Изучение уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Зачётная работа на курсах повышения квалификации учителя высшей категории по математике Войтенко Е.В.

МОУ СОШ № 1
с.Арзгир Арзгирского района Ставропольского края

Содержание

- Рациональные уравнения и неравенства.
- Иррациональные уравнения и неравенства
- Тригонометрические уравнения и неравенства
- Логарифмические уравнения и неравенства
- Трансцендентные уравнения и неравенства
- Литература

Изучение рациональных уравнений и неравенств

презентация

Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называется целым

Уравнения, где левая и правая части являются рациональными выражениями называются рациональными

Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называется **целым**

$$2x+5=3(8-x)$$

Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется **дробным**

$$x-\frac{5}{x}=-3x+19$$

$$\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-9}{x}$$

Решим целое уравнение

$$\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{6}$$

Решим дробное рациональное уравнение $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида

$$1)\ \frac{P(x)}{Q(x)}\rangle 0$$

или вида

$$2)\ \frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$$

где **$P(x)$, $Q(x)$** – некоторые многочлены.

Поскольку

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\rangle 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x)\rangle 0,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \ge 0, \\ Q(x) \ne 0, \end{cases}$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Решим неравенство:

$$\frac{\text{ő}^2 - 7\text{ő} + 10}{\text{ő} - 3} + \frac{6\text{ő} - 9}{\text{ő} + 1} \le 1.$$

Изучение иррациональных уравнений и неравенств

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства

1.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \check{c}\ddot{e}\check{c} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Замечание. Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

ПРИМЕР 1

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства

2.

$$\sqrt{f(x)} = \acute{r}$$

Если а < 0, уравнение не имеет корней.

Если а ≥0, уравнение равносильно уравнению $f(x)=a^2$

Замечание. Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведённому виду с помощью введения новой переменной.

ПРИМЕР 2

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства

3.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

ПРИМЕР 3

Иррациональные неравенства

Как правило, иррациональное неравенство сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

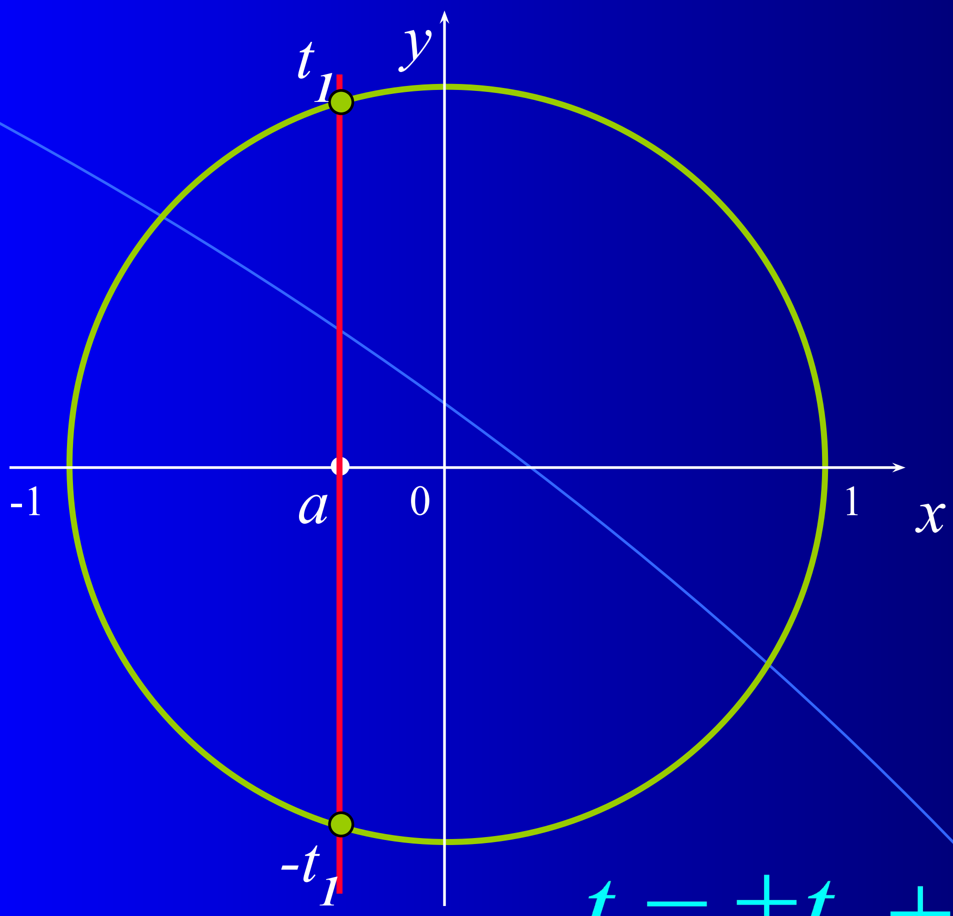
$$\sqrt{(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 4

