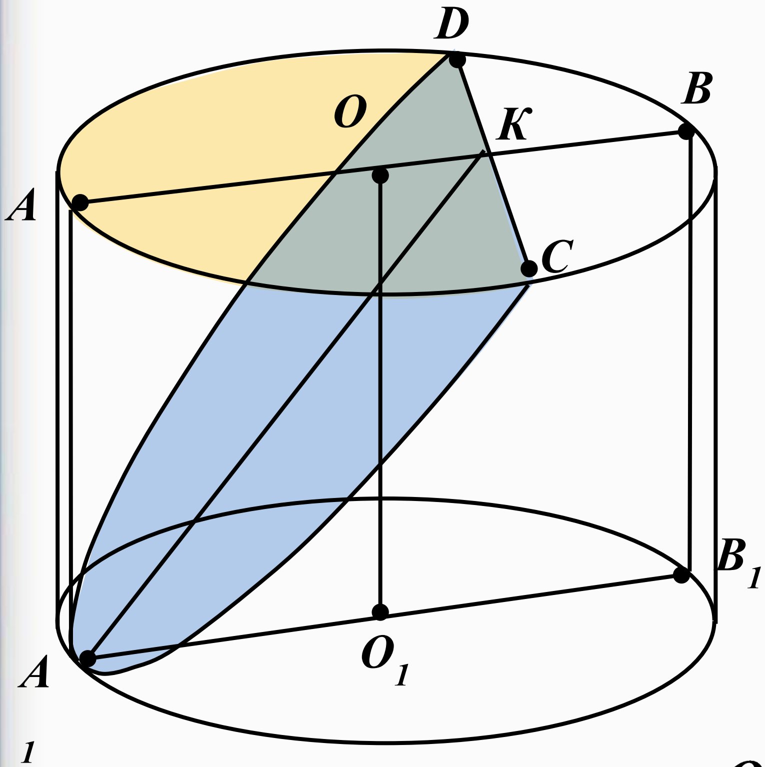
$$A_1K = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$$

$$\cos AKK_1 = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos AKK_1} = \sqrt{17}(12\pi - 9\sqrt{3}) = 3\sqrt{17}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

Задачи

В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD, равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1, если AA_1 - образующая цилиндра.



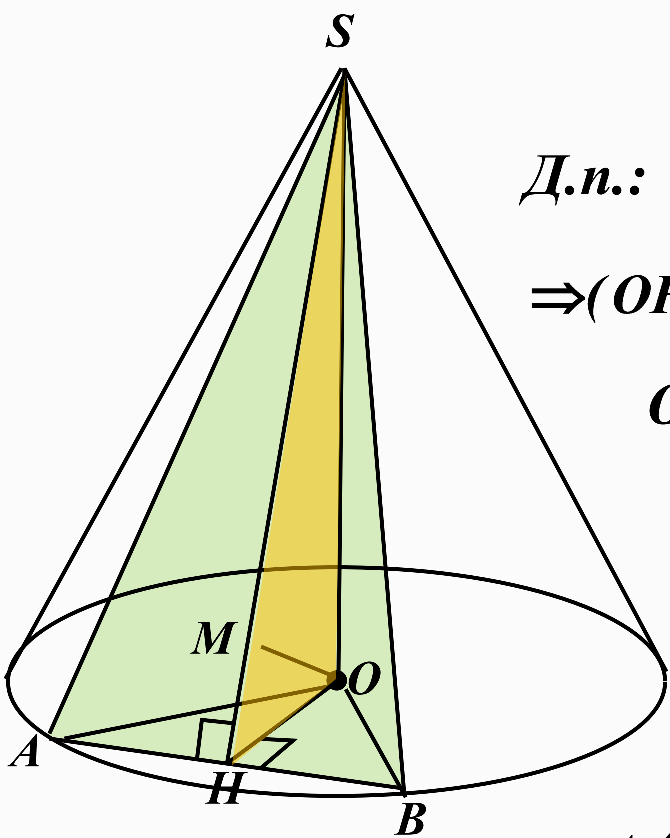
Решение:

Решение второго случая (хорда пересекает диаметр между точками O и B) аналогично.

