



***Применение свойств
квадратичной функции при
решении уравнений и неравенств
с параметрами***

11 класс, подготовка к ЕГЭ


Подготовила:
Ефимова Людмила Иосифовна,
учитель математики МБОУ «СОШ №9»
высшая квалификационная категория




Задачи, решаемые при помощи графика линейной функции (*прямой*):


- тепловое расширение рельса;
- месячная прибыль предприятия.






Задачи, решаемые при помощи графика
квадратичной функции (*параболы*):

- мальчик, камешки, колодец;
 - выручка предприятия при
наибольшей цене;
 - мяч, подброшенный вверх;
 - скорость вращения ведёрка;
 - частичное вытекание воды из бака;
 - полное вытекание воды из бака;
- 



Задачи, решаемые при помощи графика
квадратичной функции (*параболы*):

- камнеметательная машина;
 - нагревание прибора;
 - время проверки работы лебёдки;
 - МОТОЦИКЛИСТ В ЗОНЕ СОТОВОЙ СВЯЗИ;
 - торможение автомобиля;
 - момент инерции вращающейся катушки.
- 

Задание В11



Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8 \text{ кг}$ и радиуса $R = 5 \text{ см}$, и двух боковых с массами $M = 2 \text{ кг}$ и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, даётся формулой

$$I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$?

Ответ выразите в сантиметрах.

Задание В11



Решение. Функция: $h_{\max} > 0$ при $I \leq 1900$.

Данные:
$$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

$$m = 8,$$

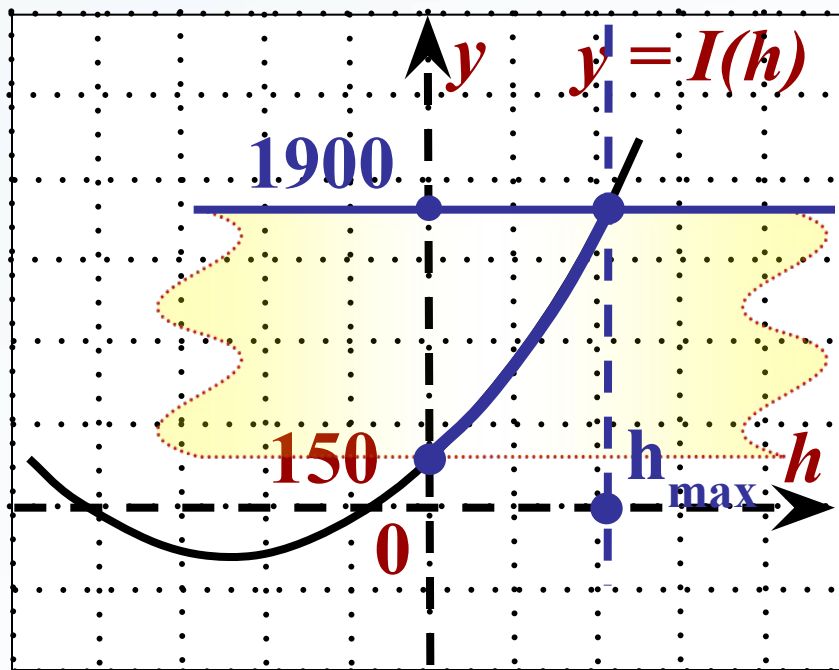
$$M = 2,$$

$$R = 5.$$

$$I = 2h^2 + 20h + 150, h > 0.$$

Найти: h_{\max}

Схематичный
график:



Задание В11

Решение.

Решаем
уравнение:

$$2h^2 + 20h + 150 \leq 1900$$

$$2h^2 + 20h - 1750 = 0, | : 2$$

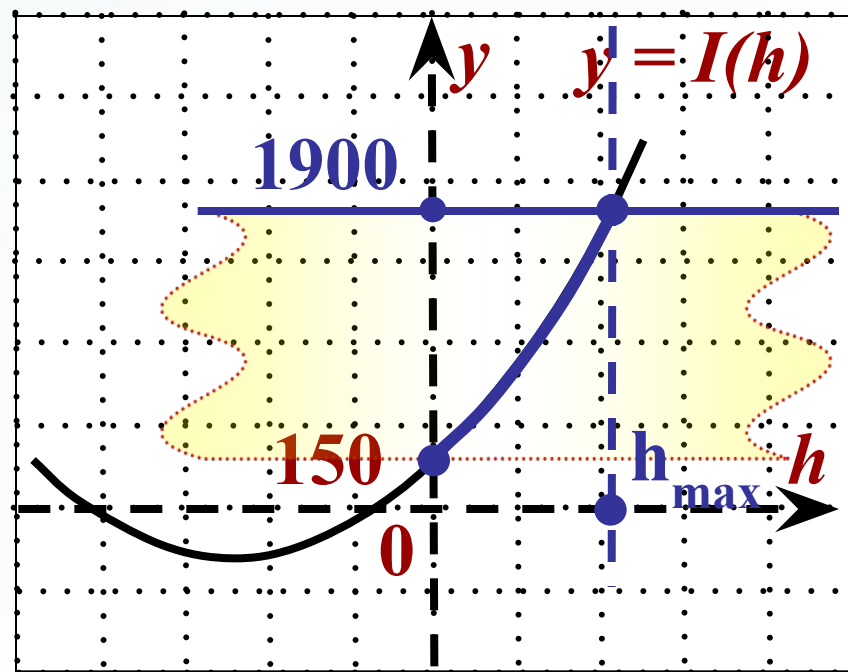
$$h^2 + 10h - 875 = 0.$$

$$D = 10^2 + 4 \cdot 875 = 60^2.$$

$$h_1 = -35, h_2 = 25 - h_{\max}.$$

(*большой корень*)

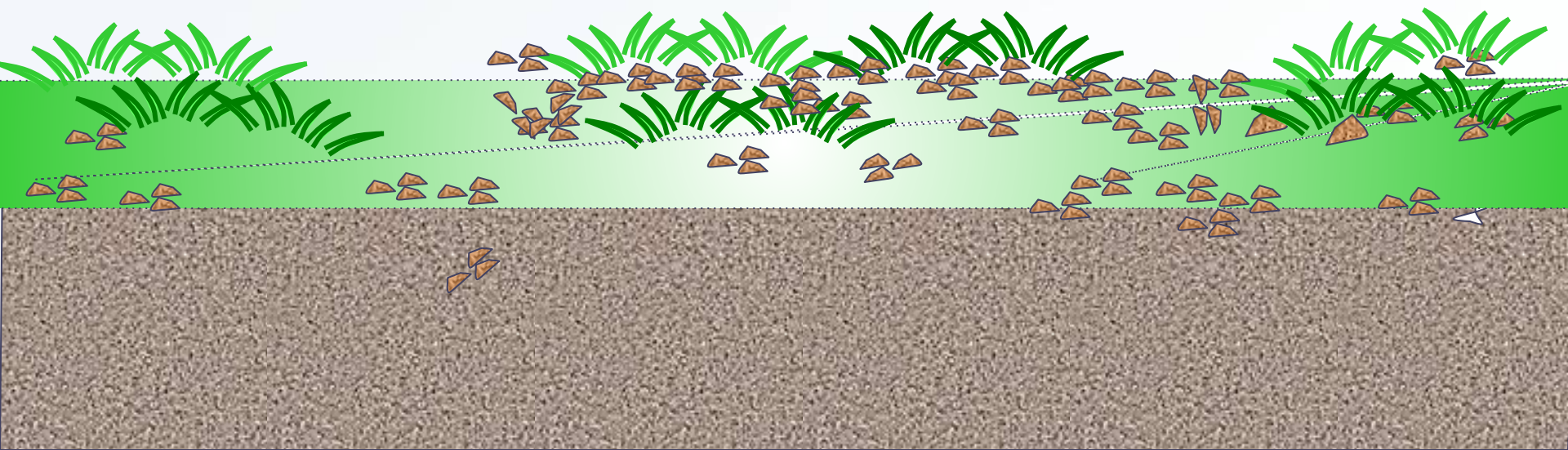
Ответ: 25.



Задание В11



Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24 \text{ м/с}$, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3 \text{ м/с}^2$. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ выразите в секундах.



