

Основные приёмы решений тригонометрических уравнений.



**Сопоставьте следующие колонки
таблицы:**

$\sin x = 0$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\sin x = 1$	$2\pi n$
$\sin x = -1$	πn
$\cos x = 0$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$
$\cos x = 1$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$
$\cos x = -1$	πn
$\operatorname{tg} x = 0$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$\pi + 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = 1$	$\frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = -1$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$

Решить уравнения:

1). $\cos \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$

Решение:

$$\frac{x}{3} = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm 3 \arccos \frac{3}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2). $\sin(3\pi + x) = -0,6$

Решение:

$$\sin(\pi + x) = -0,6$$

$$-\sin x = -0,6$$

$$\sin x = 0,6$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin 0,6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$3) (4 \operatorname{tg} x - 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

Решение:

ООУ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$4 \operatorname{tg} x - 1 = 0$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$ $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos 2x + 1 = 0$ $\cos 2x = -1$ $2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} - \text{не удов-}$ летворяет ООУ.
--	--

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Метод введения вспомогательной переменной.

№1. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

Решение:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

Замена: $\sin x = t$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 2$$

Не имеет
решений

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

№2. $\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 3$

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$\sin 2x = (\cos x \pm \sin x)^2 - 1$$

Получаем:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1 + 3(\sin x + \cos x) = 3$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + 3(\sin x + \cos x) - 4 = 0$$

$$\sin x + \cos x = t$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -4$$

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x + \cos x = -4$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -4$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{2}$$

Не имеет решений

Метод разложения на множители.

№3. $\operatorname{tg} x \cdot \sin x + \operatorname{tg} x - \sin x - 1 = 0$

Решение:

О.О.У.: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки:

$$(\operatorname{tg} x \cdot \sin x + \operatorname{tg} x) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Данное решение не удовлетворяет О.О.У.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

№ 4 $\cos 5x - \cos 3x = 4 \sin x$

Решение:

Воспользуемся формулой разности

косинусов:

$$-2 \sin \frac{5x + 3x}{2} \cdot \sin \frac{5x - 3x}{2} - 4 \sin x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin x - 4 \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \sin 4x + 4) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin 4x + 4 = 0$$

$$\sin 4x = -2$$

Не имеет решений

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Однородные уравнения.

№5 $4 \cos x - \sin x = 0$ - однородное уравнение 1-ой степени

Решение:

Пусть $\cos x = 0$ Тогда и $\sin x = 0$, получим систему:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{данная система не имеет решений}$$

Следовательно, $\cos x = 0$ не является корнем данного уравнения и обе части уравнения можно поделить на $\cos x$, т.к. при этом не произойдёт потери корней.

Разделим обе части уравнения на, $\cos x \neq 0$ Это можно сделать, т.к.

Получим уравнение

$$4 - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 4$$

$$x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

№ 6 $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$

Решение:

$$3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$$

Переносим все члены уравнения в одну часть:

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ данная система не имеет решений

Следовательно, $\cos x = 0$ не является корнем данного уравнения и обе части уравнения можно поделить на $\cos^2 x$, так как при этом не произойдет потеря корней.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.

Получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

Делаем замену $\operatorname{tg} x = t$

$$t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = -3$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -3$$

$$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Неоднородные уравнения.

№ 7 $\sqrt{3} \sin 5x - \cos 5x = -\sqrt{3}.$

Решение:

Поделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{2}$

Получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 5x - \frac{1}{2} \cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Замечаем, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, т.е. имеем

$$\sin 5x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 5x \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ /уравнение}$$

Применяем формулу синуса

$$\sin \left(5x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{11\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

$$4 \sin x + 3 \cos x = 4$$

Решение:

Поделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{2}$

Получим

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Замечаем, что $\frac{4}{\sqrt{2}} = \cos\left(\pm \arccos \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{3}{\sqrt{2}} = \sin\left(\arcsin \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, т.е. имеем уравнение:

$$\cos\left(\pm \arccos \frac{4}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sin x + \sin\left(\arcsin \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos x = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

В данном случае синус и косинус имеют нетабличные значения, поэтому получается очень некрасивое уравнение. Тогда для решения этого уравнения лучше воспользоваться следующим способом.

№ 8 $4 \sin x + 3 \cos x = 4$

Решение:

$$4 \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) + 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 4 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$- \cos^2 \frac{x}{2} - 7 \sin^2 \frac{x}{2} + 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$ т.к. в этом случае не произойдет потери корней.

$$7 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$7t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{14} = \frac{4 \pm 3}{7}$$

$$t_1 = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{1}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{7}$$

$$\frac{x}{2} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$