Ответ : $3\sqrt{17}(4\pi - 3\sqrt{3}); 5(8\pi + 3\sqrt{3})$

Задачи

Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.



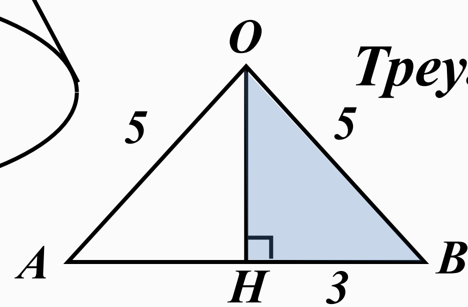
Решение:

Д.п.: $OH \perp AB \overset{ТТП}{\Rightarrow} SH \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (OHS) \perp (ASB) \Rightarrow \ \rho(O;(ASB)) = OM \perp SH$

OM найдем из треугольника SOH

SO=12, найдем OH

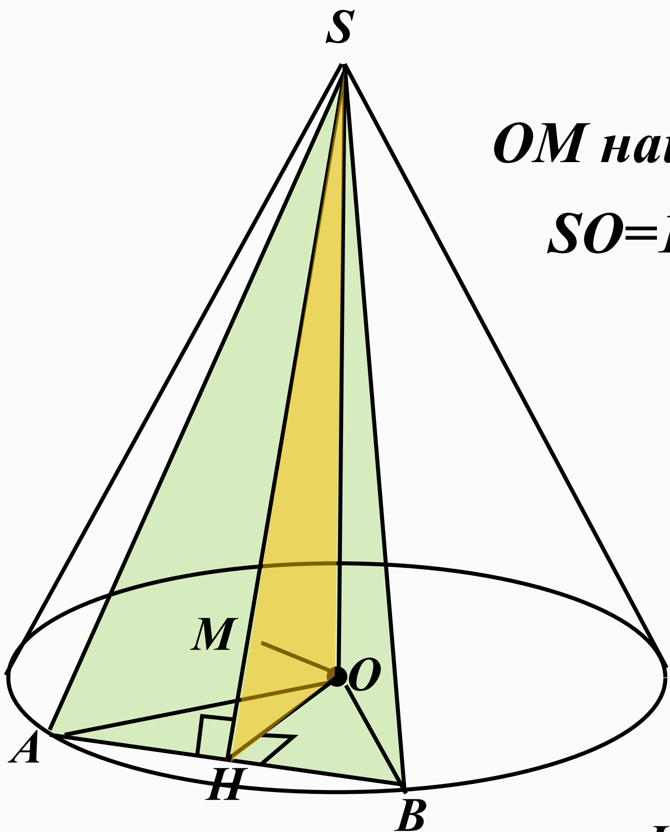


Треугольник OHB – египетский

OH = 4

Задачи

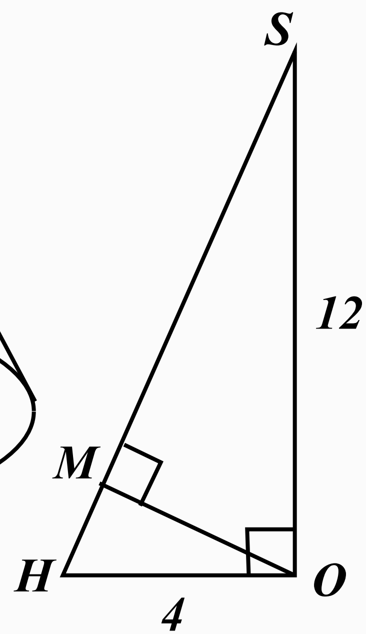
Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.