Изучение тригонометрических уравнений и неравенств

<u>Тригонометрические уравнения</u>

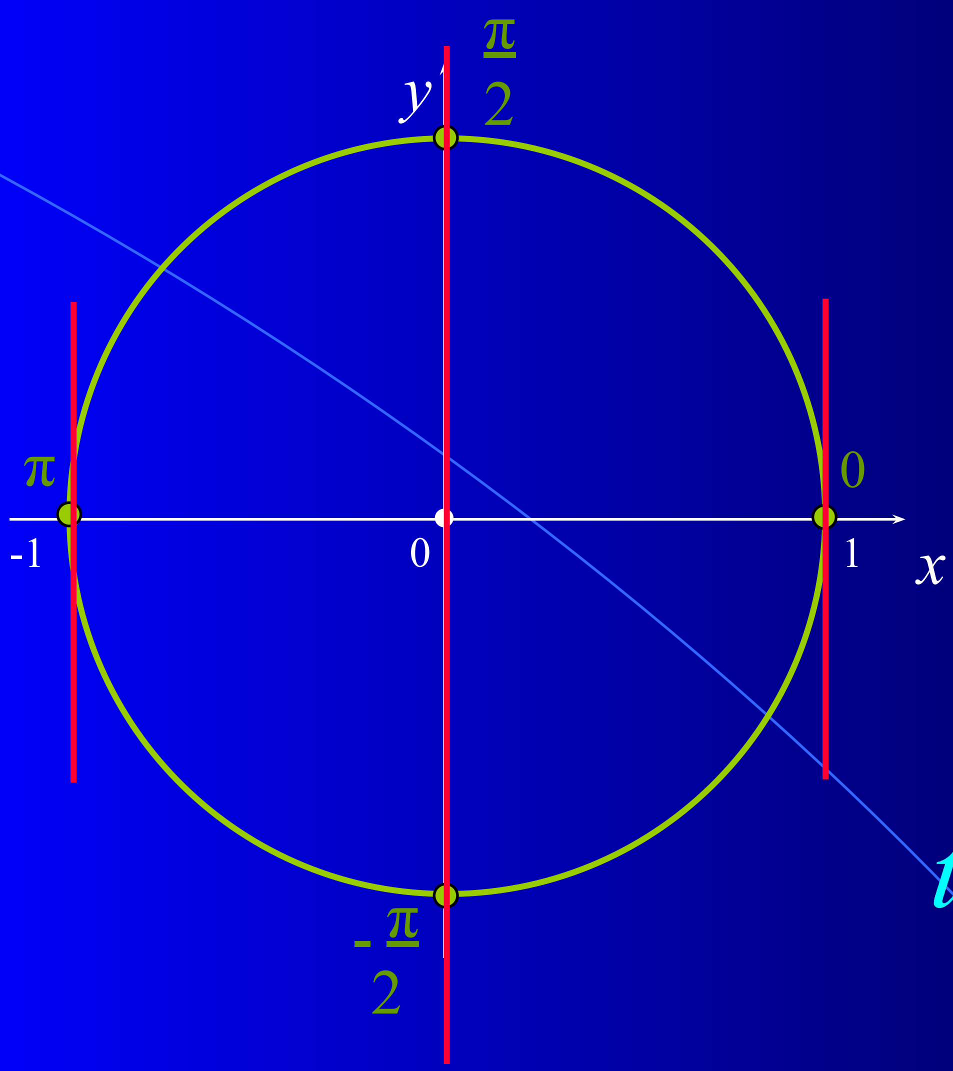
Уравнение $\cos t = a$



1. Проверить условие $|a| \le 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения $\cos t = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$t = \pm t_1 + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Частные случаи уравнения *cost = a*



