

Методы решения тригонометрических уравнений (урок-лекция)

Методическая разработка учителя математики
МБОУ "Средняя общеобразовательная школа
им. Г.В.Кравченко" г. Вуктыл

1. Решение уравнений разложением на множители

$$2 \cos 2x \cos x = \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$$

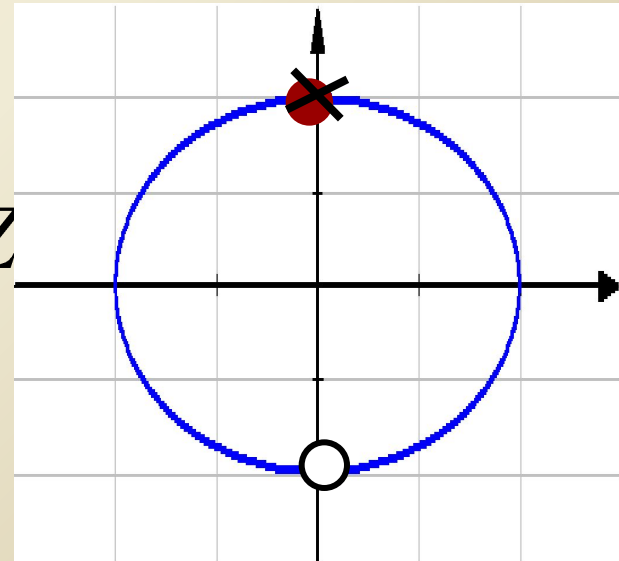
Произведение равно 0, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другой при этом **имеет смысл**

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

не соотв. условию

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}$



Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

$$3 \cos^2 x - 10 \cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = t, t \in [-1; 1]$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 3 \text{ не соот условию}$$

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение однородных уравнений и сводящихся к ним

$$\cos 3x + \sin 3x = 0 \quad | : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

$$1 + \operatorname{tg} 3x = 0$$

$$\operatorname{tg} 3x = -1$$

$$3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$2 - \frac{3 \sin x}{\cos x} + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$2 - 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$6 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$$

$$6 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$$

$$3 \sin^2 x - \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 \quad | : \cos x \neq 0$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}, x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n$$

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n (n, k \in \mathbb{Z})$

Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5$$

Вынесем за скобку число $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5$$

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1$$

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi n = -\arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n =$$

$$-\arcsin \frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Ответ:

$$-\arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнений с помощью универсальной подстан

Проверить в исходном уравнении

$$x = \pi + 2\pi n$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5$$

$$3 \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 4 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5$$

$$3 \frac{2t}{1 + t^2} + 4 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 5$$

$$\frac{6t}{1 + t^2} + \frac{4(1 - t^2)}{1 + t^2} = 5$$

$$6t + 4 - 4t^2 = 5(1 + t^2)$$

Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$t = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$$

Ответ:

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

*Решение уравнений преобразованием сумм
тригонометрических функций в произведение*

$$\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

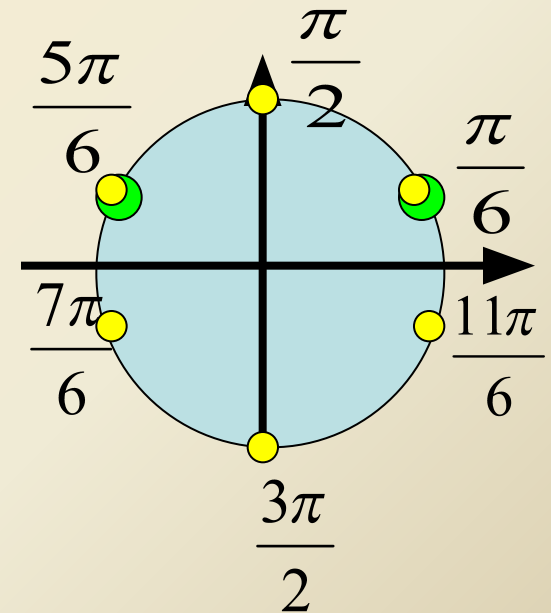
$$\cos 3x + (\sin 2x - \sin 4x) = 0$$

$$\cos 3x + 2 \sin \frac{2x - 4x}{2} \cos \frac{2x + 4x}{2} = 0$$

$$\cos 3x - 2 \sin x \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ 1 - 2 \sin x = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \end{array} \right.$$



Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$$

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x)$$

$$\sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{2x - 4x}{2} \cos \frac{2x + 4x}{2} = 0$$

$$-2 \sin x \cos 3x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\pi n, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} (n, k \in \mathbb{Z})$

Решение уравнений с помощью формул понижения степеней

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1$$

$$1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x = 2$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{2x + 4x}{2} \cos \frac{2x - 4x}{2} = 0$$

$$2 \cos 3x \cos x = 0$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Решение уравнений с помощью замены переменных

Уравнение содержит набор $\sin x$, $\cos x$ и $\sin x \pm \cos x$

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$$

$$\sin x + \cos x = t \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow$$
$$t = 1 + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x = 1} = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Решение уравнений с использованием ограниченности

$$\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\pi k \end{cases}, (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}$$

$$k = \frac{1 + 4n}{5}$$

т.к. k — целое число, то

$$n = 1 + 5m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$x = 2\pi + 8\pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Решение уравнений вида

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

Равносильный переход:

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 - \cos x = \sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

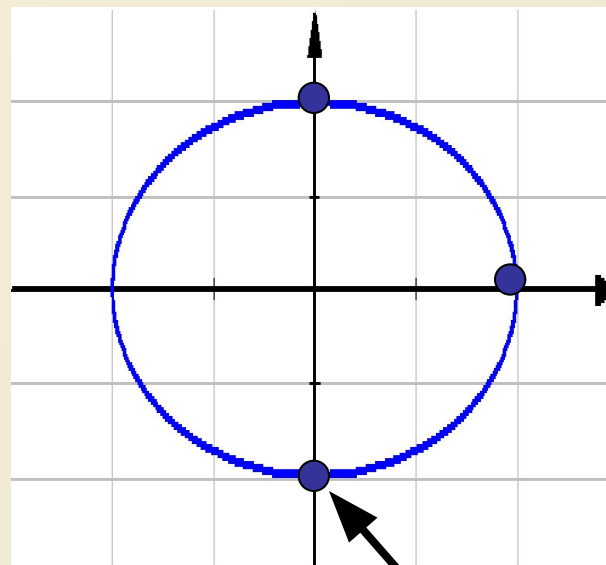
$$\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = 2\pi n$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$$



не соотв усл