

Фрактальная алгебра природы

Сергей Кокарев

РНОЦ Логос - Ярославль

НИИ ГСГФ - Фрязино

Архитектура

Храм Ченнакесава, Сопанатапура (Индия)

1268



Изобразительное искусство

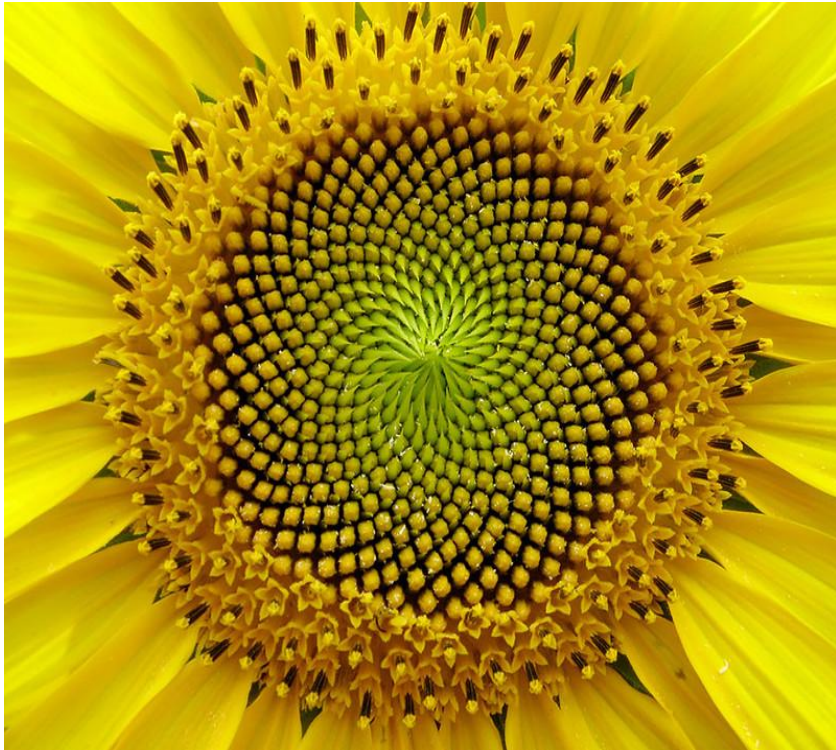
- Сальвадор Дали, Лицо войны, 1940



Течение жидкостей



Живая природа



Публикации

Julia G. Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles. – J. de Mathematiques pures et appliquees, 1918. – 8 ser., V. 1. – P. 47 – 245.

Fatou. Sur les equations fonctionnelles // Bulletin de la Soc. Math. de France. – 1919. – V. XLVII. – P. 161 - 271.

Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. – М.-Л.: НТИ, 1936.

Sullivan D. Iteration des fonctions analytiques complexes // C. r. Acad. sci. ser. 1. 294. № 9. P. 301-303. Paris. 1982.

Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. – New York: Freeman, 1982. (Перевод на русский: *Б. Мандельброт* Фрактальная геометрия природы.- Изд-во РХД, Ижевск, 2002).

Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 1990.

Lauwerier H. A. Fractals - images of chaos. – Princeton Univ. Press, 1991.

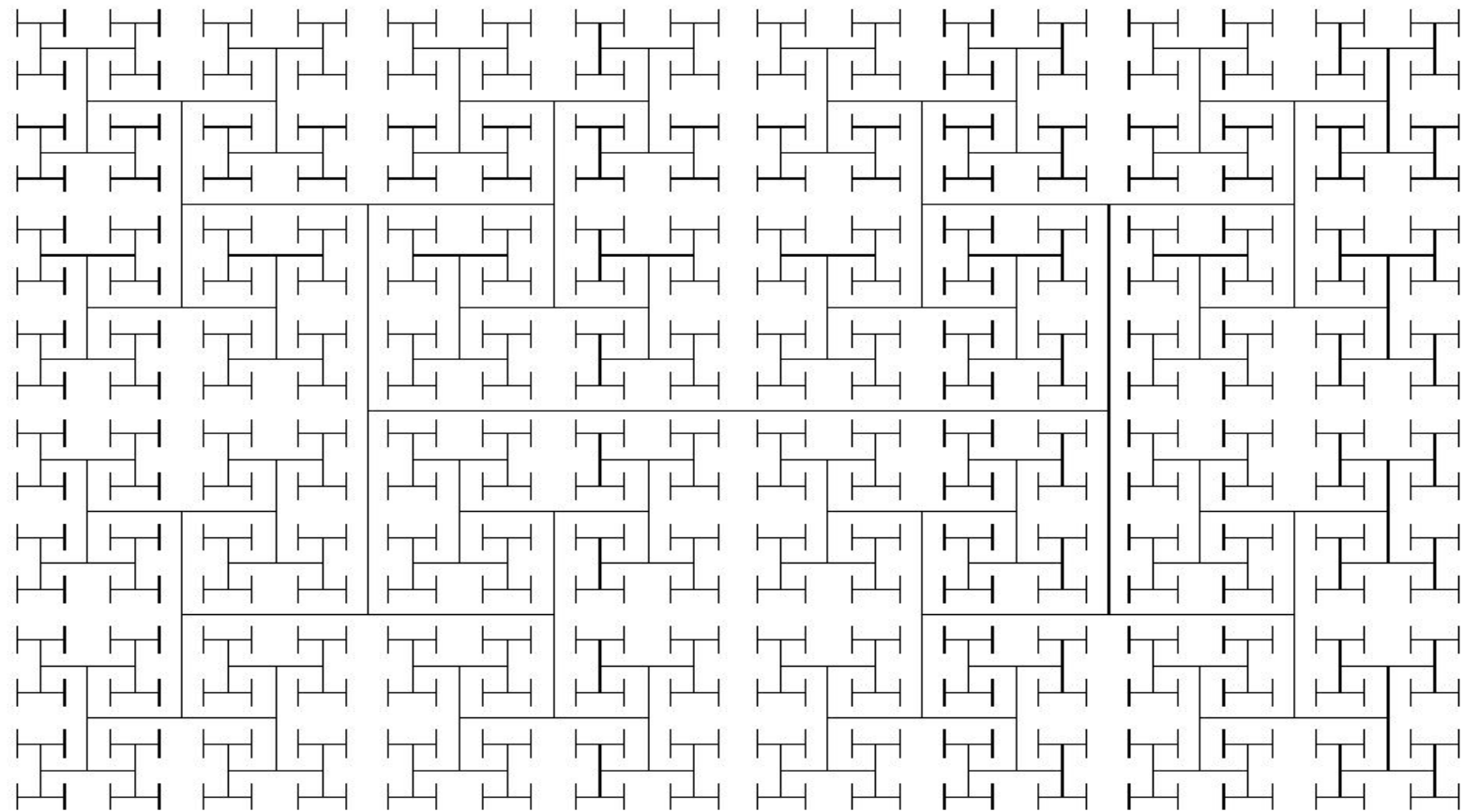
Еще публикации

1. А. Д. Морозов, Введение в теорию фракталов, Москва-Ижевск, 2002
2. Andrzej Katunin, A concise introduction to hypercomplex fractals, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton-London-New York, 2017
3. Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер, Красота фракталов (Образы комплексных динамических систем), М., Мир, 1993

Признаки фрактальных множеств

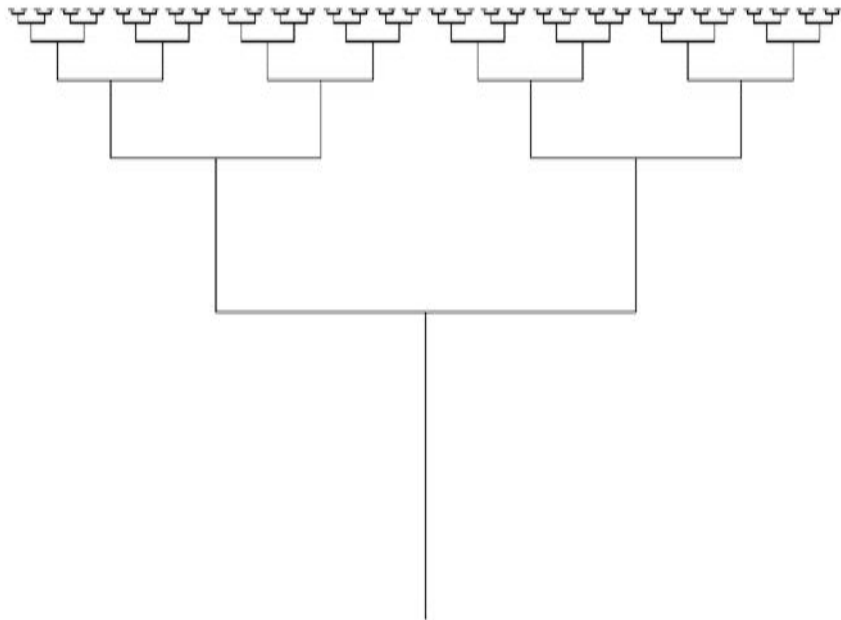
1. Тонкая структура на всех масштабах;
2. Нерегулярное (негладкое) строение;
3. Самоподобие (точное, приближенное, статистическое);
4. Дробная фрактальная размерность, большая топологической;
5. Алгоритмическое (рекурсивное) определение (конструктивные и динамические фракталы).

H-фрактал

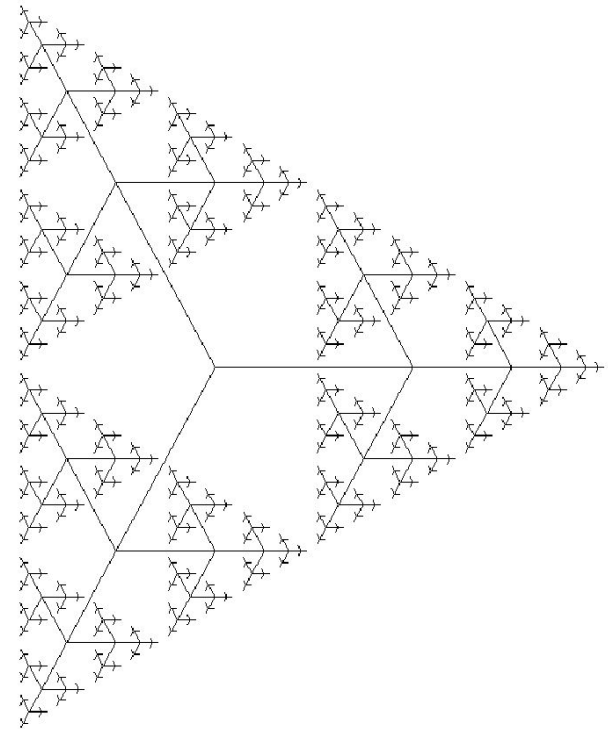


Деревья и системы исчисления

- Двоичное дерево

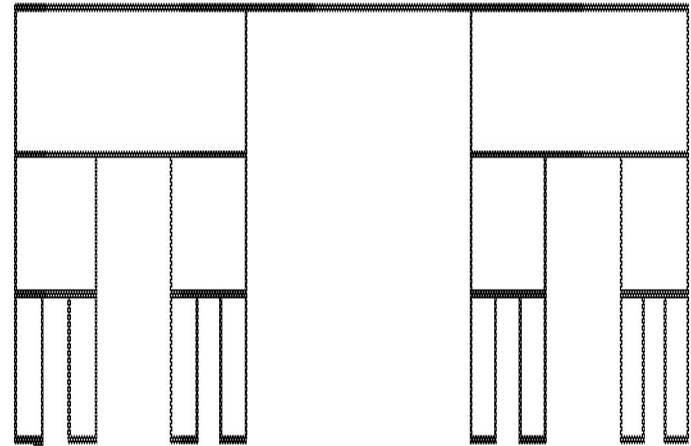
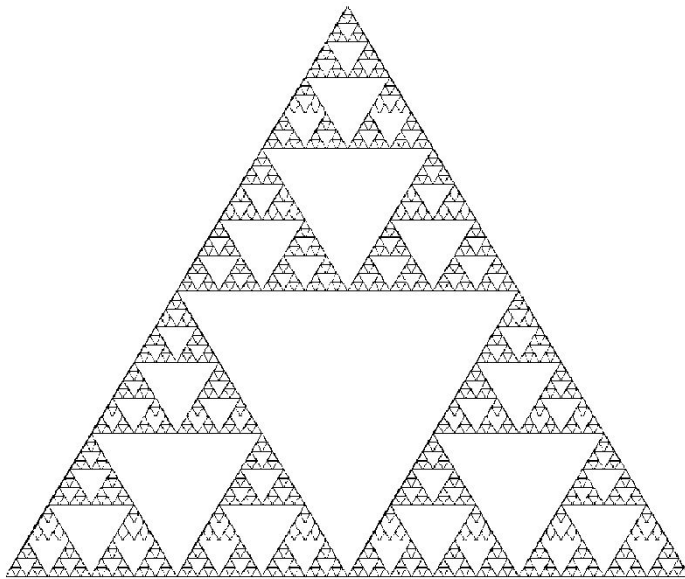