Задание В11



Данные:

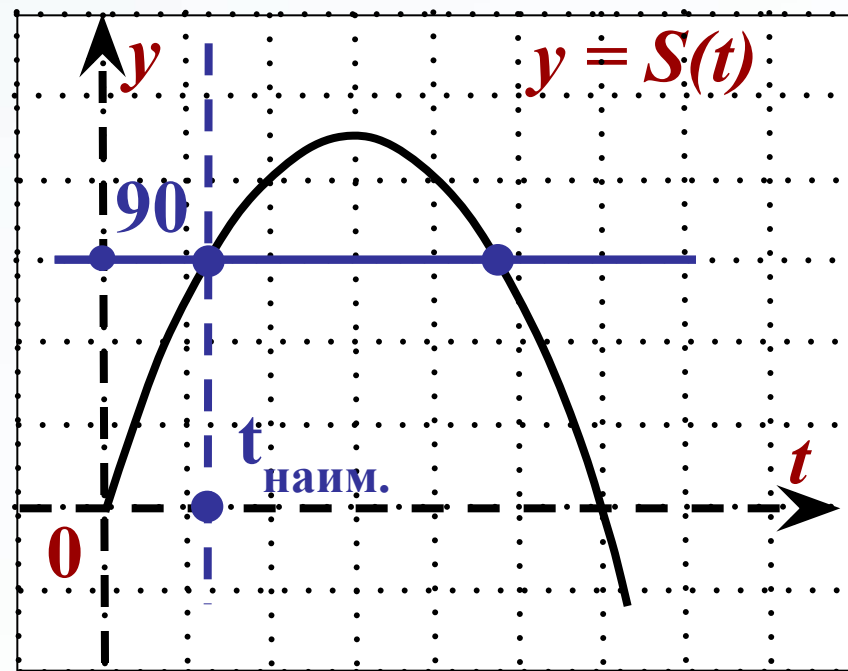
$$v_0 = 24,$$
$$a = 3.$$

Функция:

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Найти: $t > 0$ при $S = 90$.

Схематичный
график:



Задание В11

Решение. Функция:

$$S = 24t - \frac{3t^2}{2}.$$

Решаем

уравнение:

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2}.$$

$$\frac{3}{2}t^2 - 24t + 90 = 0, | : \frac{3}{2}$$

$$t^2 - 16t + 60 = 0.$$

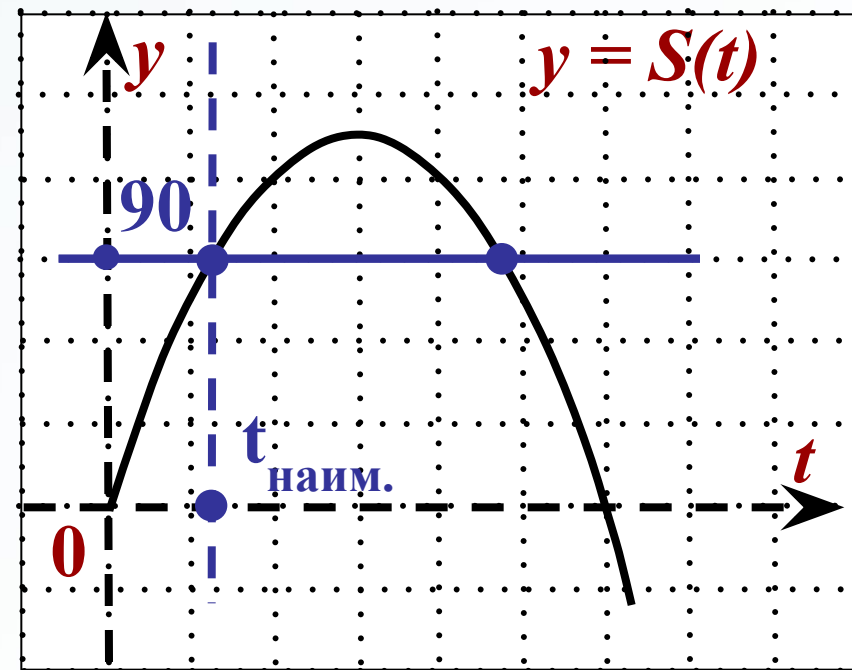
$$t_1 = 10, t_2 = 6 - t_{\text{наим.}}$$

(меньший корень)

Ответ: 6.

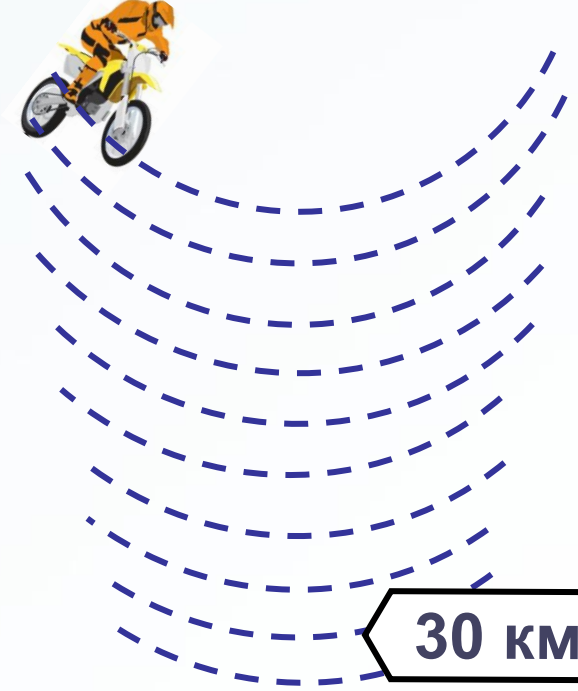


Схематичный
график:



Задание В11

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57 \text{ км/ч}$, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12 \text{ км/ч}^2$. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.



30 км

*Нет зоны
действия сети*

Задание В11



Данные: Функция: $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

$$v_0 = 57, \\ a = 12.$$

Найти: $t_{\text{наиб.}} > 0$ при $S \leq 30$.

$$57t + 6t^2 \leq 30$$

Схематичный
график:

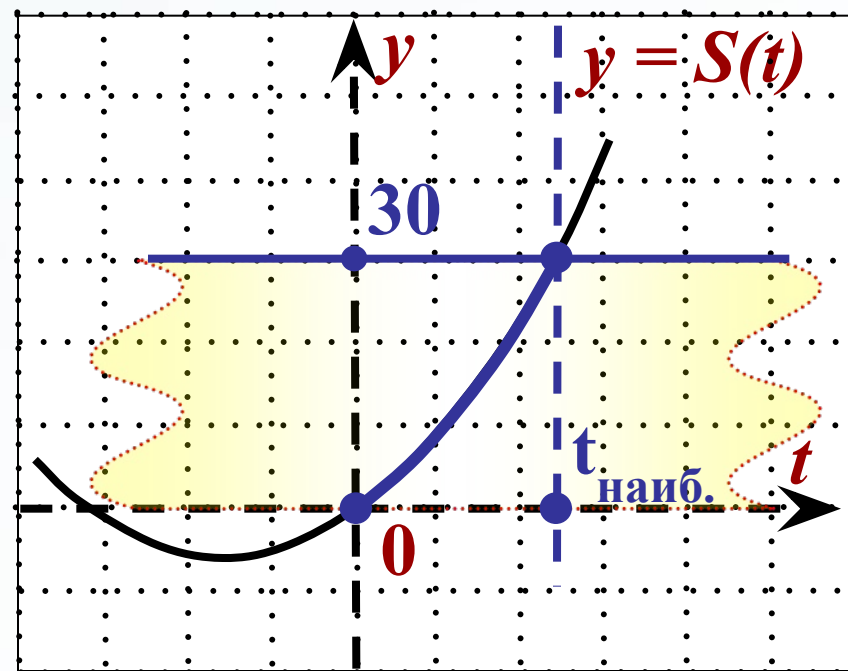
$$6t^2 + 57t - 30 = 0, | :3$$

$$2t^2 + 19t - 10 = 0.$$

$$t_1 = -10, t_2 = 0,5(\text{ч}) - t_{\text{наиб.}}$$

(большой корень)

$$t_{\text{наиб.}} = 30(\text{мин.})$$



Ответ: 30

Задание В11



Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450 \text{ К}$, $a = -12,5 \text{ К/мин}^2$, $b = 175 \text{ К/мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Пирометр — прибор для бесконтактного измерения температуры тел.