Решение:

ОМ найдем из треугольника SOH

$SO=12$ $\qquad$ $OH=4$



$$SH=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$$

$$S_{SHO}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4=24$$

$$S_{SHO}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot SH=24$$

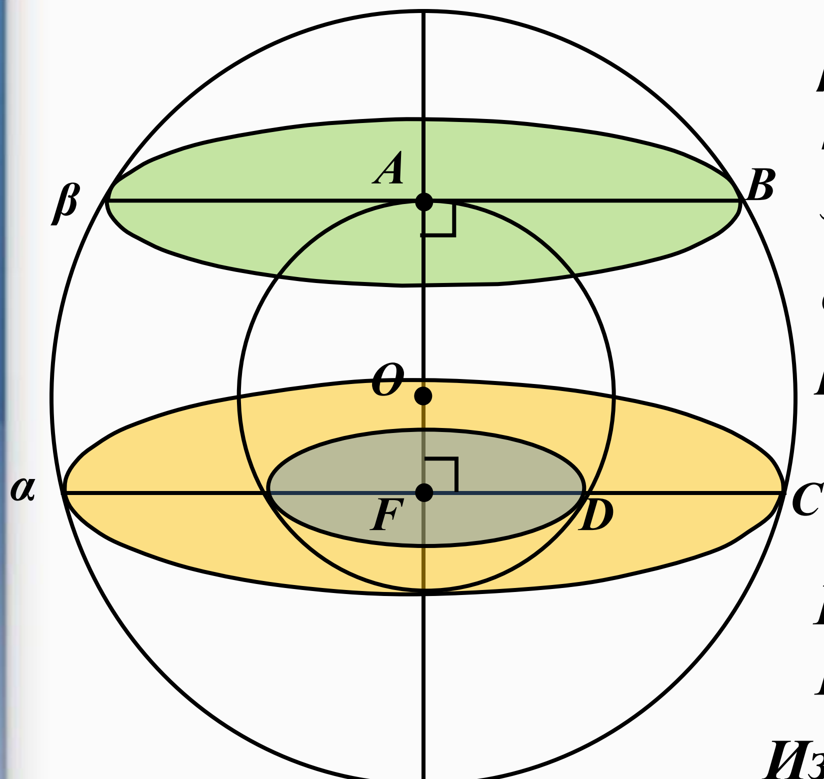
$$\frac{1}{2}\cdot OM\cdot 4\sqrt{10}=24$$

Ответ : $OM=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$

Задачи

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение:



β касательная малого шара => перпендикулярна его радиусу, а значит и радиусу большого шара

α║β, а значит тоже перпендикулярна радиусу малого и большого шара

$$S_{большого\,\alpha} = \pi \cdot FC^2$$

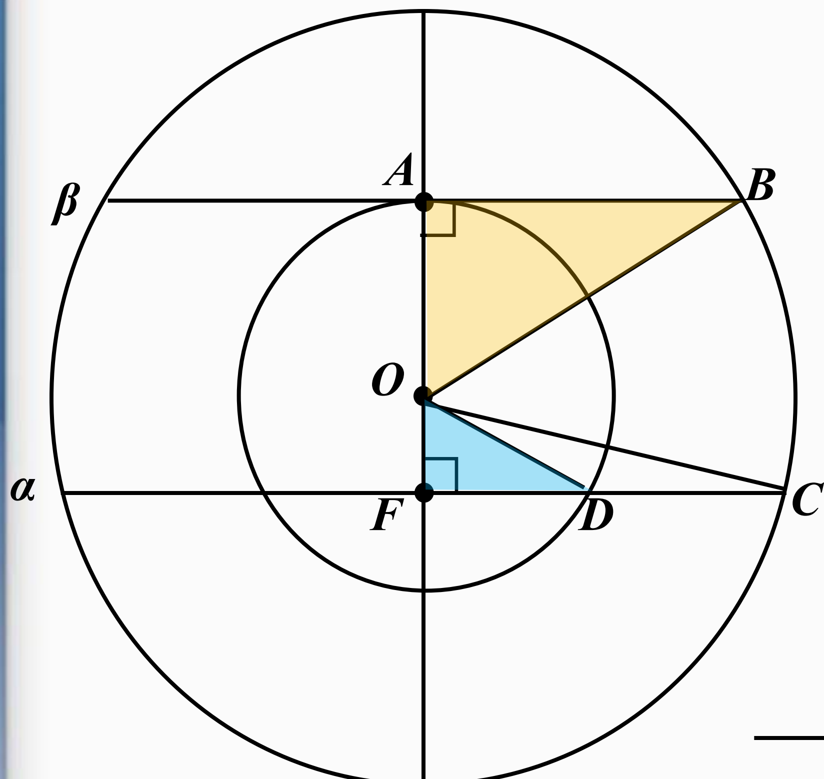
В задаче нам важны радиусы сечений FD, FC, AB

Избавимся от лишнего в чертеже

Назад

Задачи

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.