$\cos t = 1$

$$t = 2\pi n, \quad n \in Z$$

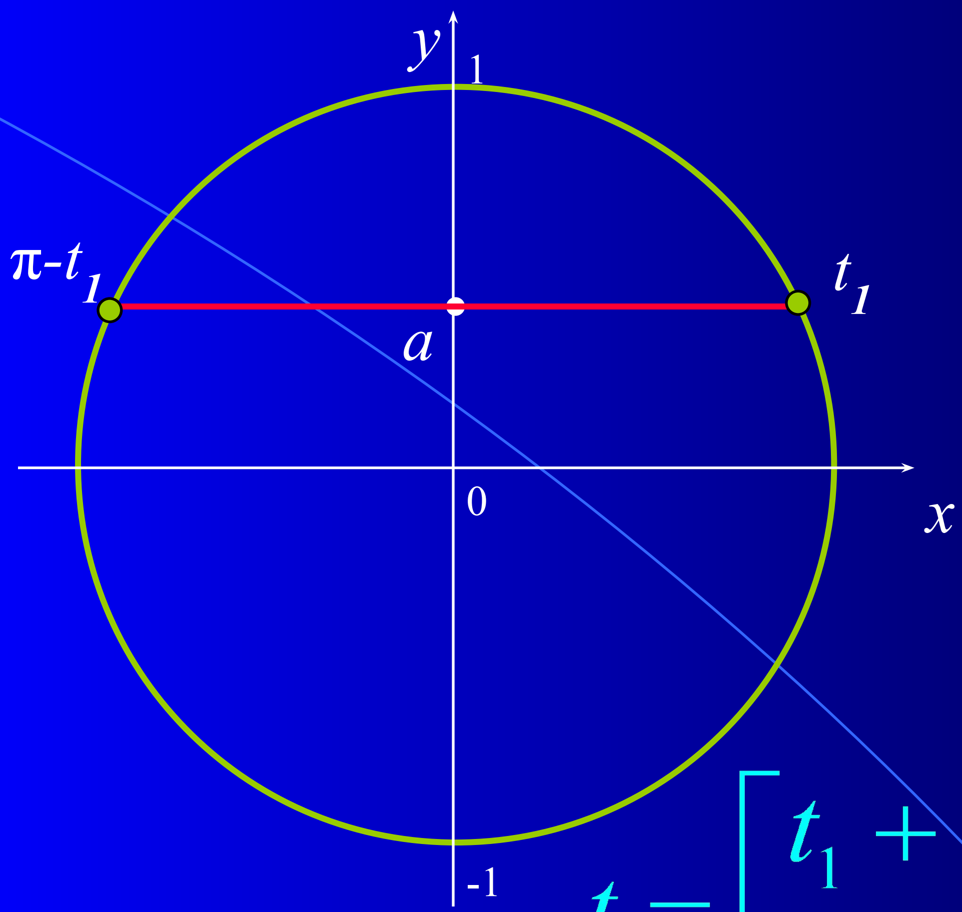
$\cos t = 0$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$\cos t = -1$