Задание В11

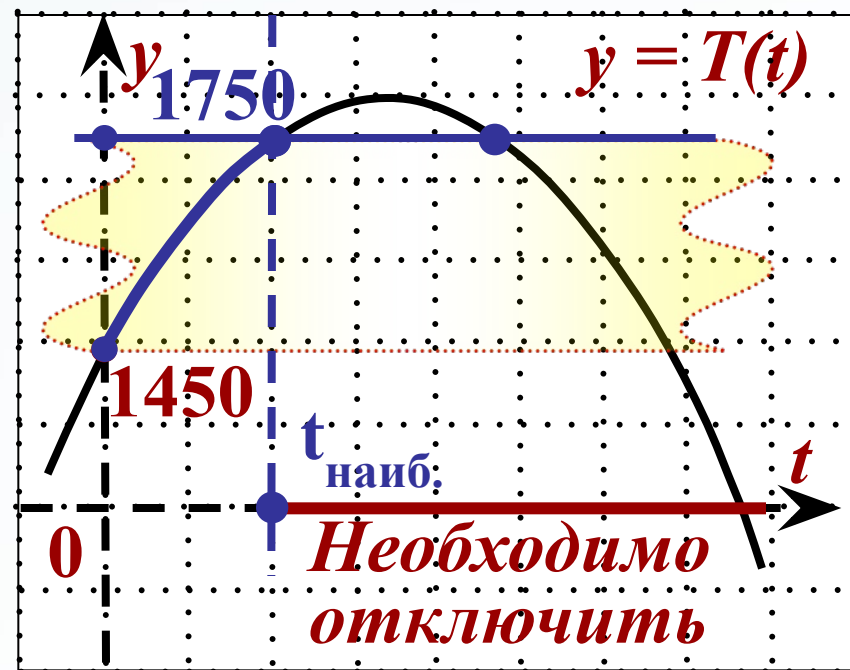


Данные: Функция: $T(t) = T_0 + bt + at^2$

$T_0 = 1450,$
 $a = -12,5,$
 $b = 175.$

Найти: $t_{\text{наиб.}} > 0$ при $T(t) \leq 1750.$

Схематичный
график:



Задание В11



Решение. Функция: $T(t) = 1450 + 175t - 12,5t^2$

Решаем уравнение: Найти: $t_{\text{наиб.}} > 0$ при $T(t) \leq 1750$.

$$1750 = 1450 + 175t - 12,5t^2$$

$$12,5t^2 - 175t + 300 = 0, \quad | :12,5$$

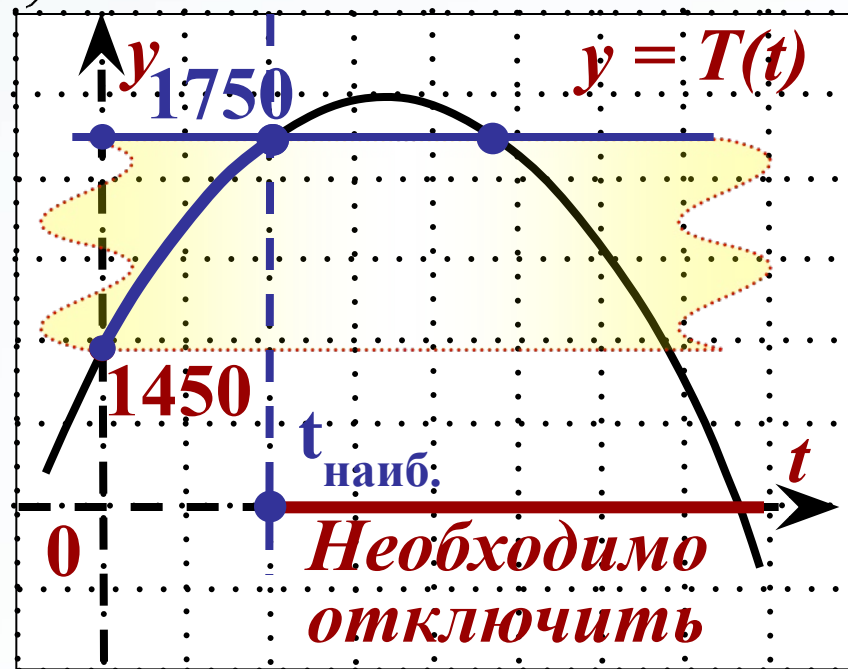
$$t^2 - 14t + 24 = 0,$$

$$t_1 = 12, t_2 = 2 - t_{\text{наиб.}}$$

(меньший корень)

Ответ: 2.

Схематичный график:



Задание В11

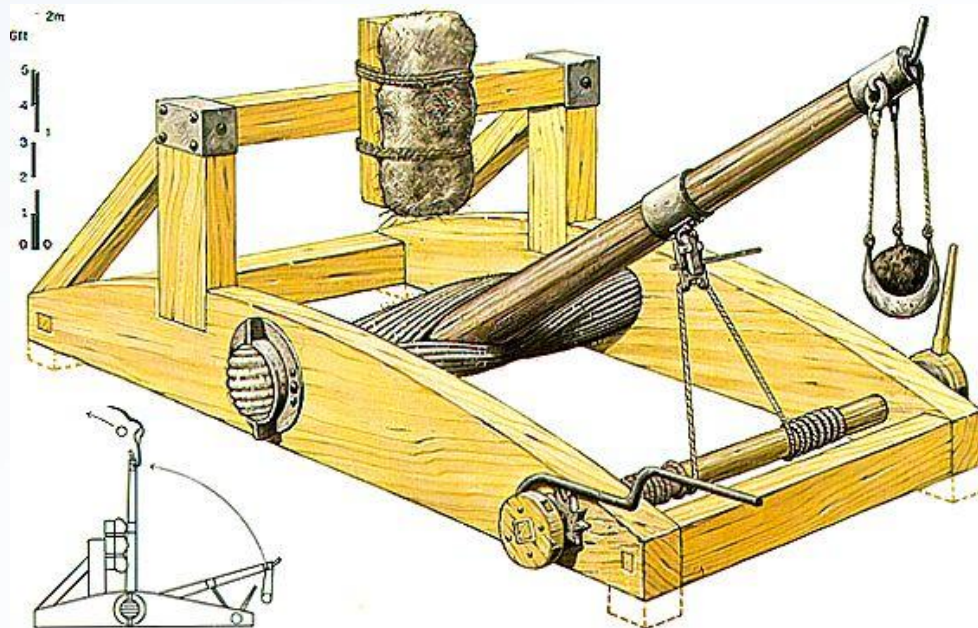


Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$,

где $a = \frac{-1}{60} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{6}$ — постоянные параметры,

x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй.

На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?



Задание В11

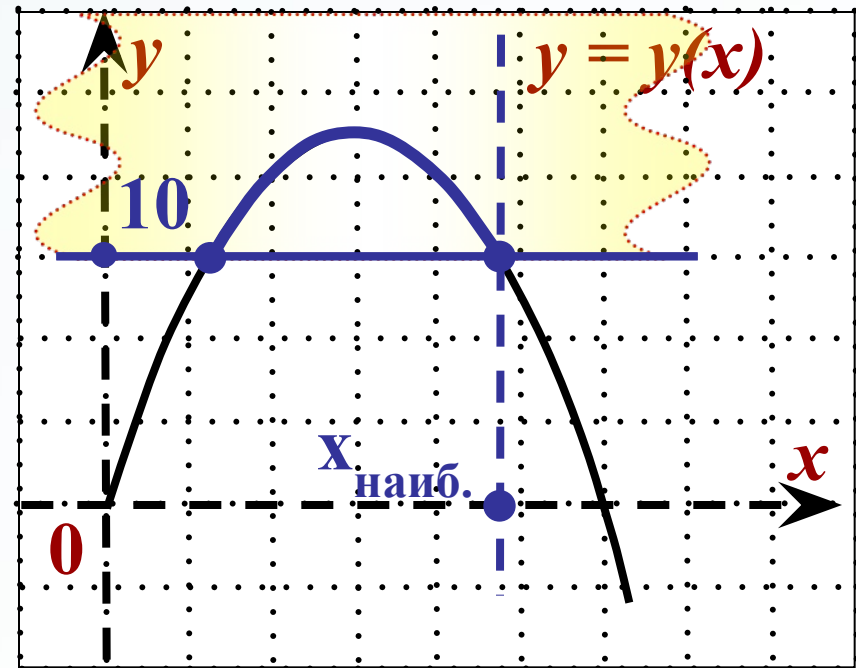


Данные: Функция: $y(x) = ax^2 + bx$.

$$a = -\frac{1}{60},$$
$$b = \frac{7}{6}.$$

Найти: x при $y(x) \geq 10$.

Схематичный
график:



Задание В11

Решение.

Функция: $y(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{7}{6}x$.