- Троичное дерево



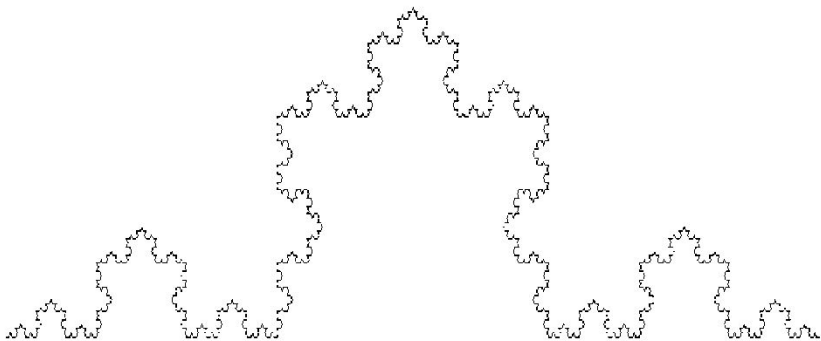
Классические алгоритмические фракталы-1

- Решето Серпинского
- Гребень Кантора

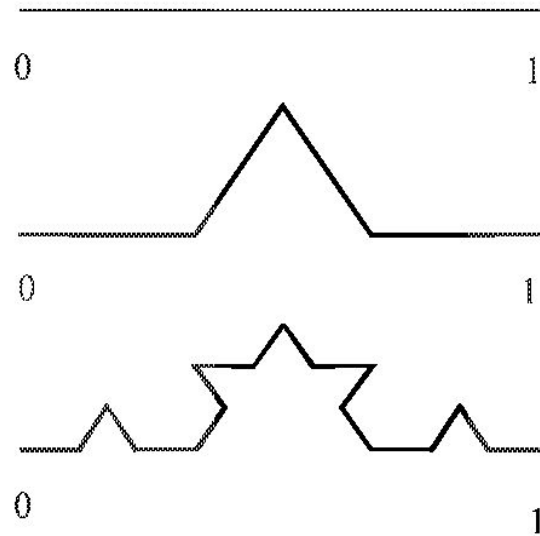


Классические алгоритмические фракталы-2

Кривая Коха

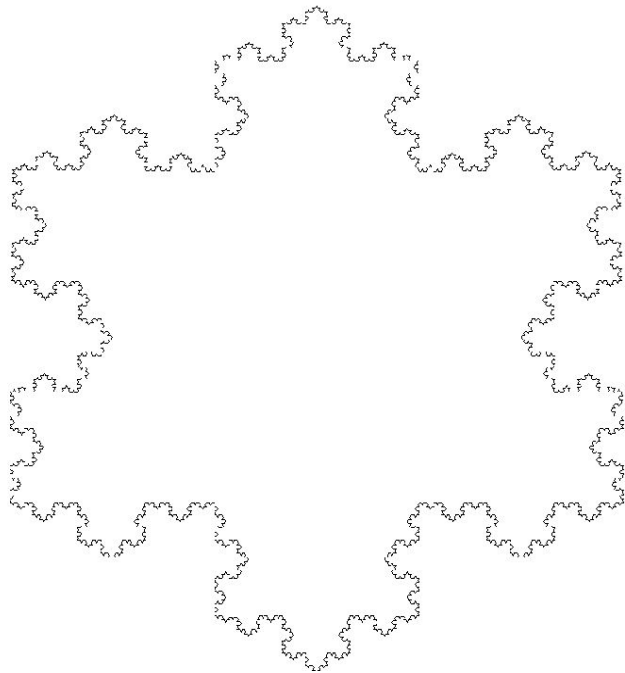


Последовательные итерации

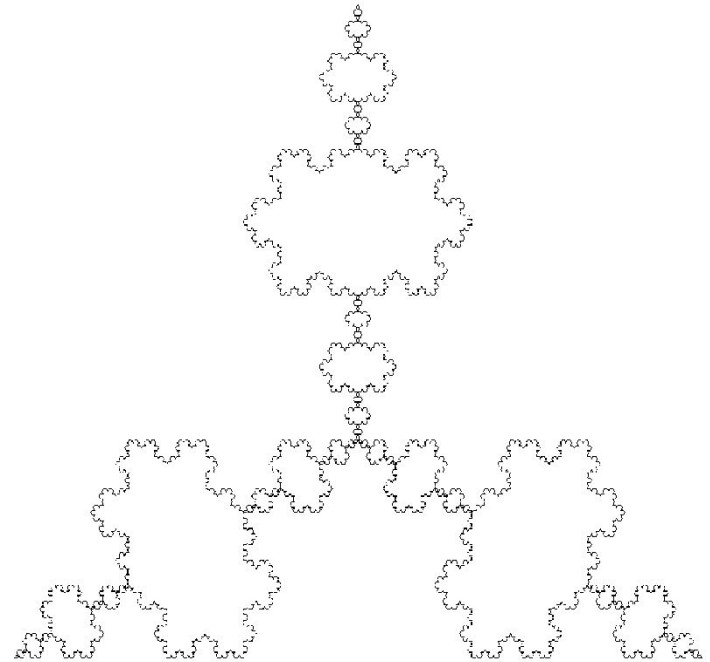


Классические алгоритмические фракталы-3

Остров Коха



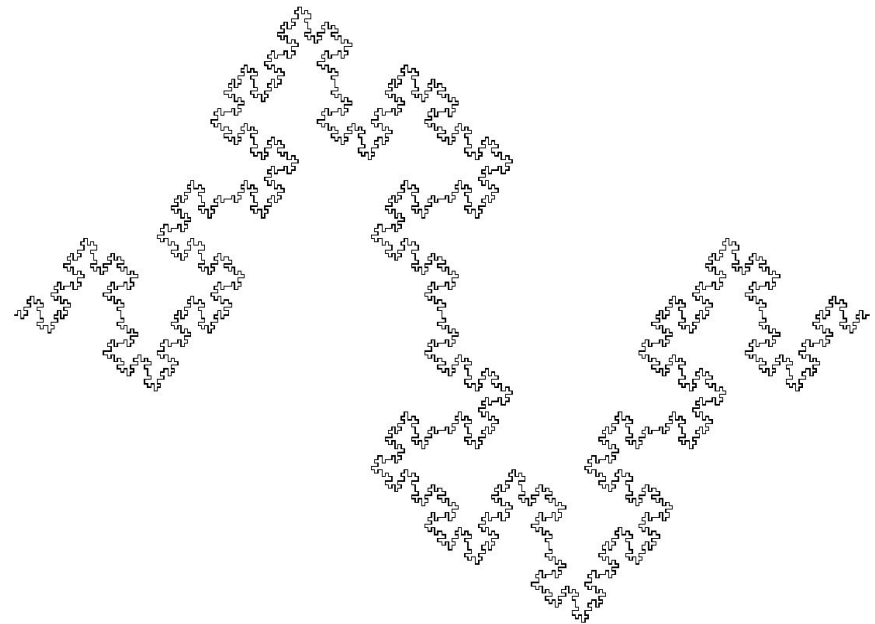
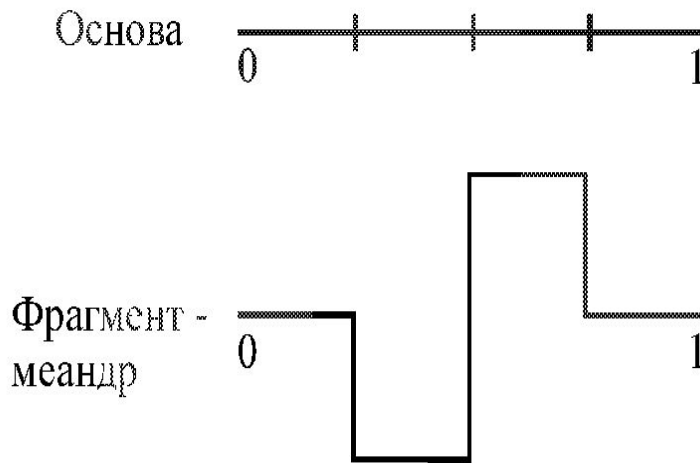
Антиостров Коха



Классические алгоритмические фракталы-4

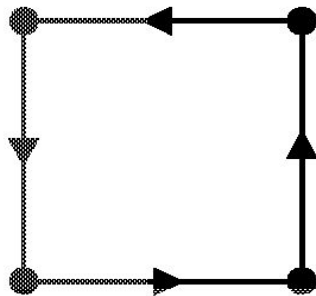
Основа и фрагмент фрактала Минковского

Фрактал Минковского



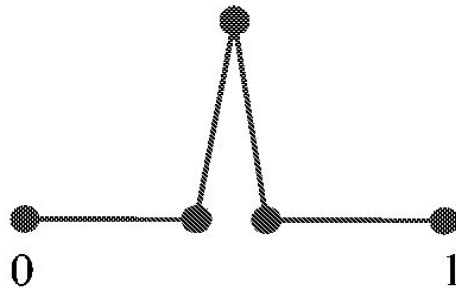
Классические алгоритмические фракталы-5

Основа:

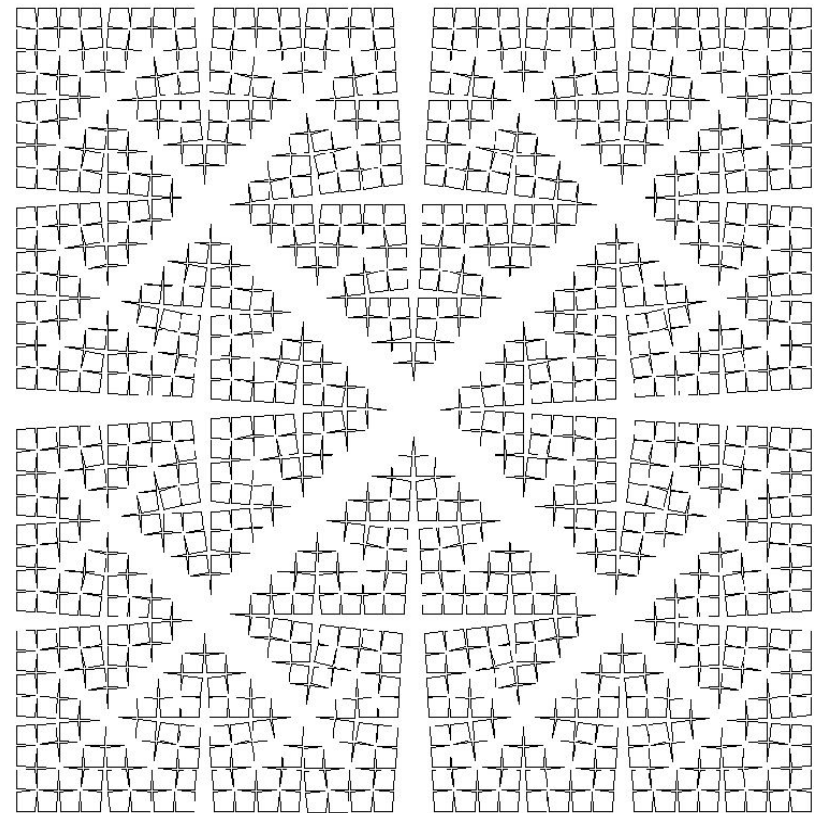


квадрат с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$.

Фрагмент:

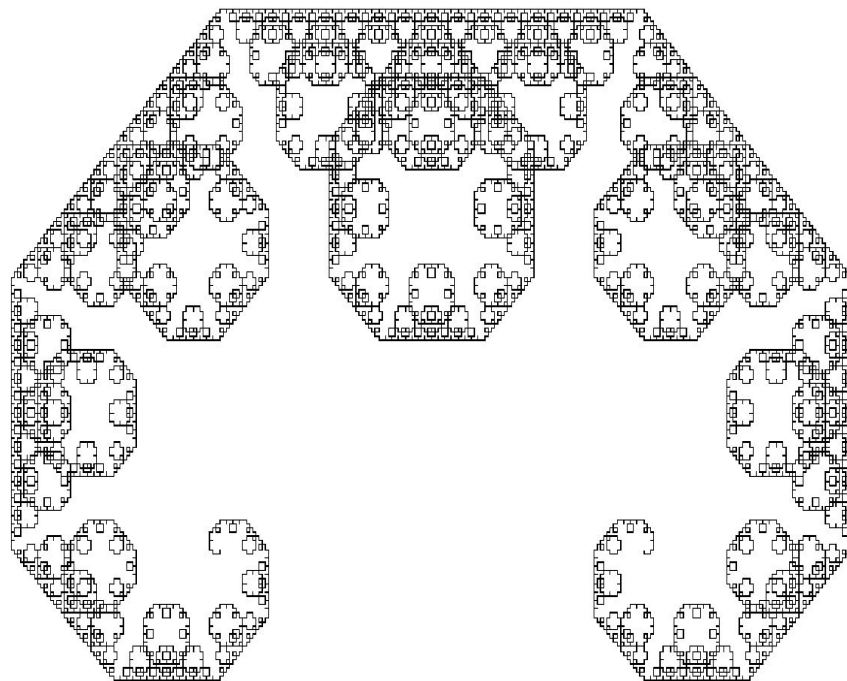
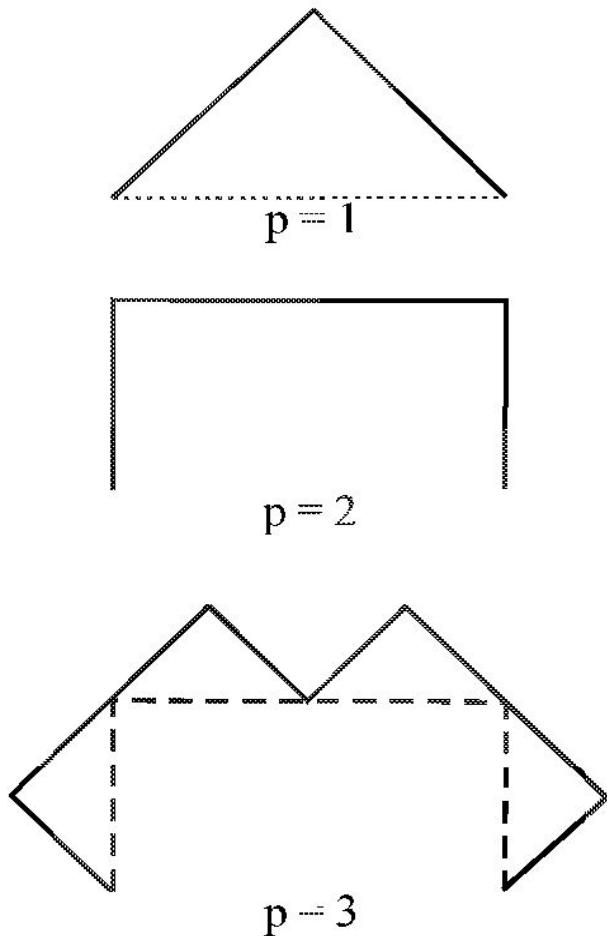