Решение:

$$S_{большого\alpha} = \pi \cdot FC^2$$

$$S_{малого\alpha} = \pi \cdot FD^2 = 7 \Rightarrow FD^2 = \frac{7}{\pi}$$

$$S_{большого\beta} = \pi \cdot AB^2 = 5 \Rightarrow AB^2 = \frac{5}{\pi}$$

$AO = OD$ - радиусы малого шара

$OB = OC$ - радиусы большого шара

$$\Delta AOB : AO^2 = OB^2 - AB^2$$

$$\Delta FOD : OD^2 = OF^2 + FD^2$$

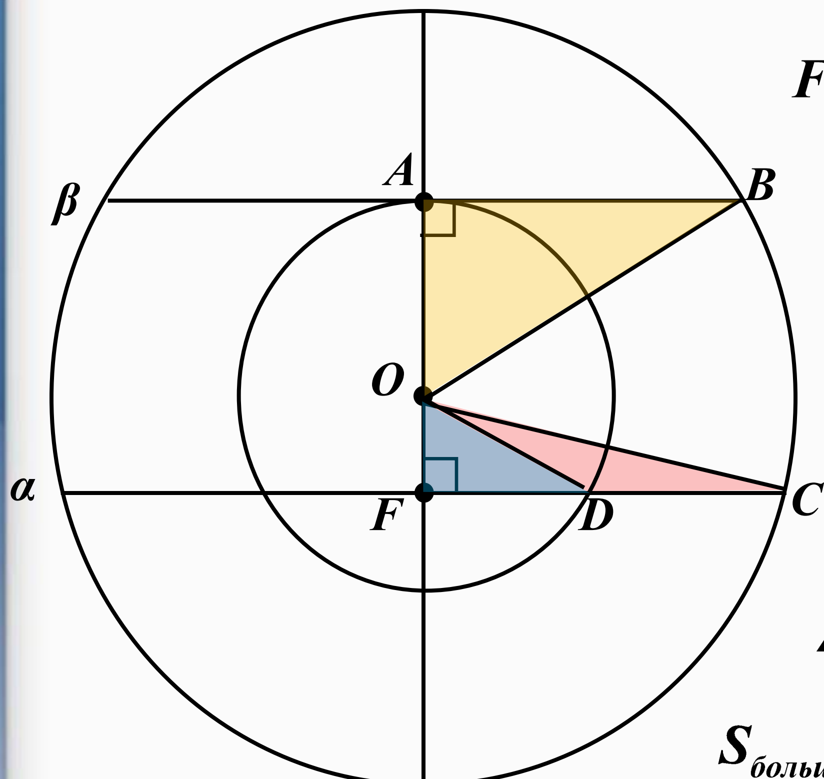
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow OB^2 - AB^2 = OF^2 + FD^2$$

Стереометрический чертеж

Задачи

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.



Решение:

$$S_{большого\,\alpha}=\pi\cdot FC^2$$

$$FD^2=\frac{7}{\pi}\qquad AB^2=\frac{5}{\pi}$$

$$AO=OD$$

$$OB=OC$$

$$OB^2-AB^2=OF^2+FD^2$$

$$OC^2-\frac{5}{\pi}=OF^2+\frac{7}{\pi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC^2-OF^2=\frac{5}{\pi}+\frac{7}{\pi}=\frac{12}{\pi}$$

$$\Delta OFC:OC^2-OF^2=FC^2$$

$$S_{большого\,\alpha}=\pi\cdot FC^2=\pi\cdot\frac{12}{\pi}=12$$

Ответ : 12

Стереометрический чертеж

Задачи

Источники:

КИМ 2013

Тренировочные работы http://alexlarin.net/ege/2013/c2_2013.html