Решаем
уравнение:

Найти: x при $y(x) \geq 10$.

$$-\frac{1}{60}x^2 + \frac{7}{6}x = 10.$$

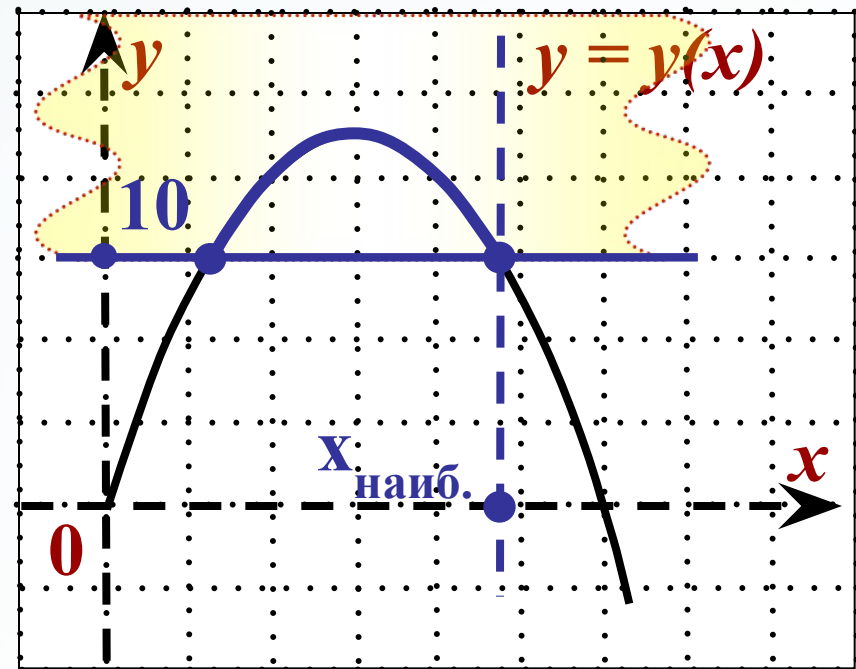
$$x^2 - 70x + 600 = 0,$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 60 = x_{\text{наиб.}}$$

Ответ:

60.

Схематичный
график:



Задание В11

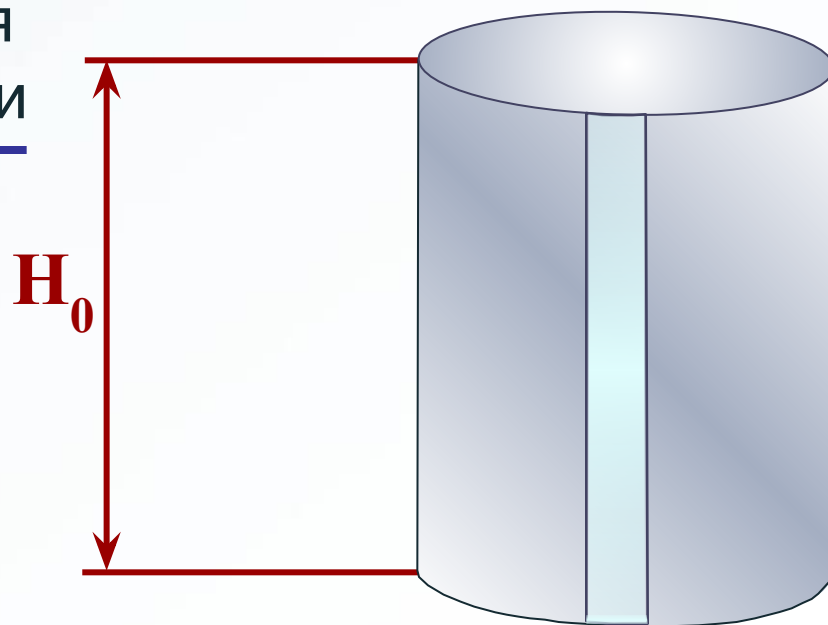


В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$H(t) = H_0 + bt + at^2$, где $H_0 = 2$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{50}$ м/мин², $b = \frac{-2}{5}$ м/мин, t — время в минутах,

прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

Ответ приведите в минутах.



Задание В11



Данные: Функция: $H(t) = H_0 + bt + at^2$

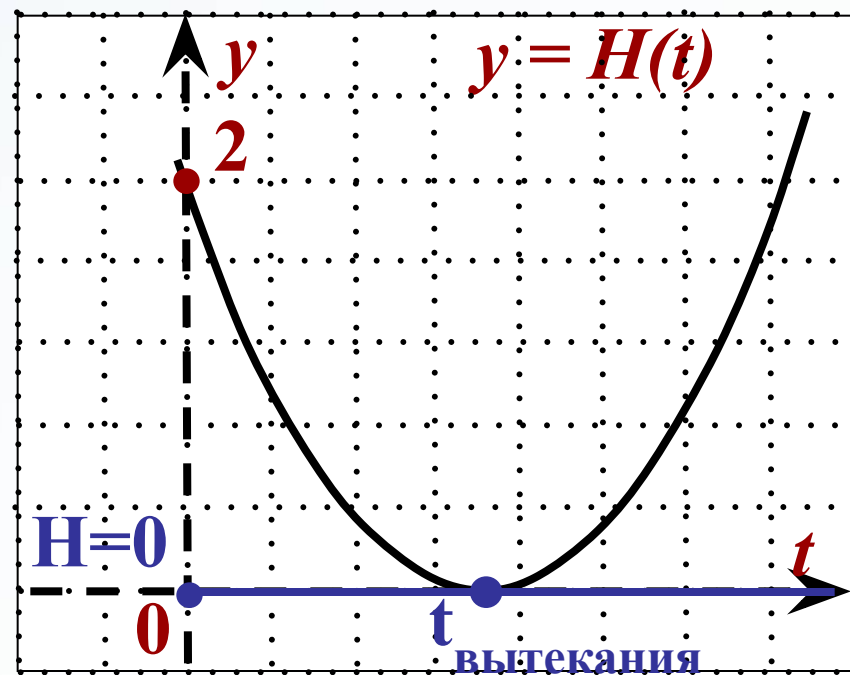
$$H_0 = 2 \text{ м,}$$

$$a = \frac{1}{50},$$

$$b = -\frac{2}{5}.$$

Найти: t при $H(t) = 0$.

Схематичный график:



Задание В11



Решение.

Функция: $H(t) = 2 - \frac{2}{5}t + \frac{1}{50}t^2$

Решаем
уравнение:

Найти: t при $H(t) = 0$.

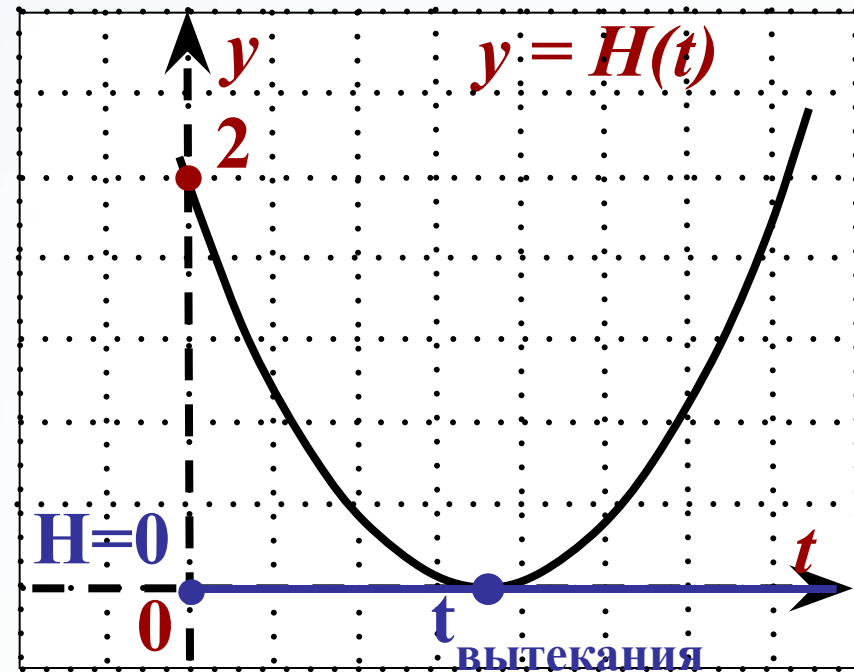
$$2 - \frac{2}{5}t + \frac{1}{50}t^2 = 0,$$

$$100 - 20t + t^2 = 0,$$

$$(t - 10)^2 = 0 \Rightarrow t = 10.$$

Ответ: 10.