- Резаный квадрат



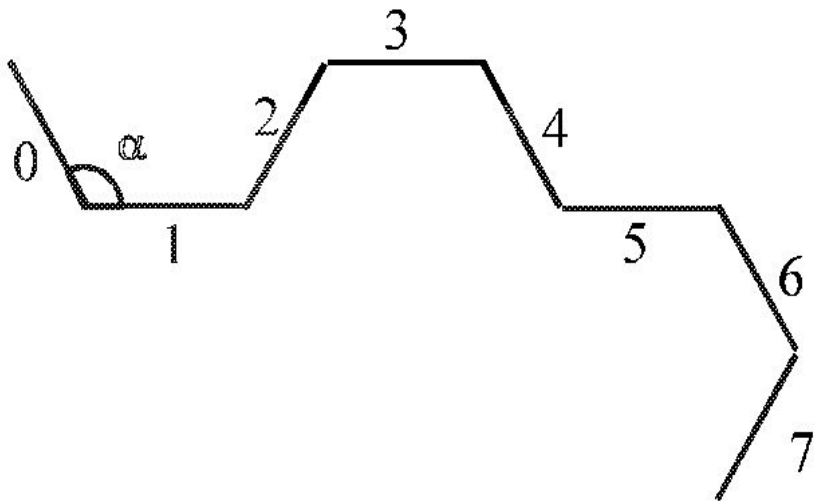
Классические алгоритмические фракталы-6

Фрактал Леви

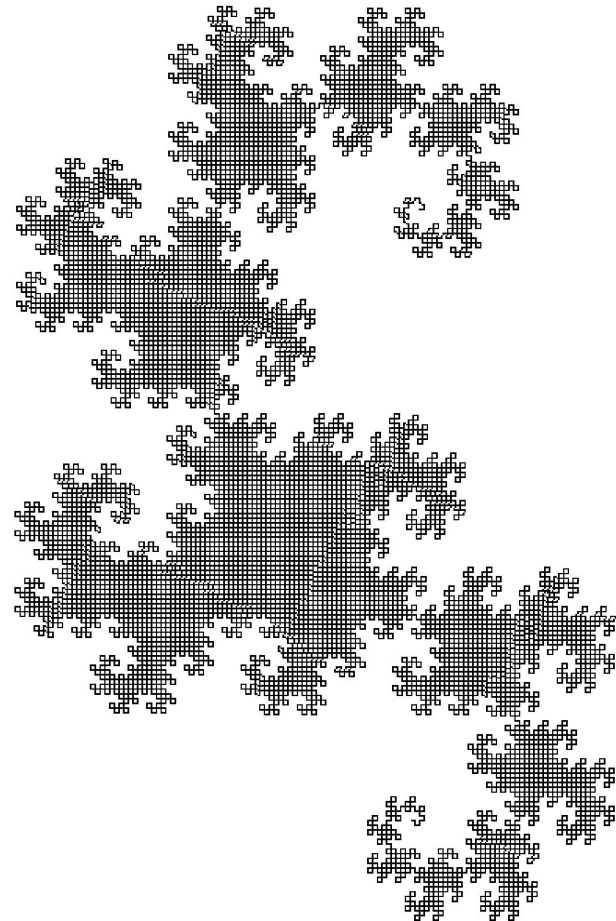


Классические алгоритмические фракталы-7

Фрагмент для
семейства драконов

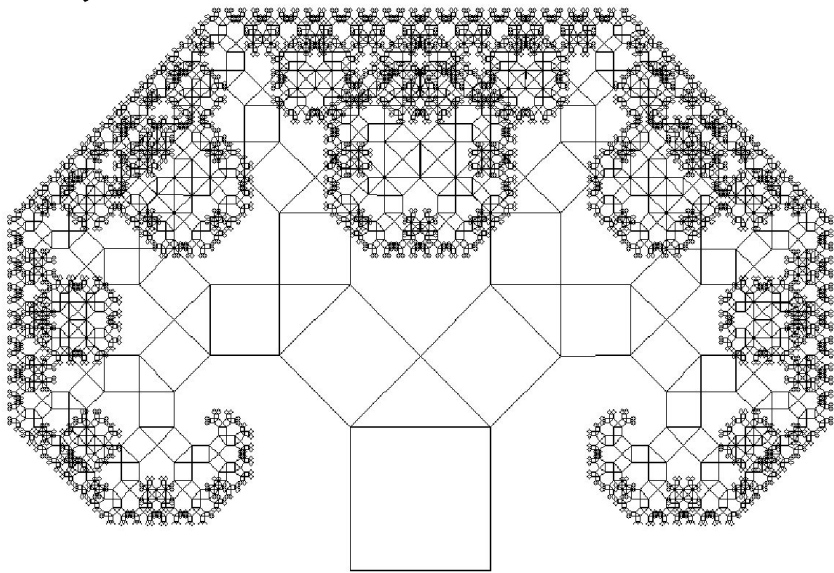


Кривая дракона

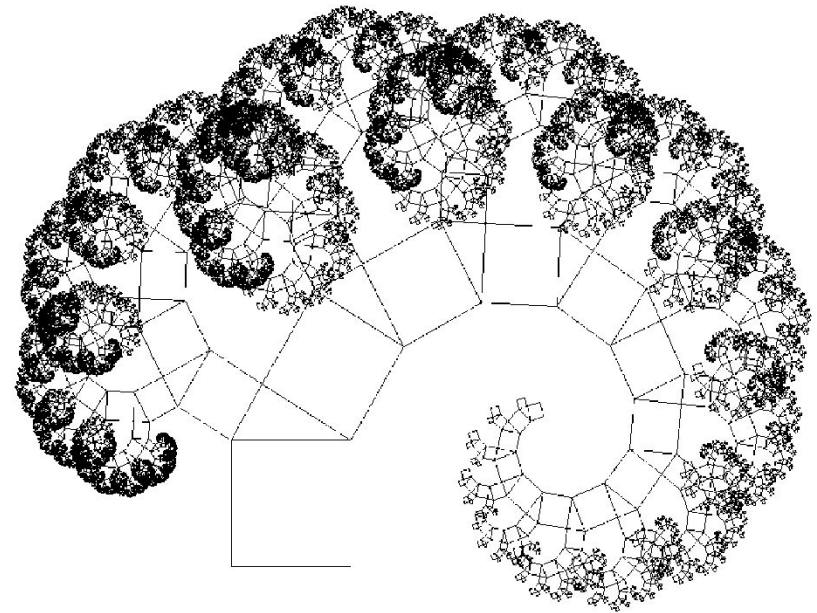


Классические алгоритмические фракталы-8

Дерево Пифагора

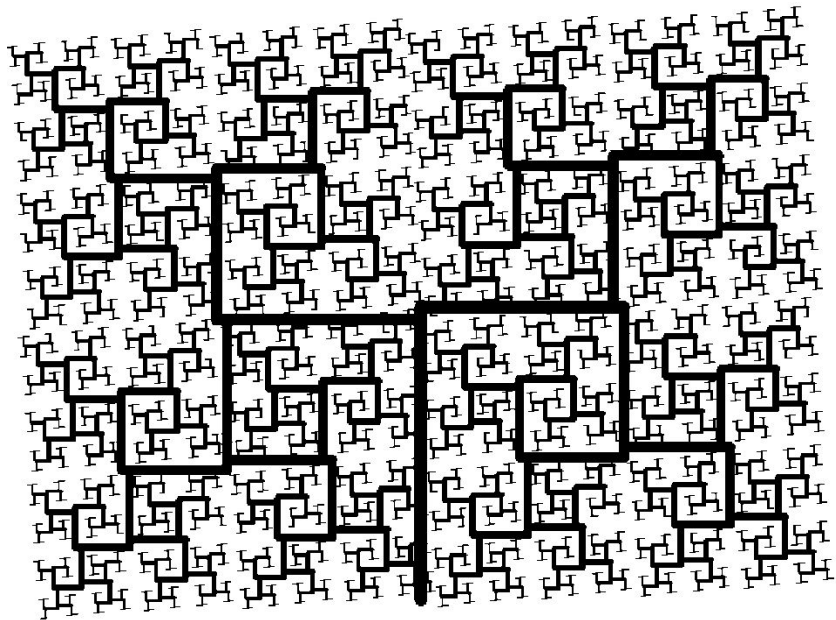


Склонившееся дерево
Пифагора

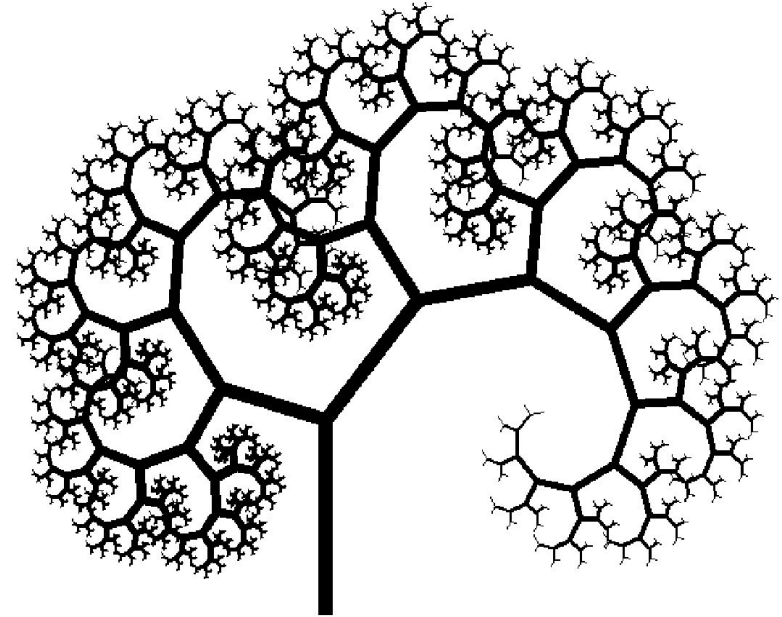


Классические алгоритмические фракталы-9

Дерево Мандельброта



Реалистичное дерево
Мандельброта



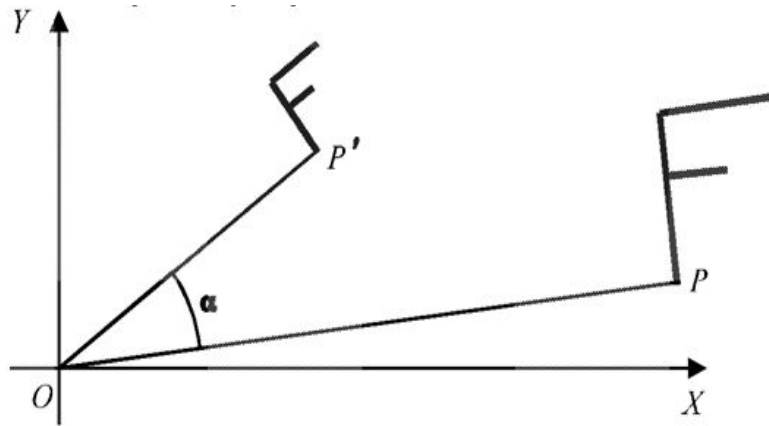
Общий подход

Конструктивный фрактал – инвариантное множество относительно преобразований плоскости.