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

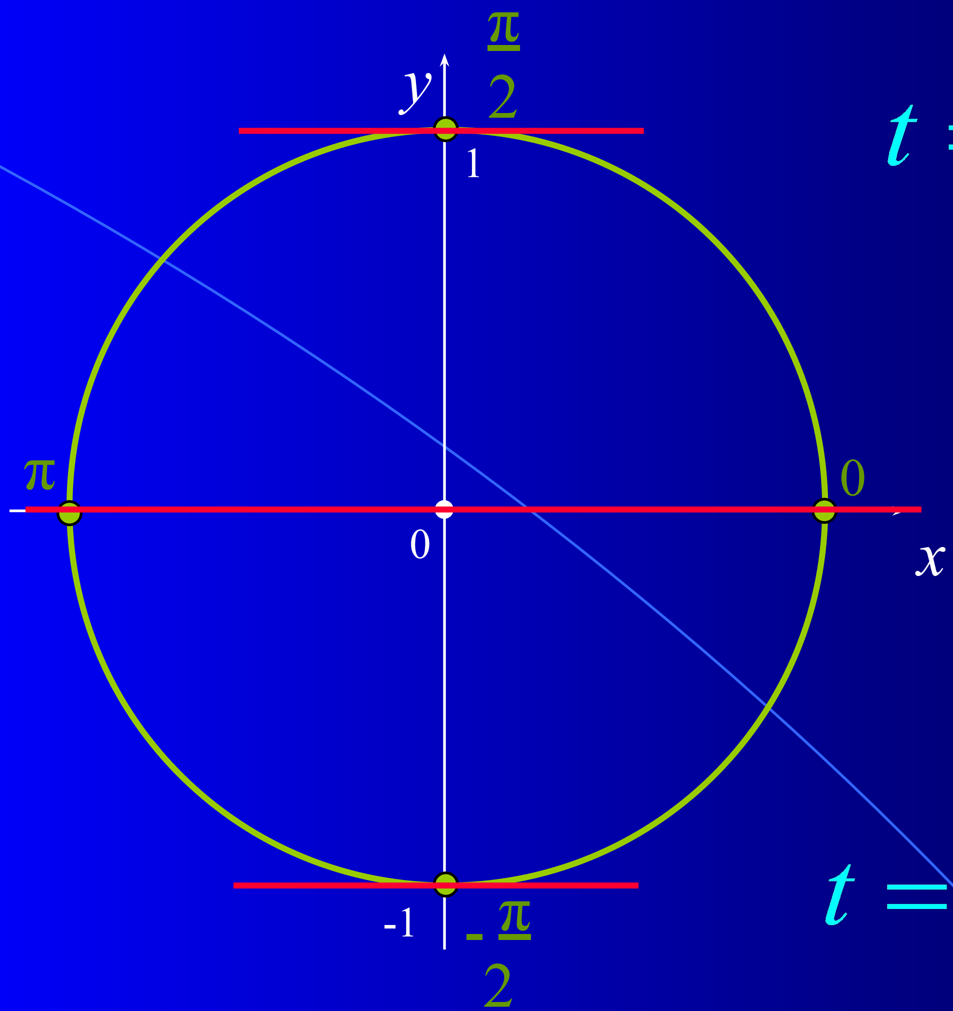
Уравнение *sint = a*



1. Проверить условие $|\ a\ | \le 1$
2. Отметить точку *a* на оси ординат.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения *sint = a*.
6. Записать общее решение уравнения.

$$t = \left[\begin{array}{ll} t_1 + 2\pi n, & n \in Z \\ \pi - t_1 + 2\pi n, & n \in Z \end{array}\right.$$