Схематичный график:



Задание В11



В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах,

прошедшее с момента открытия крана, $k = \frac{1}{200}$ —

отношение площадей поперечных сечений крана и бака,

$H_0 = 5 \text{ м}$ — начальная высота столба воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через

сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Задание В11



Данные: Функция: $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$

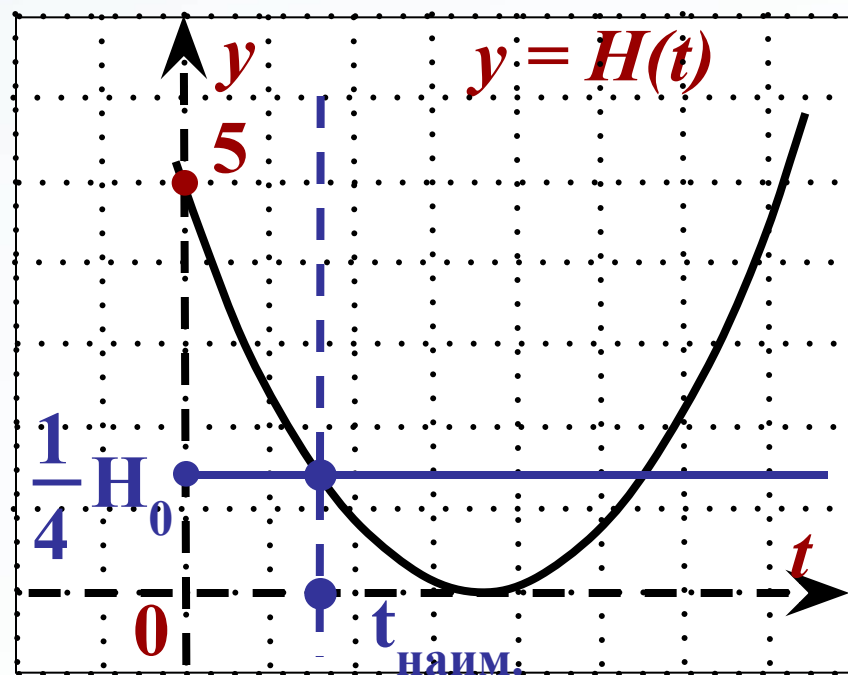
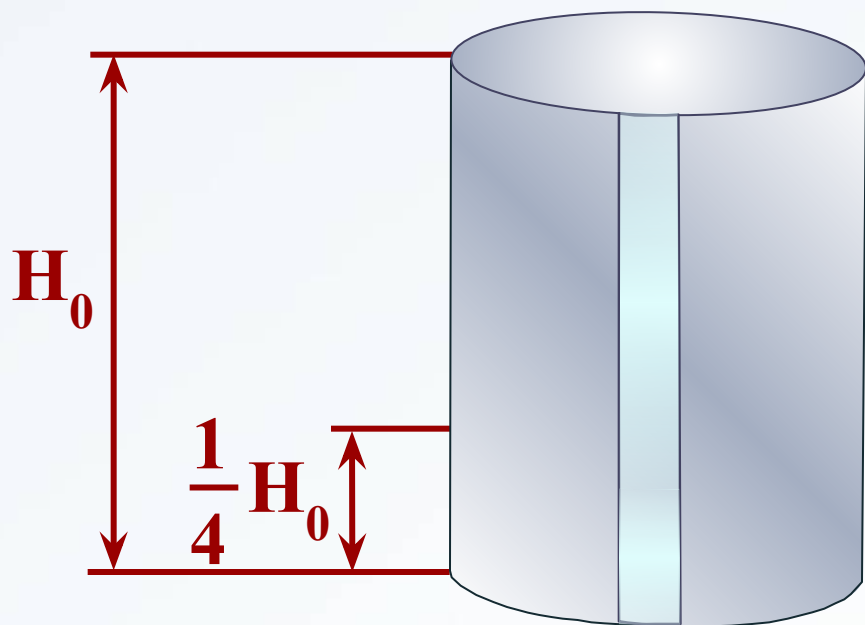
$$g = 10 \text{ м/с}^2,$$

$$k = \frac{1}{200},$$

$$H_0 = 5 \text{ м}$$

Найти: t при $H(t) = \frac{1}{4}H_0 = \frac{5}{4}$.

Схематичный график:



Задание В11



Решение. Функция: $H(t) = 5 - \frac{1}{20}t + \frac{1}{8000}t^2$

Решаем

уравнение:

$$5 - \frac{1}{20}t + \frac{1}{8000}t^2 = \frac{5}{4}.$$

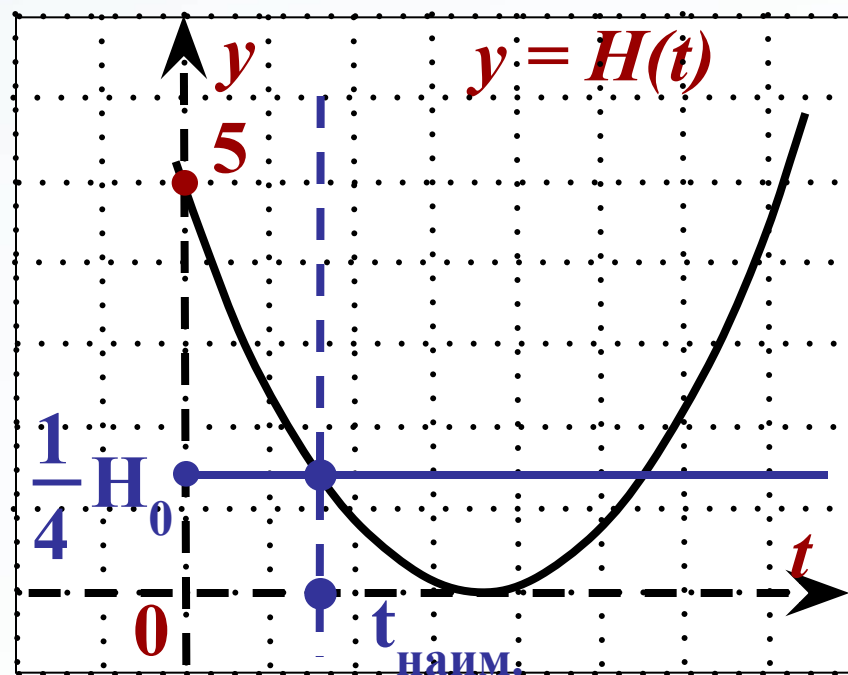
Схематичный график:

$$40000 - 400t + t^2 = 10000.$$

$$t^2 - 400t + 30000 = 0.$$

$$t_1 = 300, \quad t_2 = 100 = t_{\text{наим.}}$$

Ответ: 100.



Задание В11



Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная

в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды в

килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с,

L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей

скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна $62,5 \text{ см}$?

Ответ выразите в м/с .