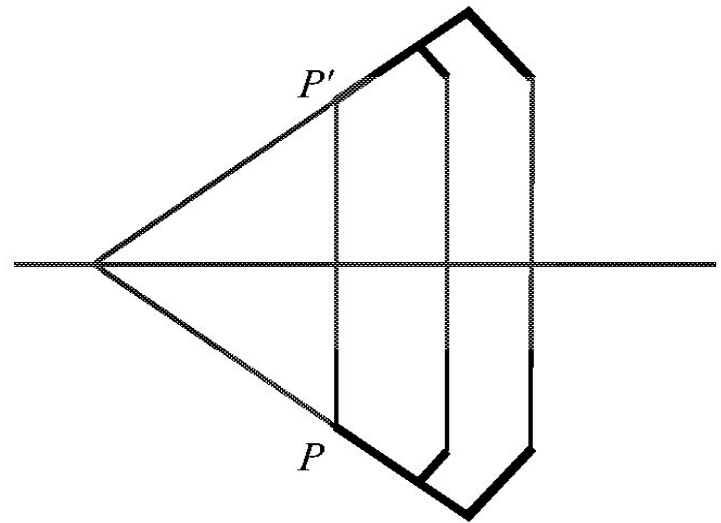
Преобразования плоскости: вращения (R), сдвиги (T), отражения относительно прямой (S), растяжения (D)

Типы преобразования

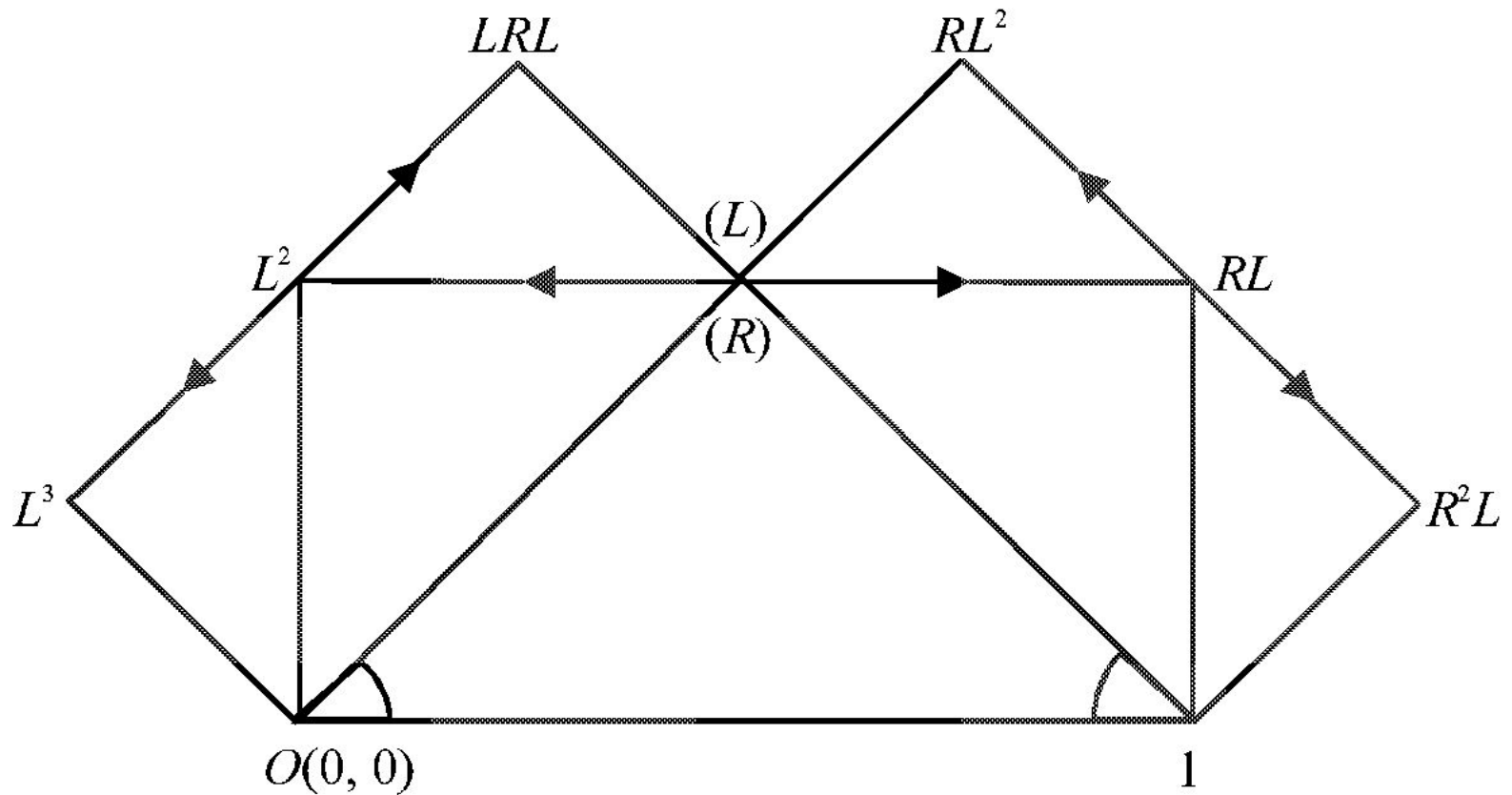
Растяжение-поворот
(DR)



Отражение (S)

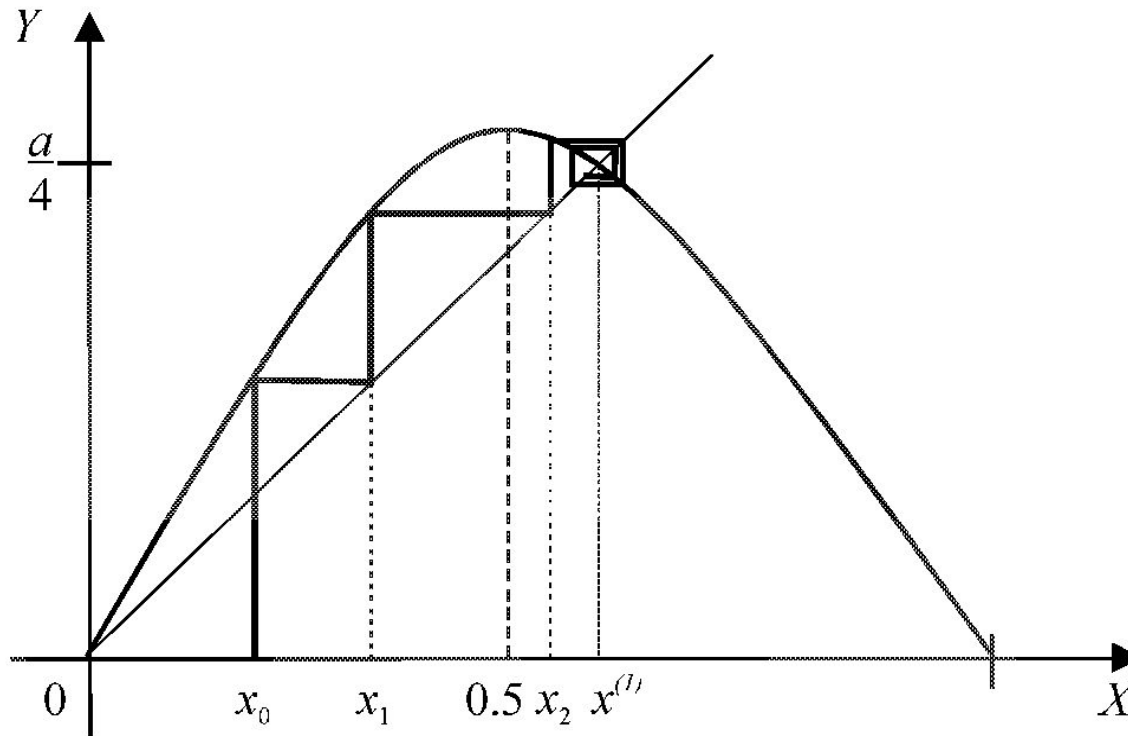


Алгебра фрактала Леви



Одномерный динамический фрактал: модель Верхольста (1845)

$$T : x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$



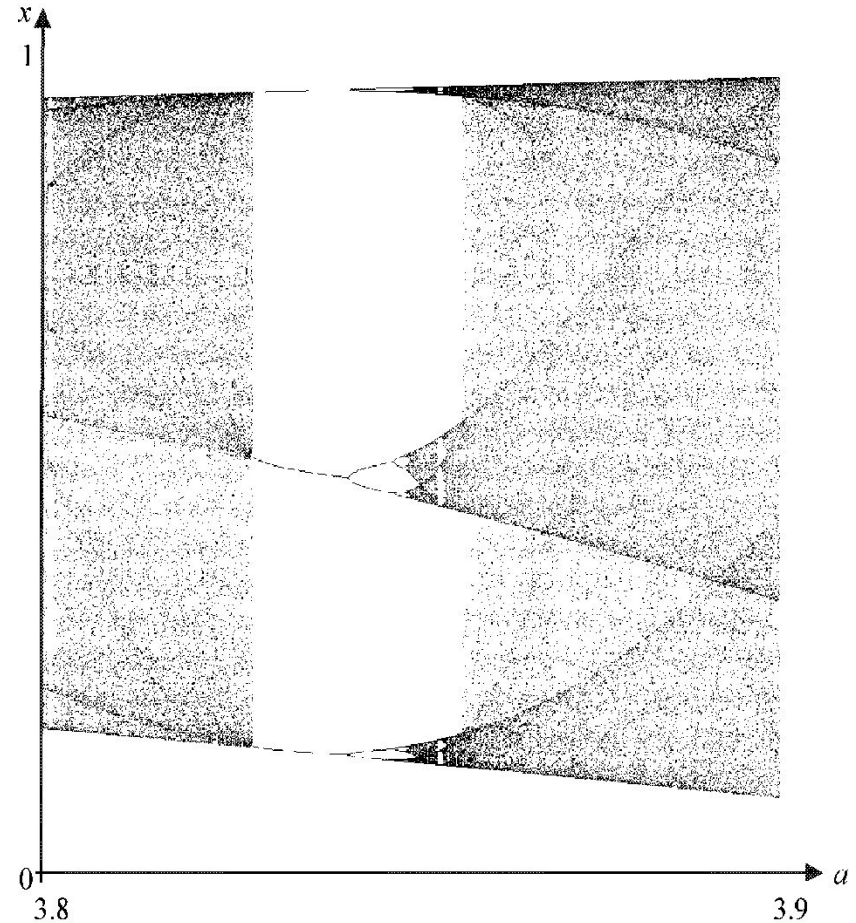
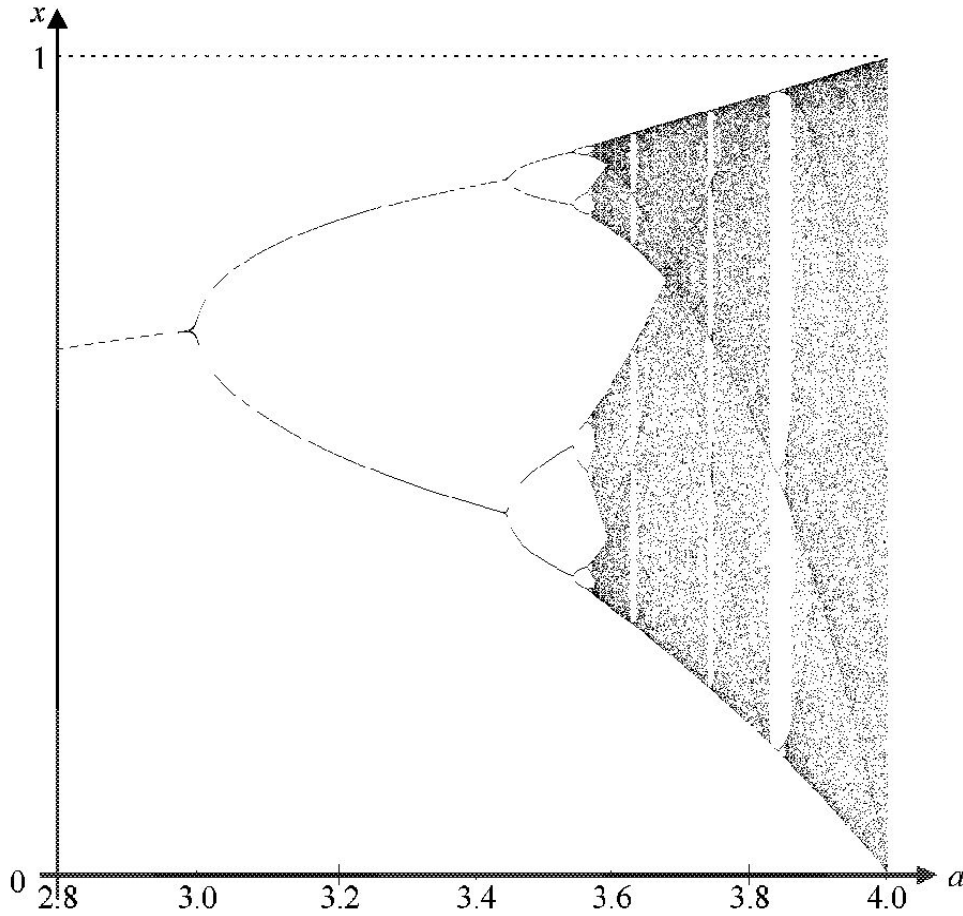
Свойства модели Верхольста

1. $0 < a < 1$ - одна неподвижная точка 0 – устойчивая;
2. $1 < a < 3$ - две неподвижных точки: 0 – неустойчивая, $(a-1)/a$ - устойчивая;
3. $3 < a < 3.449499$ – неподвижных точек нет, есть предельный цикл 2 порядка (две чередующихся точки)
4. $3.449499 < a < 3.544090$ - предельный цикл 4 порядка...

Сценарий Фейгенбаума: переход к хаосу

Последовательность бифуркационных значений a сходится к $a_\infty \approx 3.569946$ по геометрической прогрессии со знаменателем: ≈ 4.6692016 - постоянная Фейгенбаума

Диаграмма Фейгенбаума (детерминированный хаос)



Комплексные числа-1

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

\mathbb{C} — числовое поле!