Частные случаи уравнения *sin t = a*



***Sin t* = 1**

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

***Sin t* = 0**

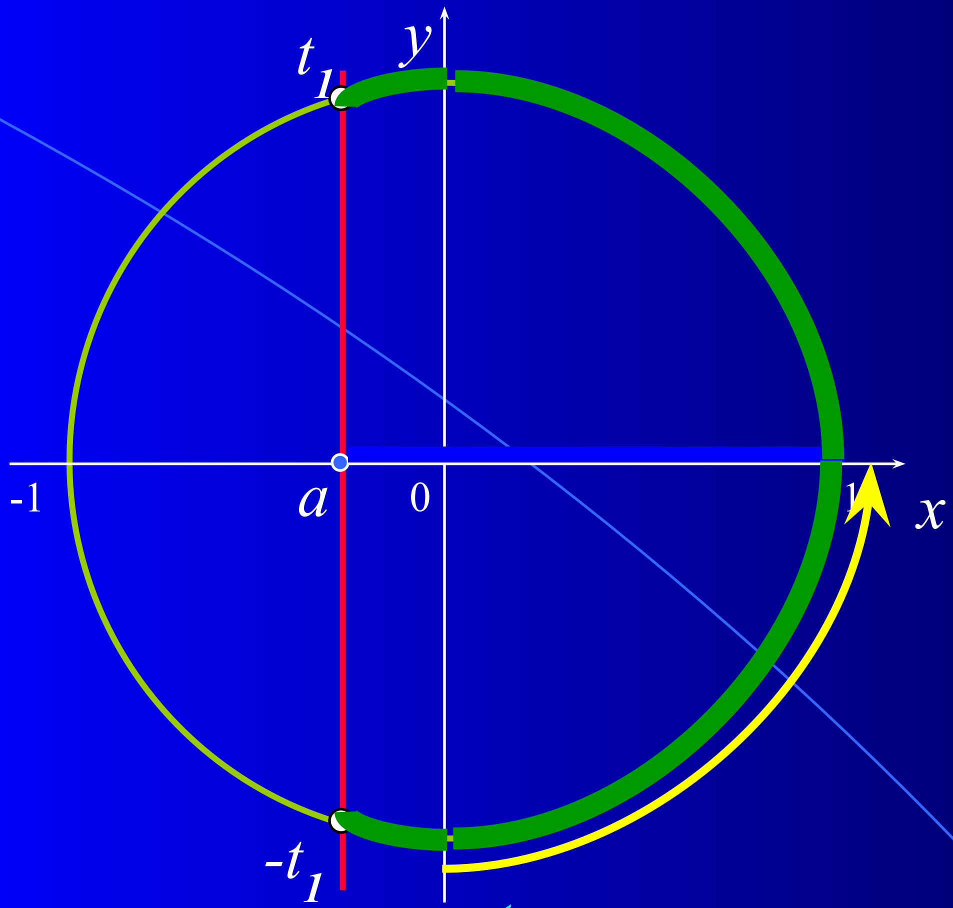
$$t = \pi n, \quad n \in Z$$

***Sin t* = -1**

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Тригонометрические неравенства

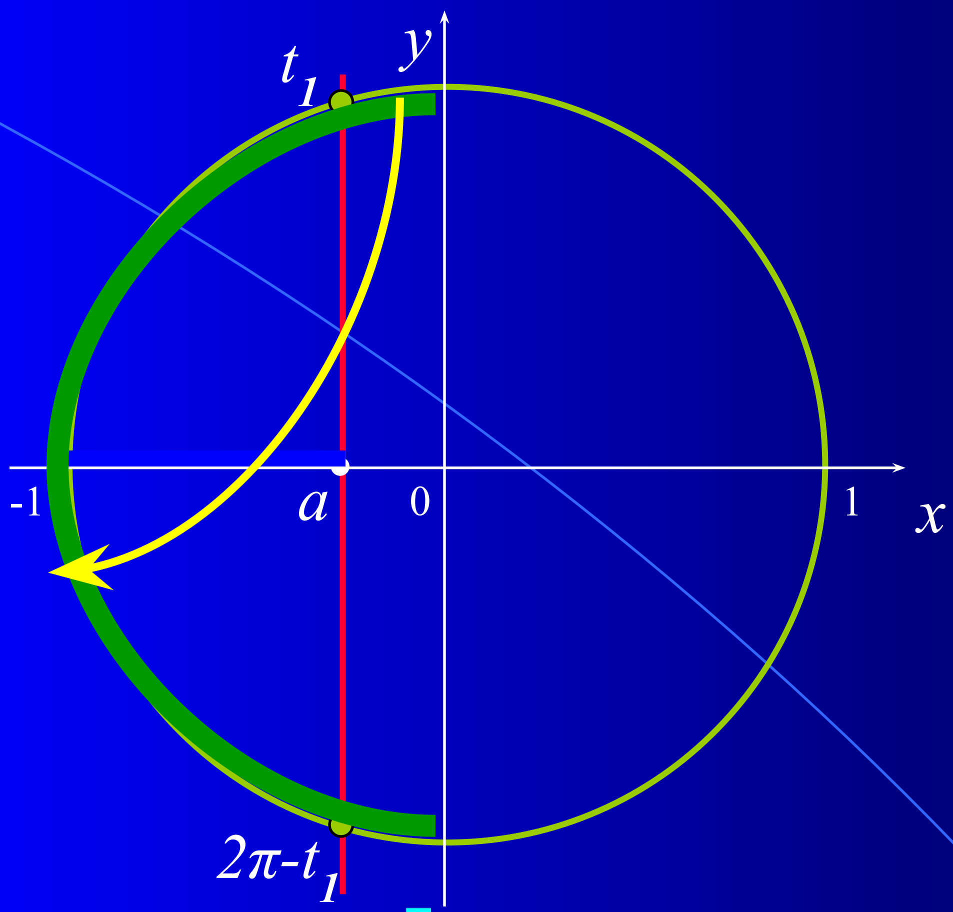
Неравенство *cost > a*



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in (-t_1 + 2\pi n; t_1 + 2\pi n), \quad n \in Z$$

Неравенство $\cos t \le a$



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x \le a$.