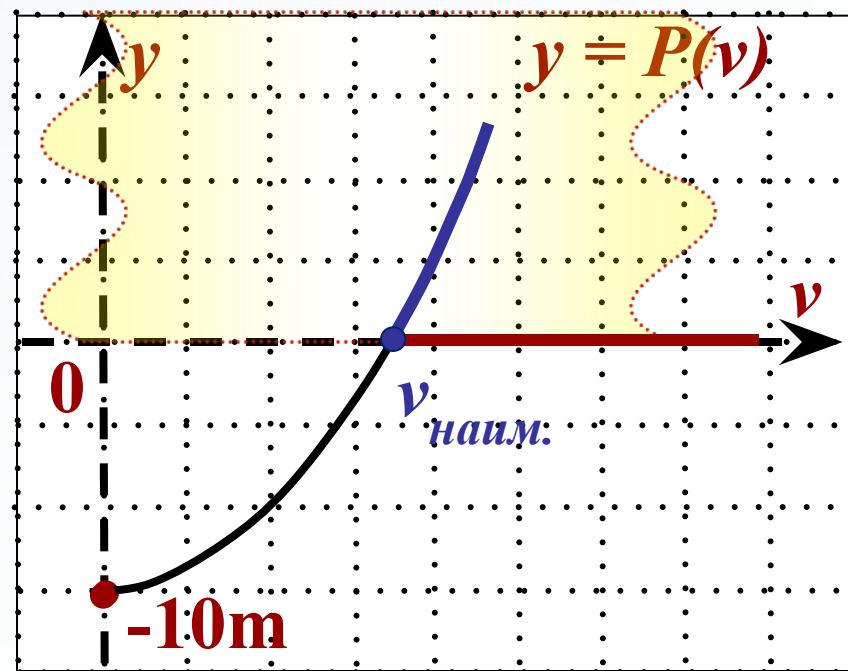
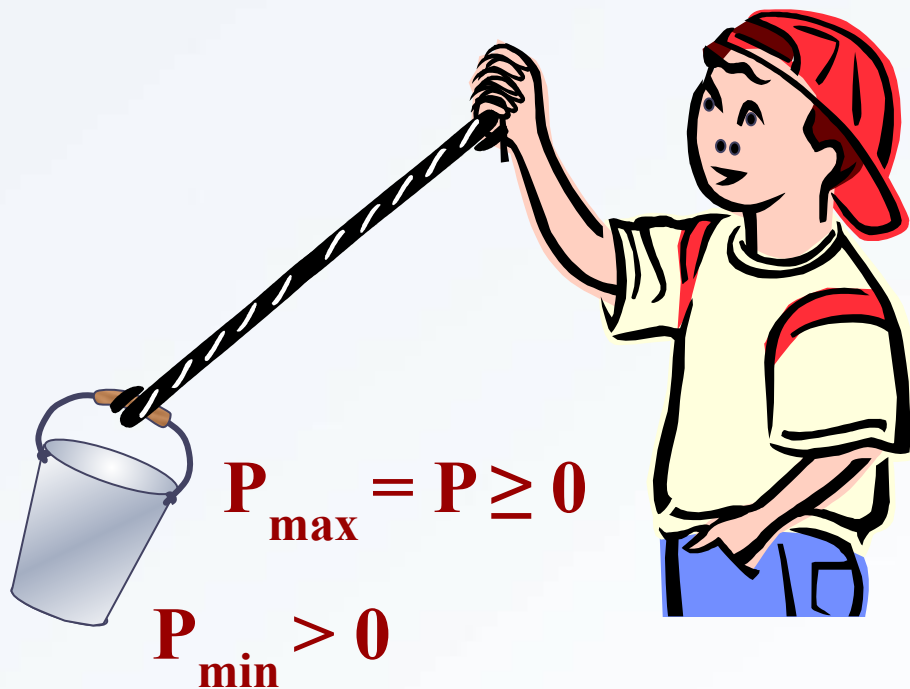
Задание В11

Данные: $L = 62,5 \text{ см} = 0,625 \text{ м}$

Функция:
$$P = m \cdot \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$$

Найти: $v_{\text{наим.}} > 0$ при $P \geq 0$.

Схематичный график:



Задание В11



Решение.

Функция: $P = m \cdot \left(\frac{v^2}{0,625} - 10 \right), m > 0, v > 0.$

Решаем уравнение:

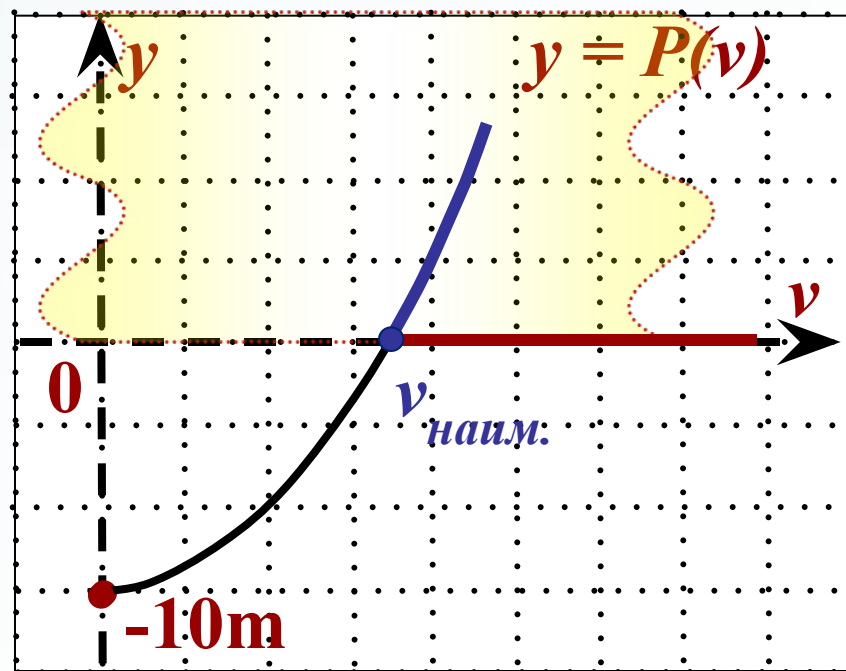
$$m \cdot \left(\frac{v^2}{0,625} - 10 \right) = 0, v > 0.$$

$$m \cdot \left(\frac{v^2}{0,625} - 10 \right) \geq 0, v > 0,$$

Так как $v > 0$, то $v = 2,5$.

Ответ: 2,5.

Схематичный график:



Задание В11



Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Функция: $h(t) = -5t^2 + 9t + 1,4$

Данные: $h(t) \geq 3$

Найти: $\Delta t = t_2 - t_1$

$$-5t^2 + 9t + 1,4 \geq 3$$

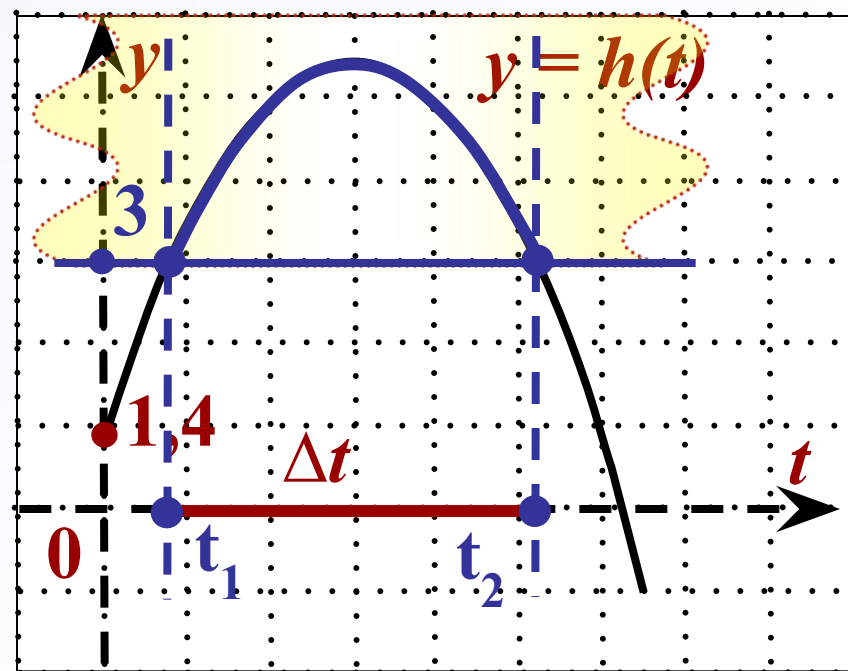
$$\Delta t = 1,6 - 0,2 = 1,4$$

$$-5t^2 + 9t + 1,4 = 3.$$

$$5t^2 - 9t + 1,6 = 0,$$

$$t_1 = 0,2, \quad t_2 = 1,6.$$

Ответ: 1,4.



Задание В11



Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 130 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$.

Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка составит не менее 360 тыс. руб.

Ответ приведите в тыс. руб.