(есть все 4 арифметические операции с привычными свойствами)

Комплексные числа-2

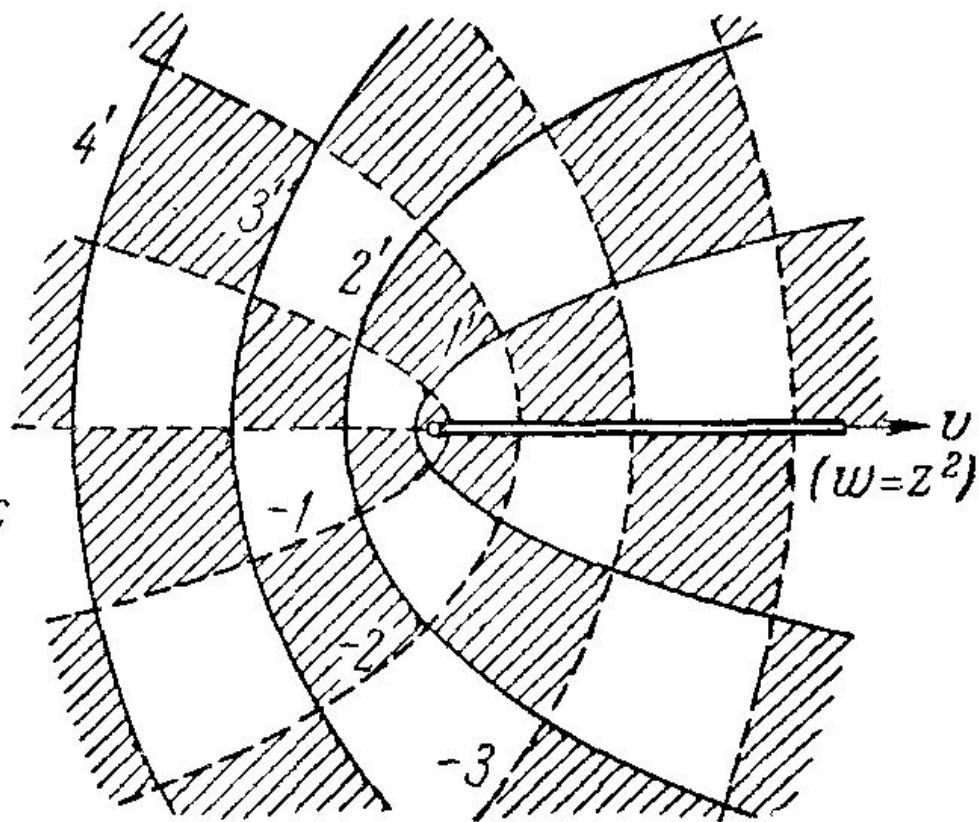
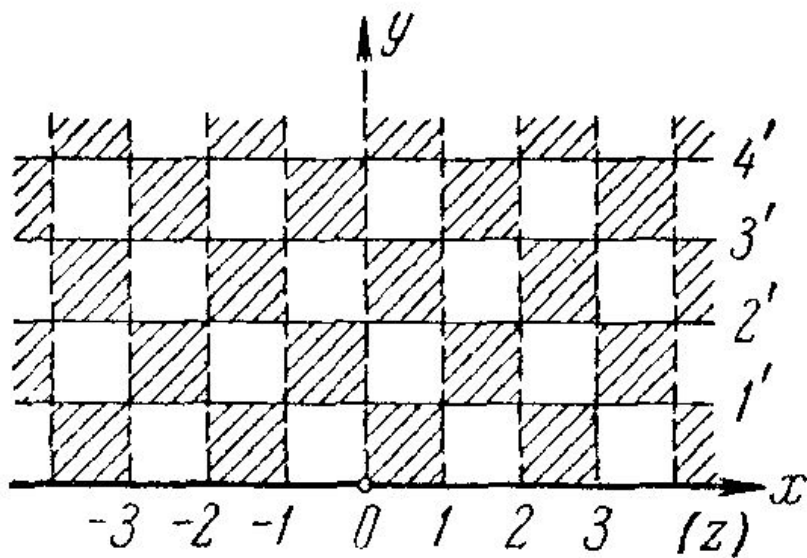
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ —}$$

КОММУТАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ;

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ —}$$

АССОЦИАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ.

Комплексные числа - 3



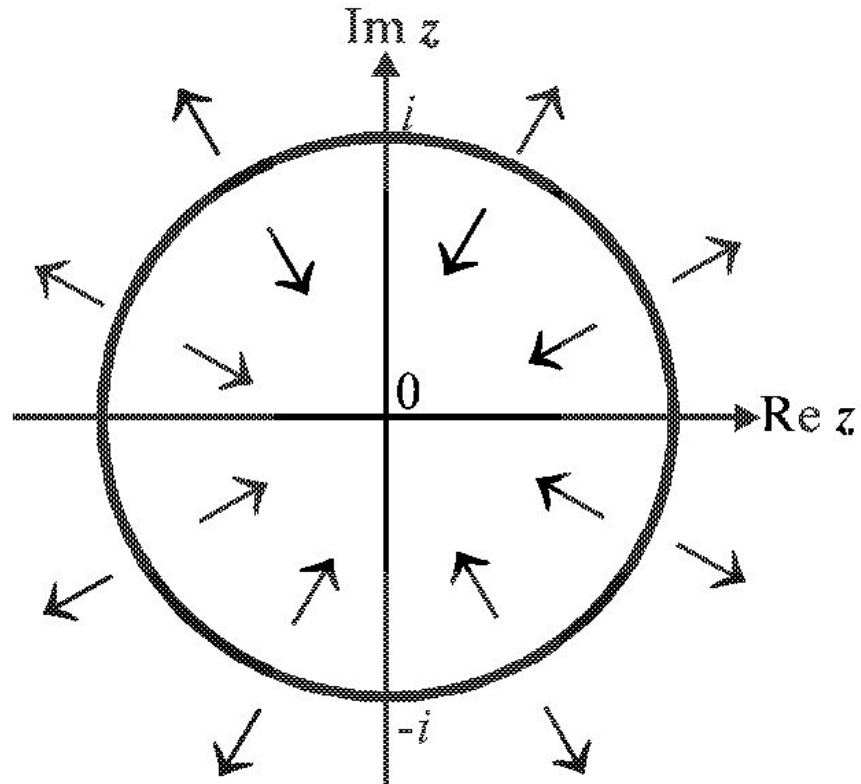
Голоморфная динамика

Итерации отображения (динамика в дискретном времени):

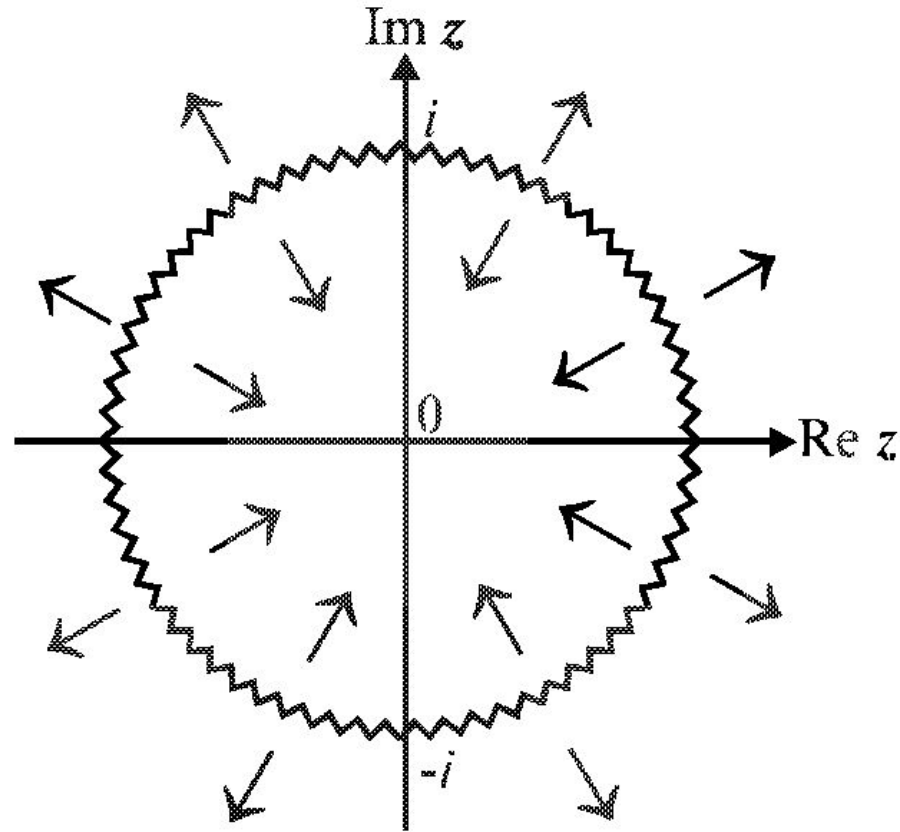
$$z_{n+1} = f(z_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Классический пример: $f(z) = z^2 + c$

Пример 1: $f(z) = z^2$



Пример 2: $f(z) = z^2 + c$ $|c| \ll 1$



Общий случай

Ключевой объект – циклические точки отображения: $f^p(\omega) = \omega$

где p – наименьшее натуральное ($p=1$ – неподвижная точка).

Циклические точки могут быть:

- a) притягивающими;
- b) отталкивающими;
- c) индифферентными.

Определение множества Жюлиа $J(f)$

замыкание множества всех
отталкивающих периодических точек
(замкнутый репеллер)=
граница области притяжения любого
притягивающего цикла =
множество точек, в окрестности
которых итерации не сходятся к
какой-либо аналитической функции
над \mathbb{C}

Свойства множества Жюлиа

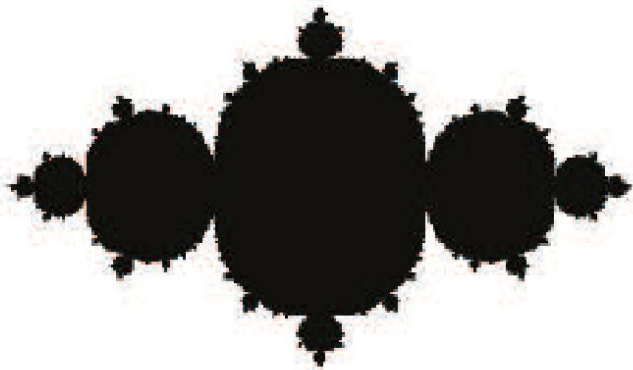
1. Непусто
2. Бесконечно (несчетно)
3. Замкнуто (содержит все пределы)
4. Компактно (содержится внутри некоторого круга)
5. Не содержит изолированных точек
6. Инвариантно относительно итераций f
7. Динамика в окрестности множества Жюлиа неустойчива
8. Обладает фрактальными свойствами (как правило!)

Пример множества Жюлиа

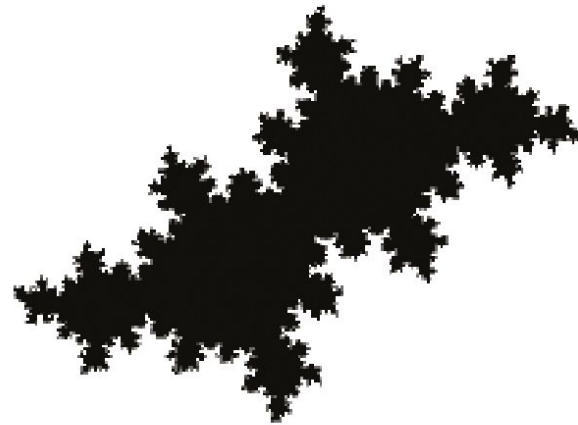


Figure 1.2: \mathcal{J} -set with $c = 0.3 + 0.022i$ under various magnifications.