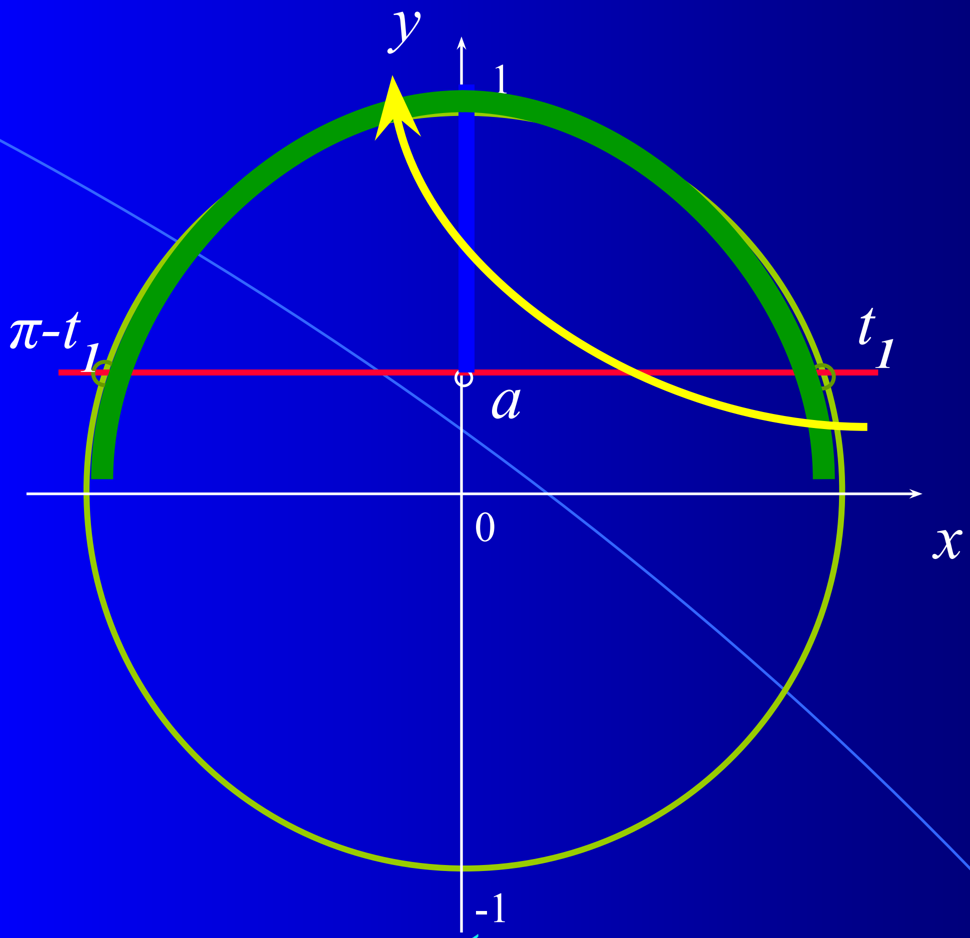
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.

3. Записать числовые значения граничных точек дуги.

4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 2\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in Z$$