Функция:

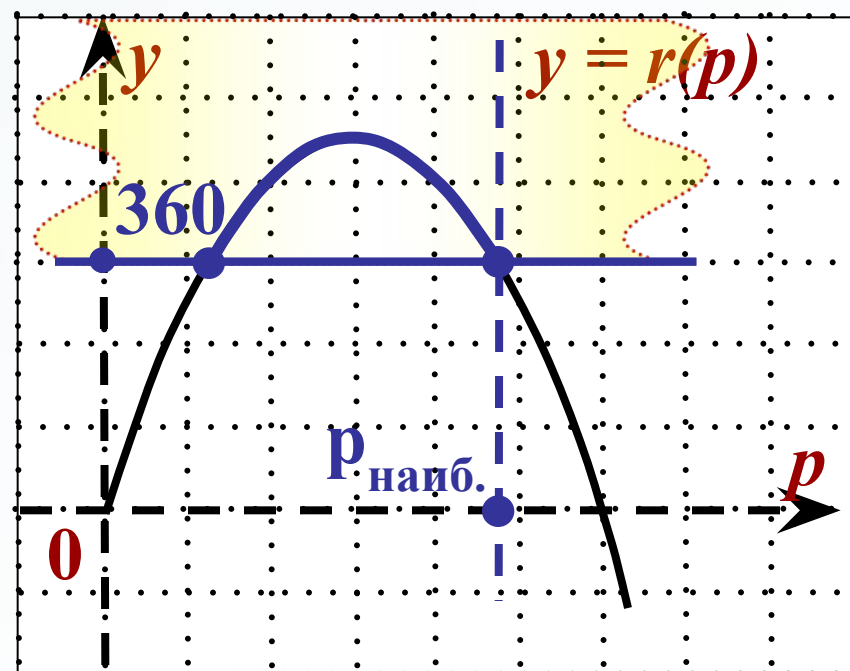
$$q = 130 - 10p, \quad r(p) = q \cdot p$$

$$r(p) = (130 - 10p) \cdot p$$

Данные: $r(p) \geq 360$

Найти:

$$p_{\text{наиб.}} \text{ при } r(p) \geq 360.$$



Задание В11



Решение.

$$r(p) = (130 - 10p) \cdot p$$

$$r(p) = -10p^2 + 130p$$

$$-10p^2 + 130p \geq 360$$

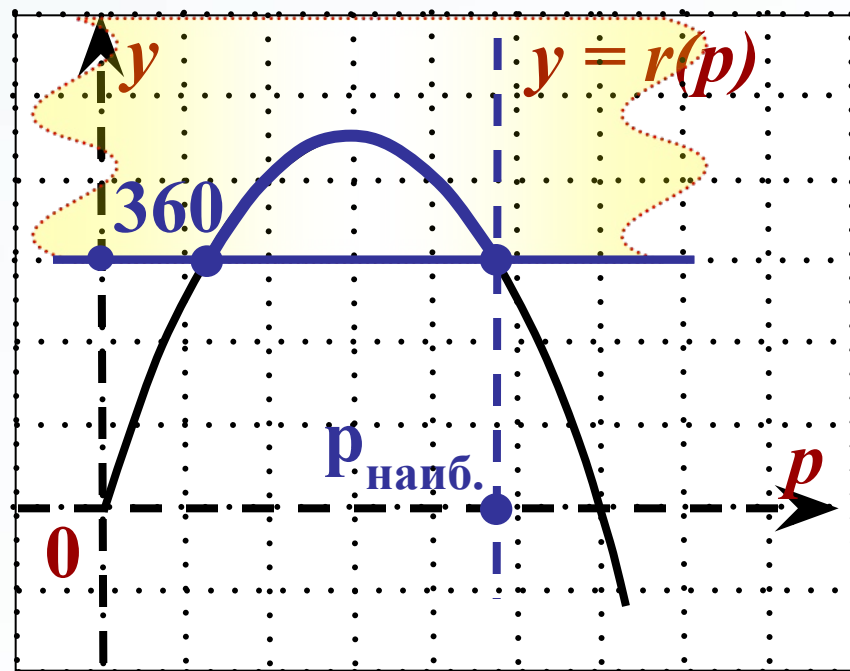
$$-10p^2 + 130p = 360,$$

$$p^2 - 13p + 36 = 0,$$

$$p_1 = 4, p_2 = 9 \Rightarrow$$

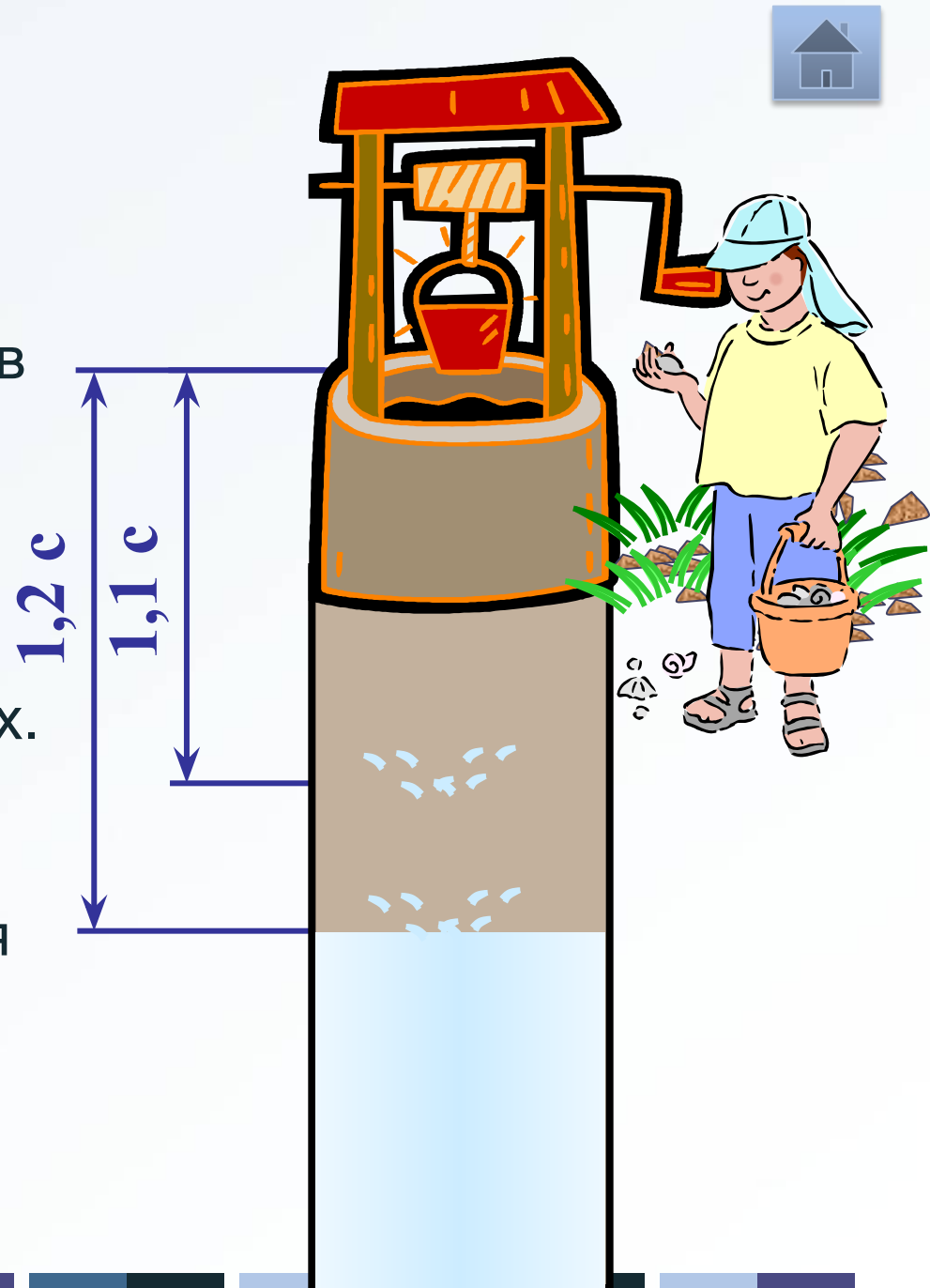
$$\Rightarrow p_{\text{наиб.}} = 9.$$

Ответ: 9.



Задание В11

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло $1,2$ с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на $0,1$ с?



Задание В11



Решение. Функция: $h = 5t^2$

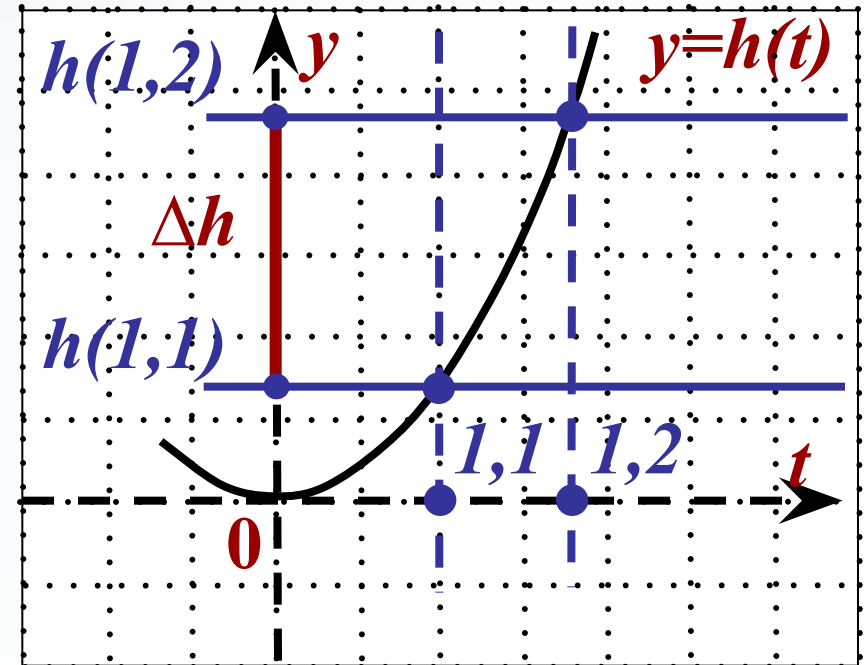
Данные: $t_{до} = 1,2$ с, $t_{изм.} = 1,1$ с.