Заполненные множества Жюлиа-1 (фрактал святого Марка и диск Зигеля)

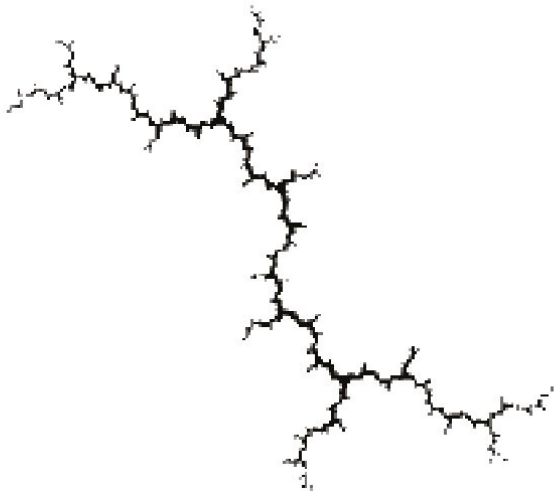


(a) $c = -0.75$

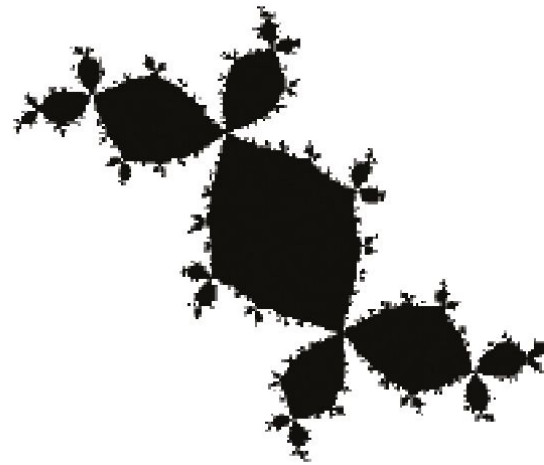


(b) $c = -0.390541 - 0.586788i$

Заполненные множества Жюлиа-2 (Дендрит и Кролик Дьюди)



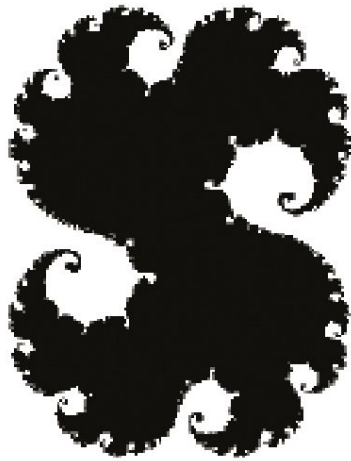
(c) $c = i$



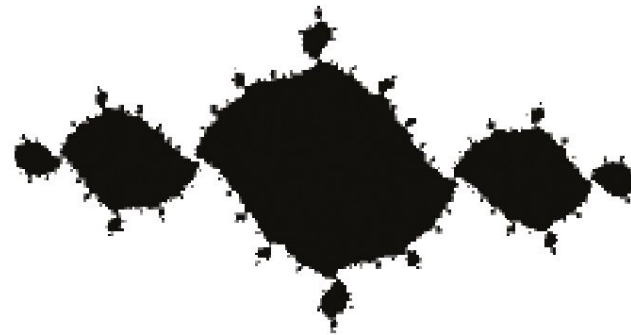
(d) $c = -0.123 + 0.745i$

Заполненные множества Жюлиа

-3



(e) $c = 0.27334 - 0.00742i$

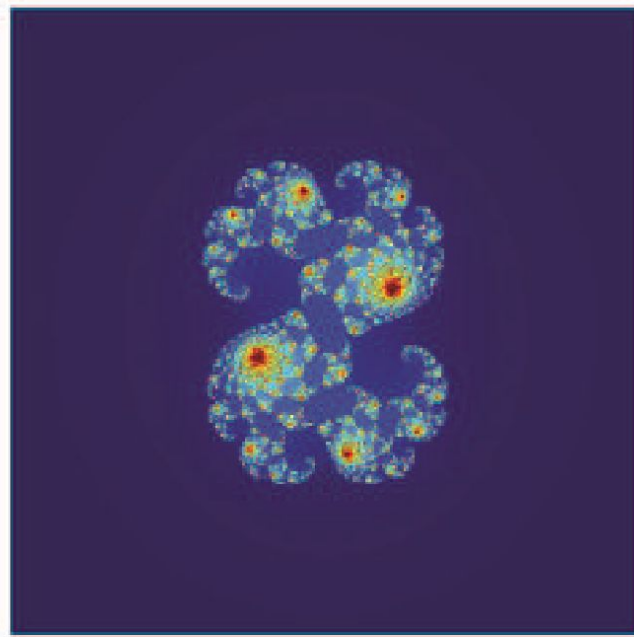


(f) $c = -1 + 0.1i$

Раскрашенные фракталы



(c) $c = -0.8 + 0.156i$



(d) $c = 0.3 + 0.022i$

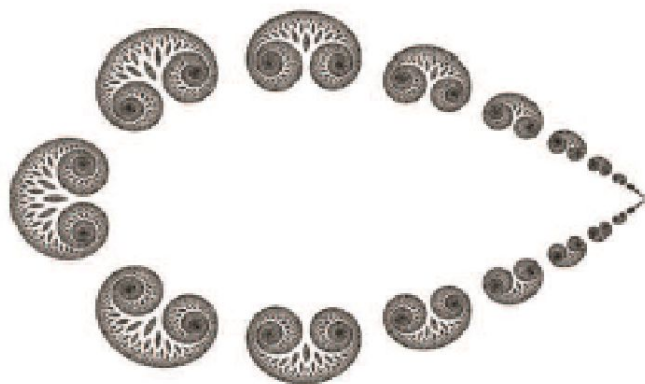
Полиномиальные множества

Жюлиа $z \rightarrow z^p + c$, $0 \leq p \leq 1$

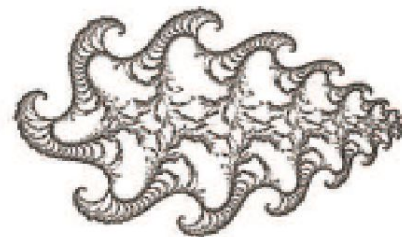
1. $p=0$ – постоянное отображение, c – устойчивая неподвижная точка, фракталов нет;
2. $p=1$ – постоянный сдвиг, бесконечно-удаленная точка – глобальный аттрактор, фракталов нет;
3. $0 < p < 1$ – бесконечно-удаленная точка – репеллер, фракталов нет

Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $1 < p < 2$

4. $1 \leq p \leq 2$ - фрактальные множества существуют только для рациональных p (теорема Лю, $p=1.5$ - множества Глинна).



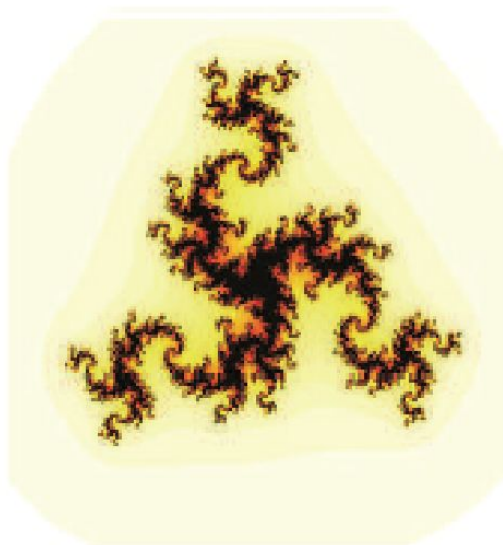
(a) $c = -0.1948$



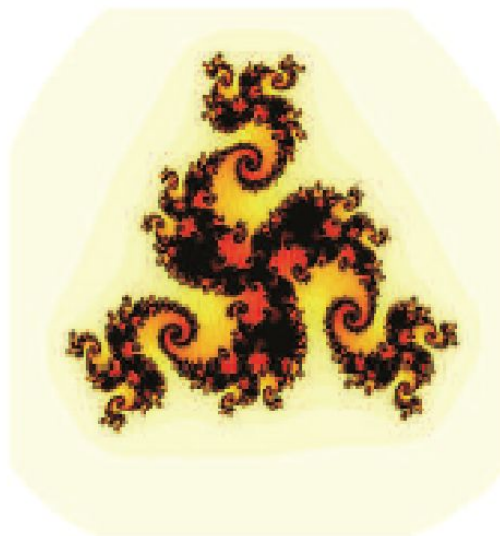
(b) $c = -0.2 + 0.014i$

Figure 1.8: Examples of Glynn sets.

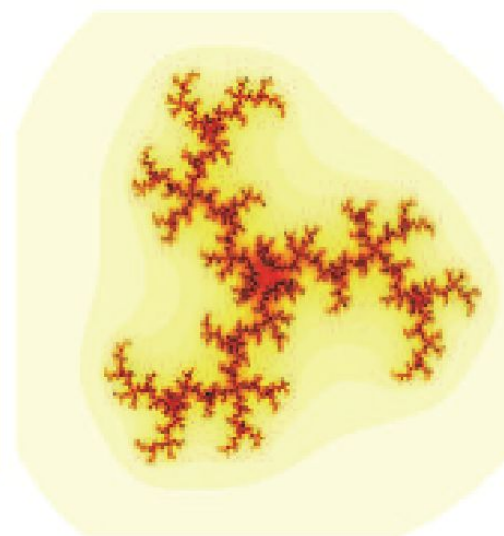
Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $p=3$



(a) $\mathcal{J}_3(-0.19, 0.86)$

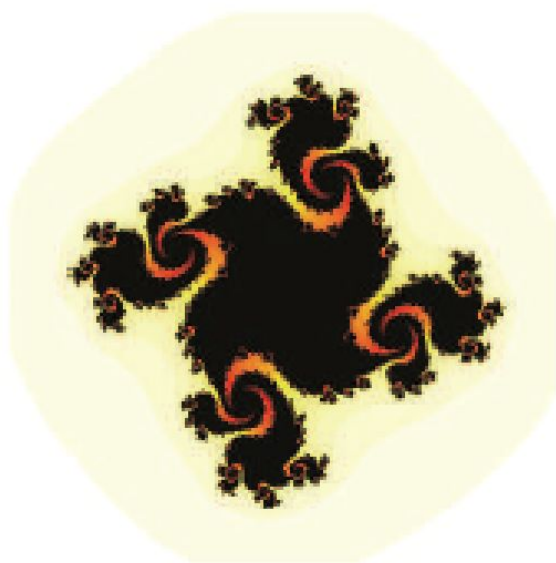


(b) $\mathcal{J}_3(-0.12, 0.8)$

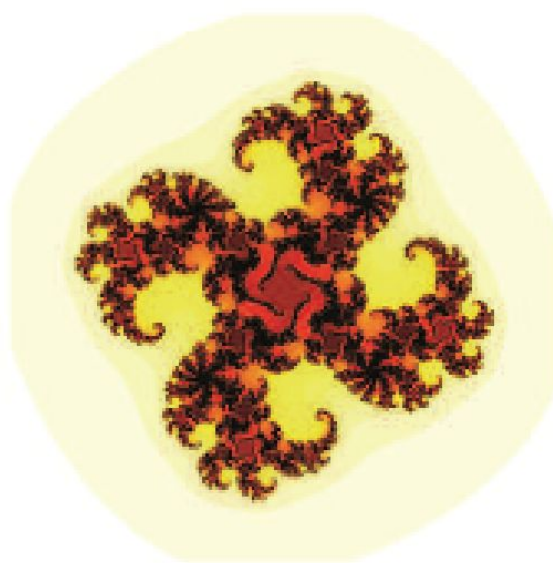


(c) $\mathcal{J}_3(-0.63, 0.29)$

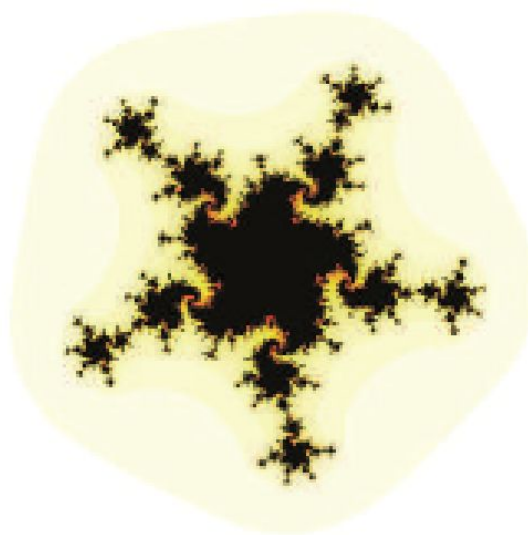
Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $p=4-5$



(d) $\mathcal{J}_4(-0.6, 0.4)$

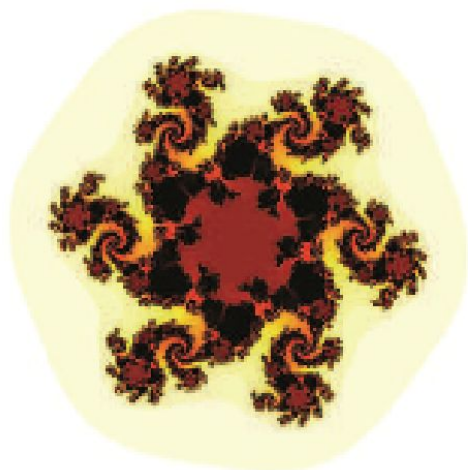


(e) $\mathcal{J}_4(-0.3, 0.46)$

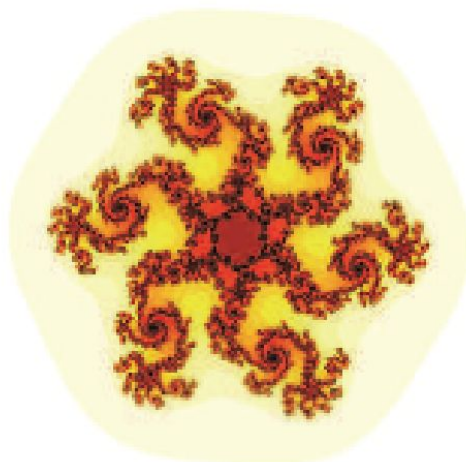


(f) $\mathcal{J}_5(-0.74, 0.81)$

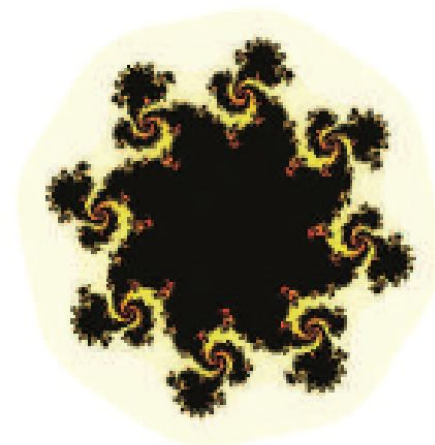
Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $p=6-8$