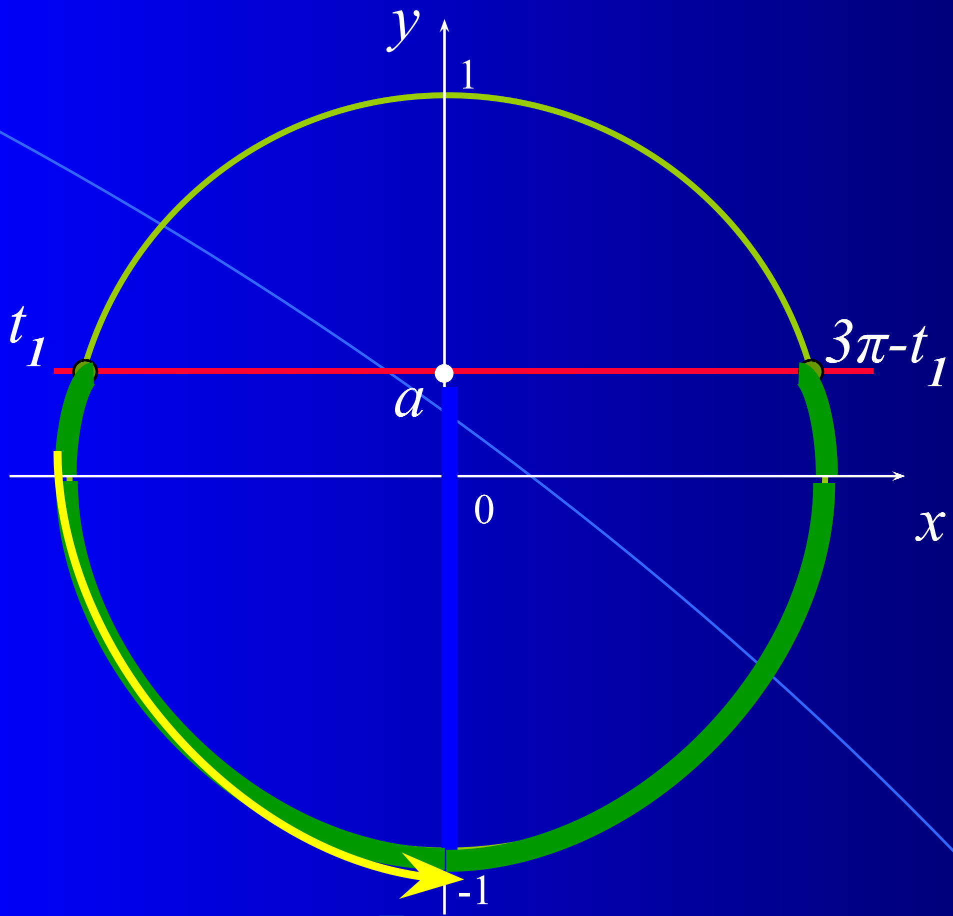
Неравенство *sint > a*



1. Отметить на оси ординат интервал $y > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in \left(t_1 + 2\pi n; \pi - t_1 + 2\pi n\right), \quad n \in Z$$

Неравенство *sint* ≤ *a*



1. Отметить на оси ординат интервал $y \le a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 3\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in Z$$

Изучение логарифмических уравнений и неравенств

Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

где *a* – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Уравнение имеет один положительный корень при любом b: $\H{o} = \acute{r}^{\hat{a}}$.

Примеры из журнала «Квант»

Логарифмические неравенства

$$\log_a f(x) \rangle \log_a g(x),$$, **где** $\acute{r} \rangle 0, \acute{r} \neq 1$

а >1

$$\log_a f(x) \rangle \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \rangle 0 \\ f(x) \rangle g(x) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \rangle 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

0 < а < 1

$$\log_a f(x) \rangle \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \rangle 0 \\ f(x) \langle g(x) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \rangle 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

<u>Решим неравенства: </u>а) $\log_2(x+8) \rangle \log_2(2x+4)$ б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3\text{ő} + 1)$

Изучение трансцендентных уравнений

Трансцендентное уравнение -
это уравнение не являющееся алгебраическим.

Обычно это уравнения, содержащие показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

Например:

$$\cos x = x \qquad \log x = x - 5 \qquad \text{ő}^2 = loqx + x^5 + 40$$

Трансцендентное уравнение –
это уравнение вида f(x) = g(x), где функции f и g являются аналитическими функциями, и по крайней мере одна из них не является алгебраической.

Методы решения трансцендентных уравнений

Рассматриваются следующие методы уточнения корня:

метод дихотомии,

метод Ньютона (касательных),

модифицированный метод Ньютона,

метод хорд и подвижных хорд.

Примеры

Журнал «Квант»

Литература

1. П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. Показательные и логарифмические уравнения неравенства: учебно-методическое пособие.-М. Илекса, 2006
2. П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. Тригонометрические уравнения неравенства и методика их решения: учебно-методическое пособие.-М. Илекса, 2004
3. П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. Готовимся к экзаменам по математике.:-М. Илекса, 2003
4. Е.М. Родионов, Л.А.Филимонов. Уравнения, неравенства. Параметры. Тригонометрия, Логарифмы.-М.:Ориентир 2004
5. http://artides.mathedu.ru/alg/uravneniya/-/1/5
6. http://ito.ede.ru/2008/Moscow/
7. http://www.allbest.ru/referat/