Найти: $\Delta h = h(1,2) - h(1,1)$

Схематичный
график:

$$\begin{aligned}\Delta h &= 5 \cdot 1,2^2 - 5 \cdot 1,1^2 = \\ &= 5 \cdot (1,2^2 - 1,1^2) = \\ &= 5 \cdot (1,2 - 1,1) \cdot (1,2 + 1,1) = \\ &= 5 \cdot 0,1 \cdot 2,3 = 1,15(\text{м})\end{aligned}$$

Ответ: 1,15.



Задание В11



Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 400$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 600000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$.
Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет 500000 руб.



Задание В11



Данные: Функция: $\pi(q) = q(p - v) - f$

$p = 600$ руб., Найти: $q_{\text{наим.}}$ при $\pi(q) \geq 500000$.

$v = 400$ руб.

$f = 600000$ руб.

Решение.

$$\pi(q) = 200q - 600000$$

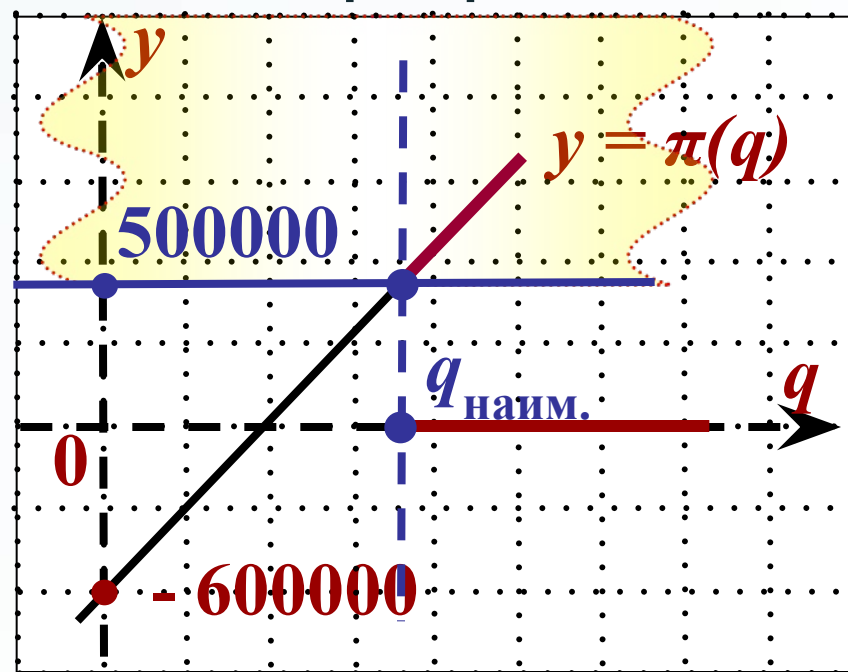
$$200q - 600000 \geq 500000$$

$$200q = 1100000$$

$$q_{\text{наим.}} = 5500$$

Ответ: 5500.

Схематичный
график:



Задание В11



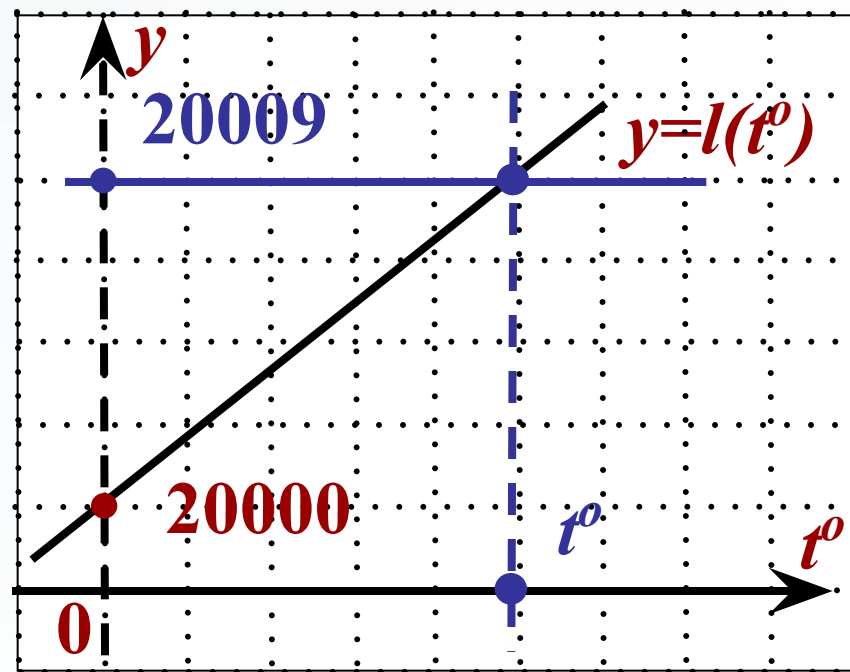
При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20 \text{ м}$. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0 (1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{}^{\circ}\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм ? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Функция:

$$l(t^{\circ}) = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t^{\circ}$$

Найти:

$$t^{\circ} \text{ при } l(t^{\circ}) = 20009 \text{ мм}$$



Задание В11



Решение. $l_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ мм}; \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}.$

$$l_0 = 20 \text{ м} = 20 \cdot 100 \text{ см} = 2000 \cdot 10 \text{ мм} = \\ = 20000 \text{ мм} = 2 \cdot 10^4 \text{ мм}$$

$$l(t^0) = 20000 + 2 \cdot 10^4 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} t^0$$

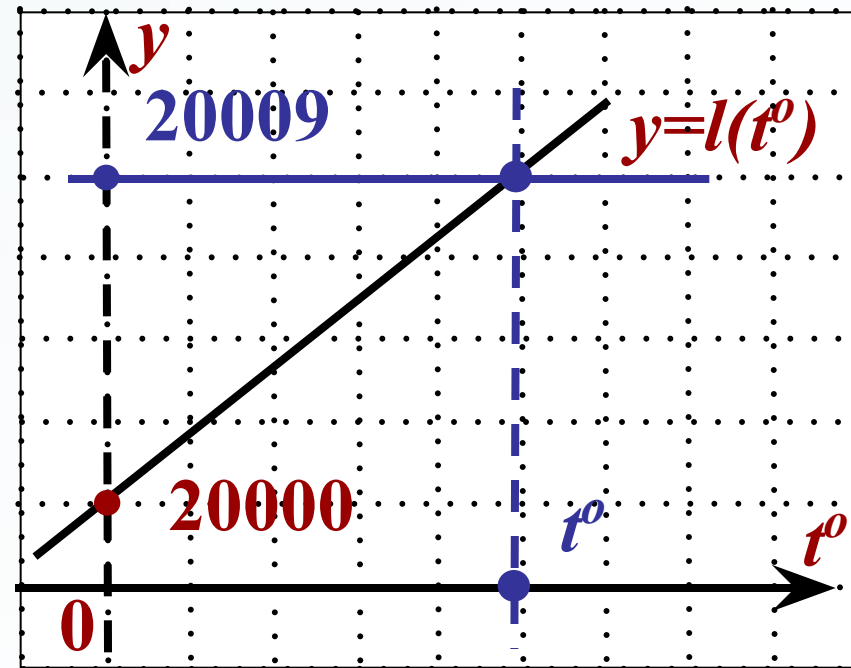
$$l(t^0) = 0,24 \cdot t^0 + 20000$$

$$20009 = 0,24 \cdot t^0 + 20000$$

$$9 = 0,24 \cdot t^0$$

$$t^0 = 37,5 \text{ °C}$$

Ответ: 37,5.



Спасибо за внимание!