(g) $\mathcal{J}_6(-0.5, 0.58)$

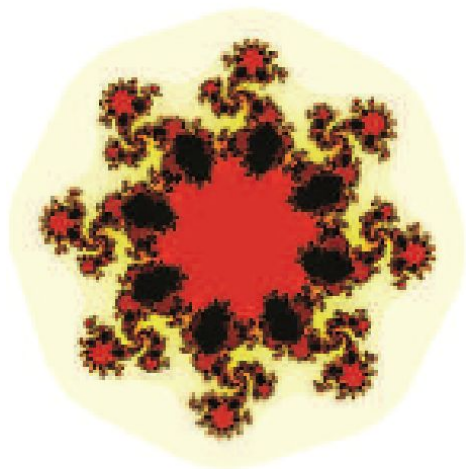


(h) $\mathcal{J}_6(-0.7, 0.3)$

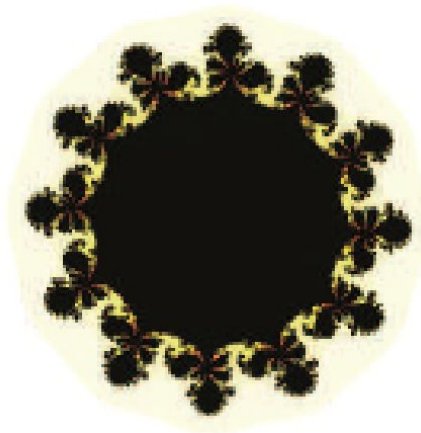


(i) $\mathcal{J}_8(0, 0.82)$

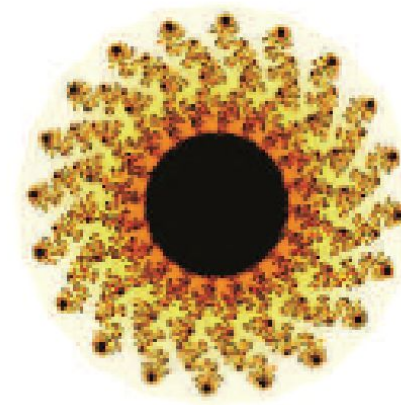
Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $p=8-20$



(j) $\mathcal{J}_8 (-0.65, 0.52)$

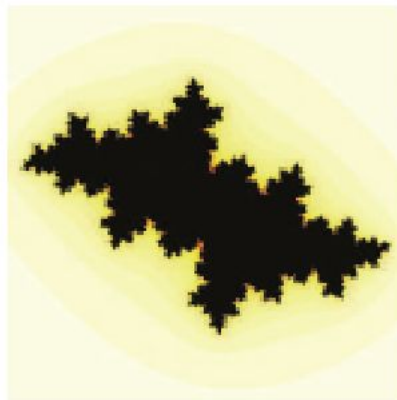


(k) $\mathcal{J}_{12} (-0.69, 0.52)$

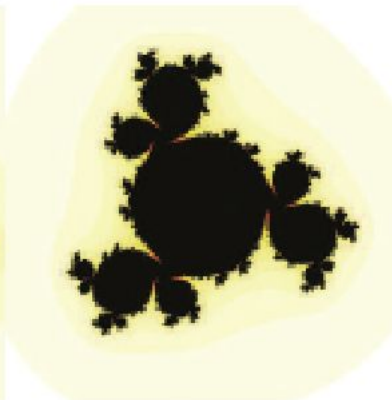


(l) $\mathcal{J}_{20} (-0.46, 0.8)$

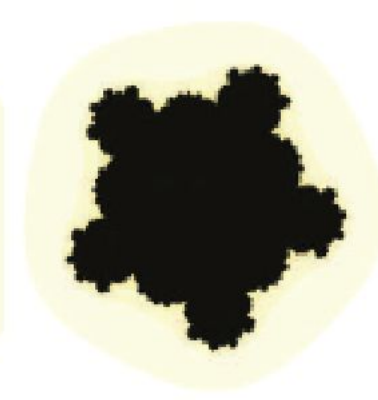
Полиномиальные множества Жюлиа и Фату: $p \rightarrow \infty$



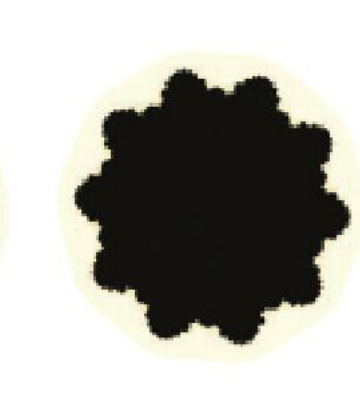
(a) $J_2(-0.5, 0.5)$



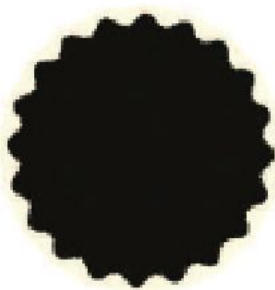
(b) $J_3(-0.5, 0.5)$



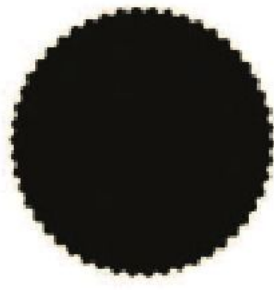
(c) $J_5(-0.5, 0.5)$



(d) $J_{10}(-0.5, 0.5)$



(e) $J_{20}(-0.5, 0.5)$



(f) $J_{50}(-0.5, 0.5)$



(g) $J_{100}(-0.5, 0.5)$



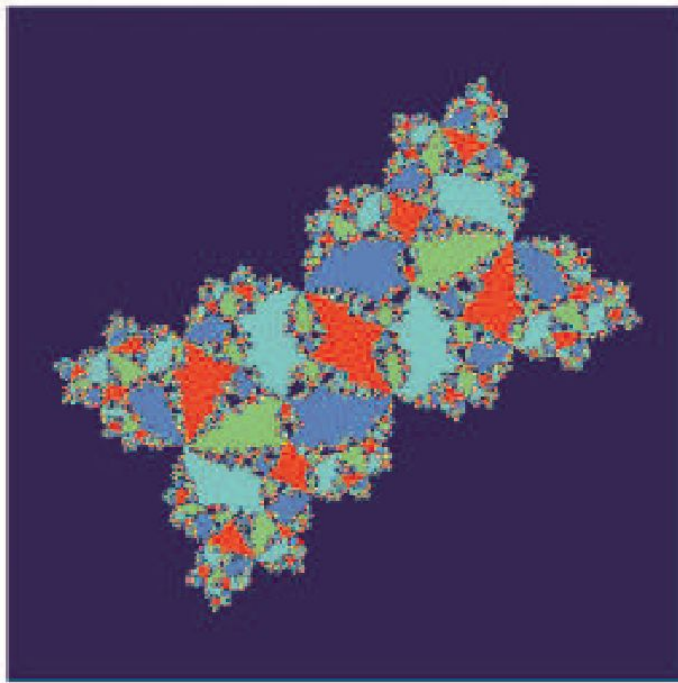
(h) $J_{1000}(-0.5, 0.5)$

Полиномиальные множества

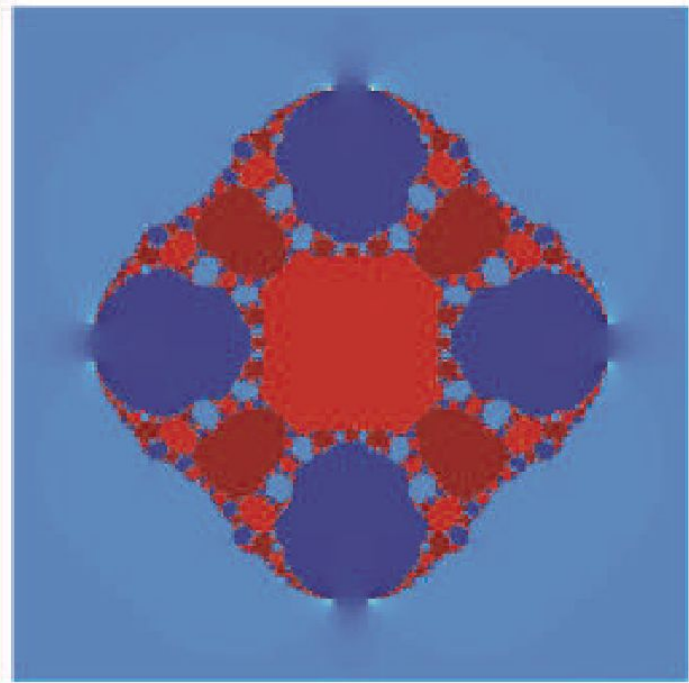
Жюлиа и Фату: $p < -1$, p -

рационально

Вырожденные множества Жюлиа:

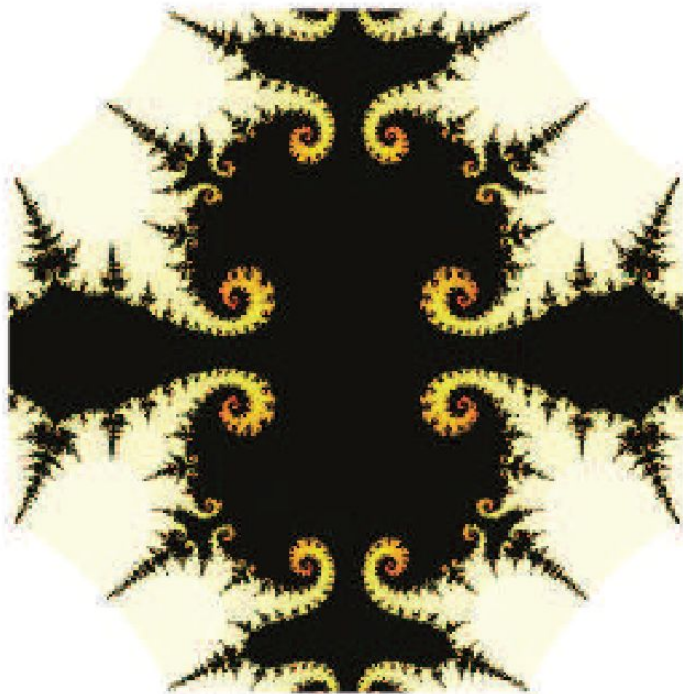


(c) $p = -2$,
 $c = -0.73 + 0.22i$

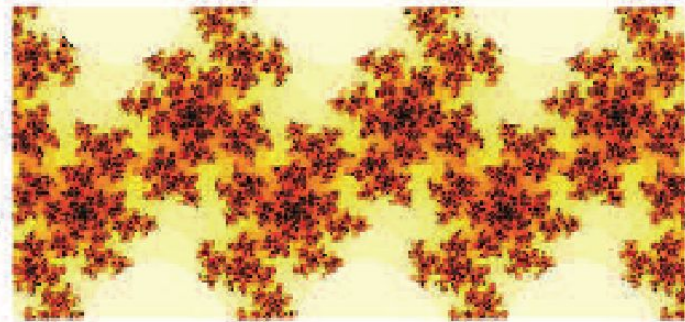


(d) $p = -4$,
 $c = -0.791$

Трансцендентные множества Жюлиа и Фату

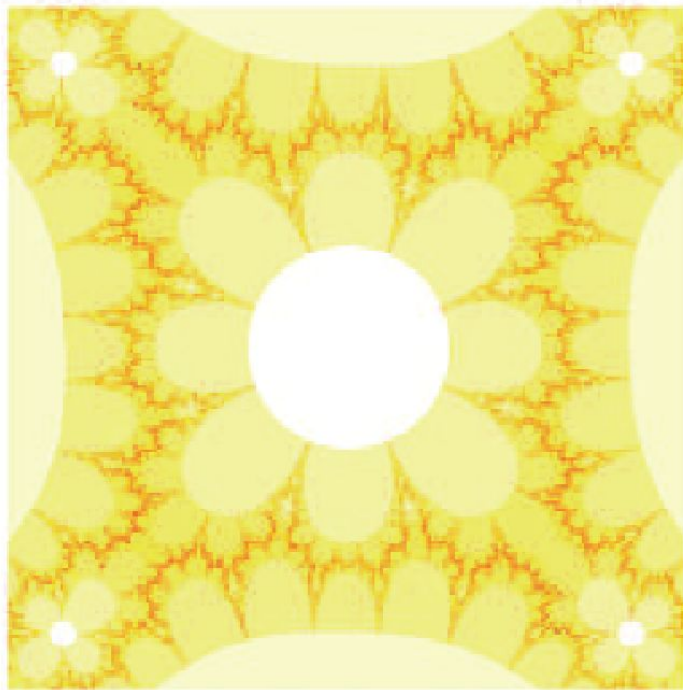


(a) $z \rightarrow \sin(z^2) + c, c = 0.3$



(b) $z \rightarrow \cos(z) + ic, c = -1 + 0.29i$

Трансцендентные множества Жюлиа и Фату



(c) $z \rightarrow 1/\sinh(z^2) + c, c = 0.01i$



(d) $z \rightarrow \exp(c/z^2), c = -0.4 + 0.7i$

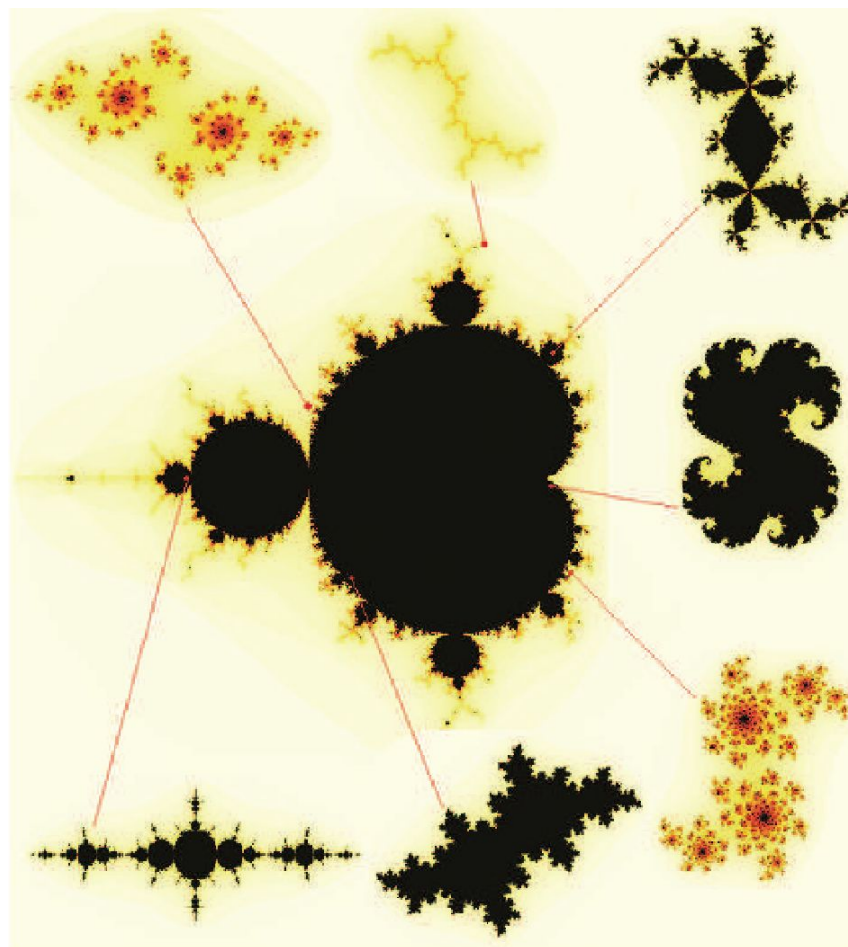
Что такое фрактал Мандельброта?

Множество (фрактал) Мандельброта M – это множество значений комплексного параметра c , при котором итерации нуля не уходят на бесконечность!

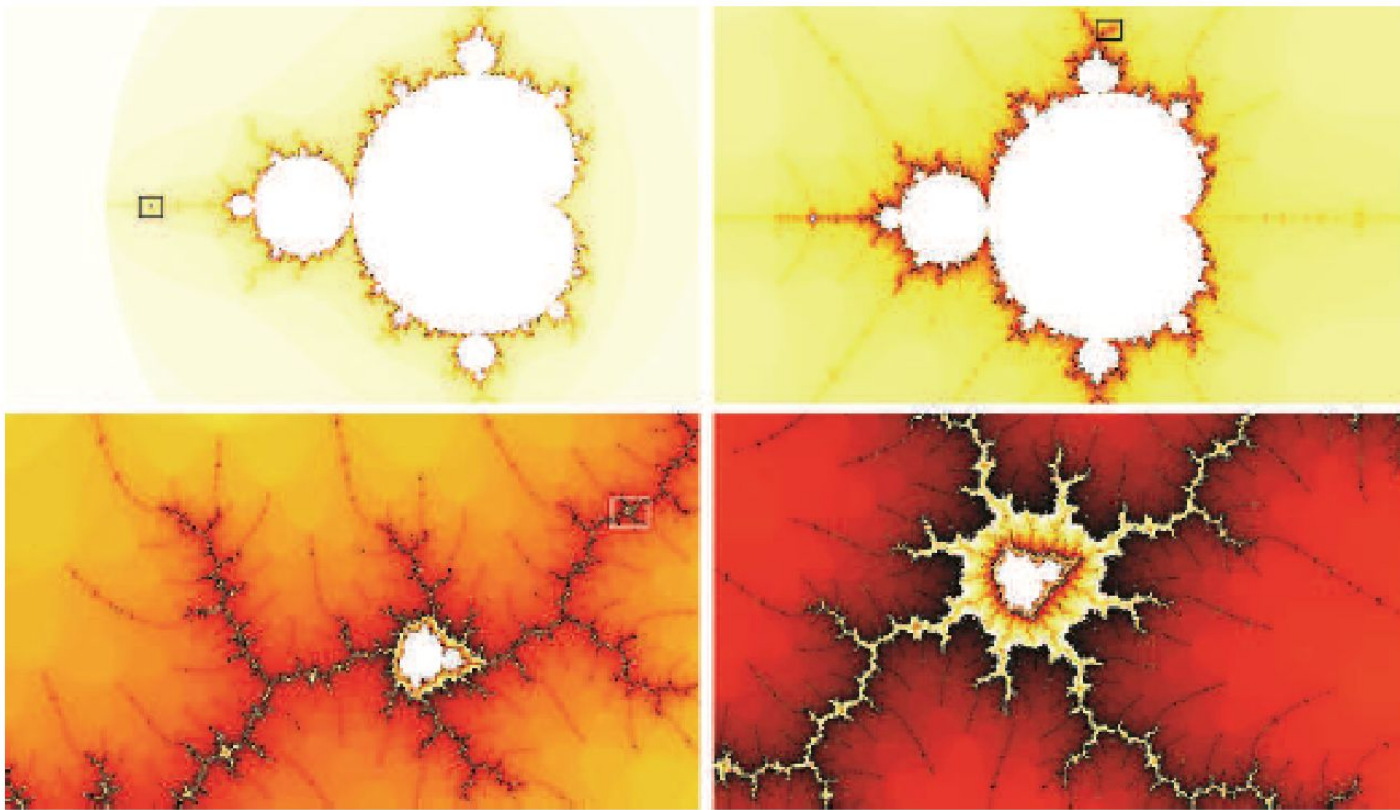
Фрактал Жюлиа «живет» на плоскости динамической переменной z .

Фрактал Мандельброта «живет» на плоскости параметров преобразования.

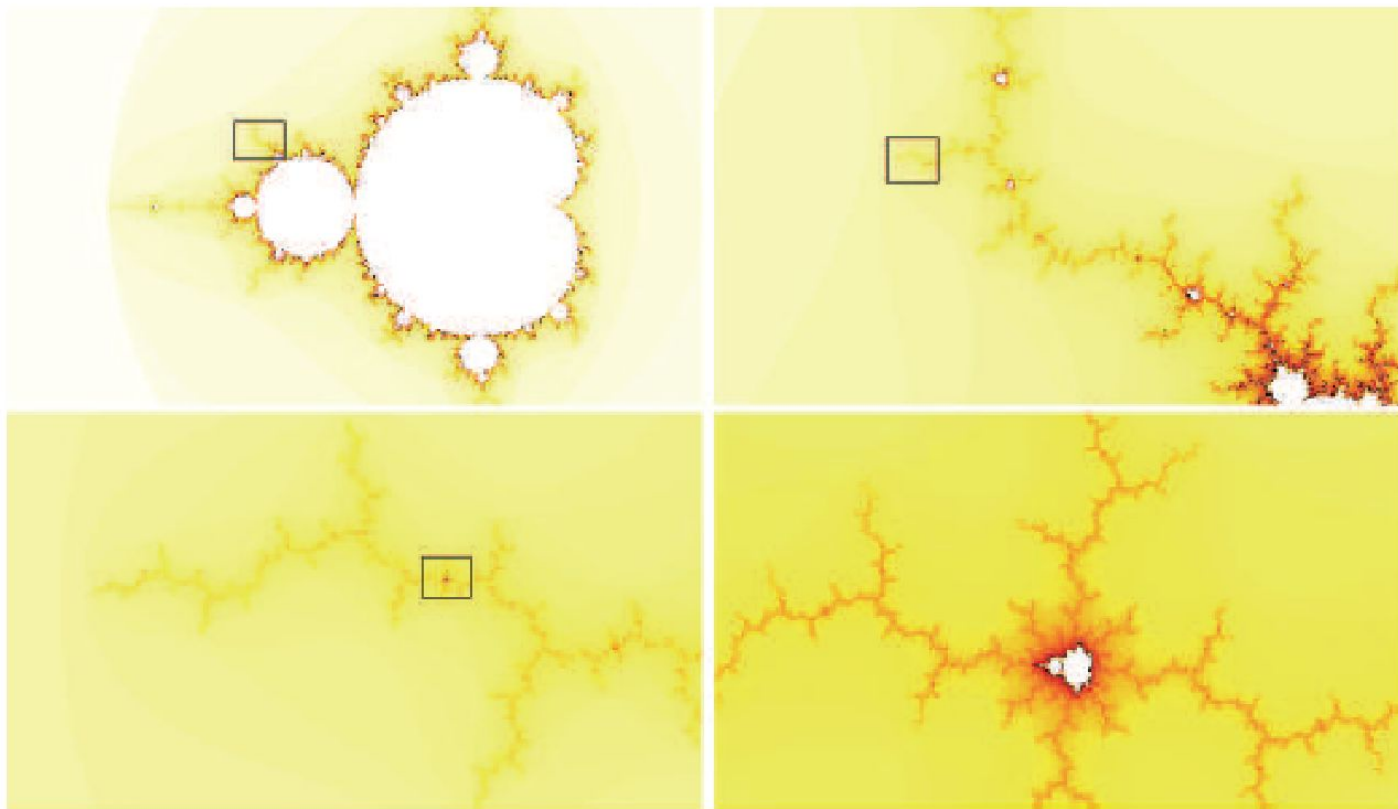
Фрактал Мандельброта



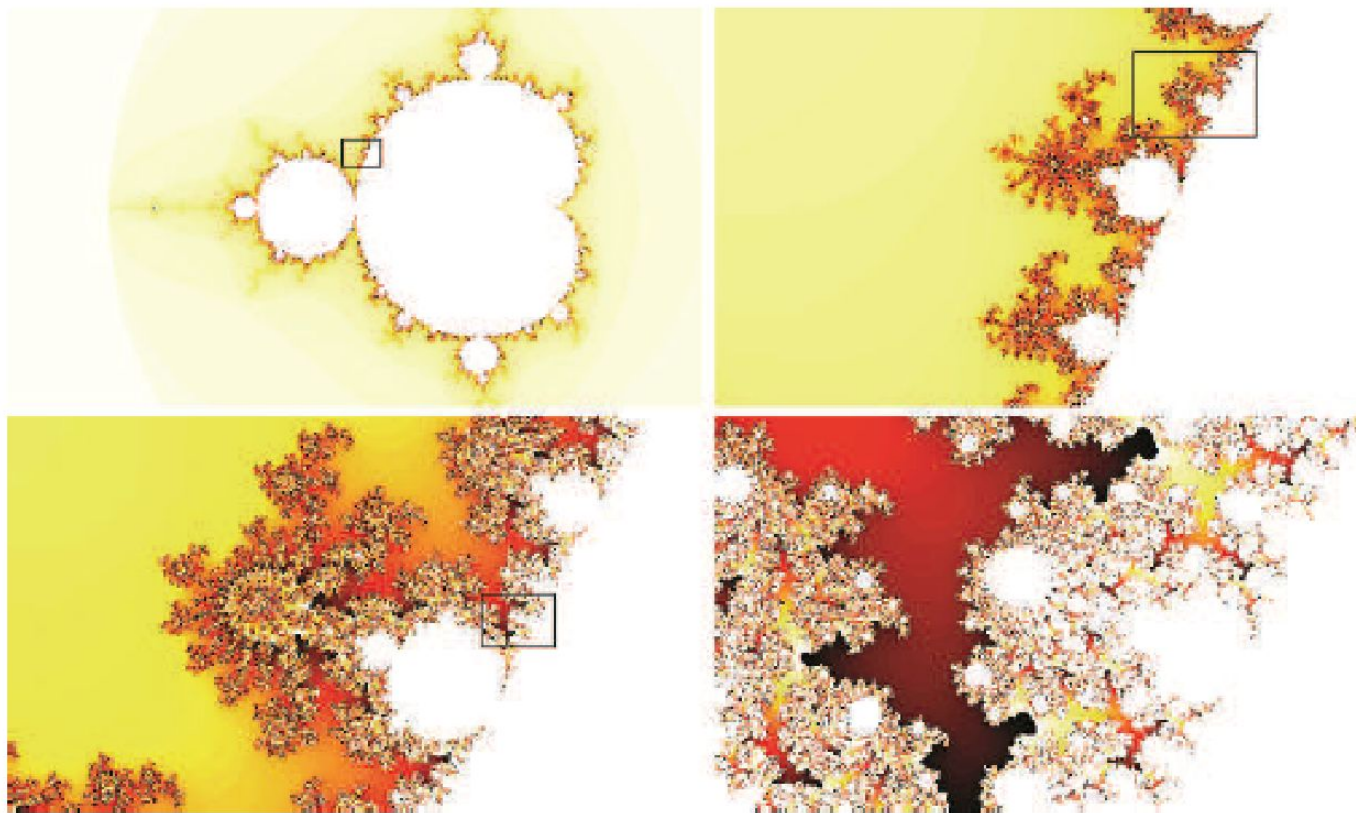
Фрактальность множества Мандельброта-1 (вторичные множества Мандельброта)



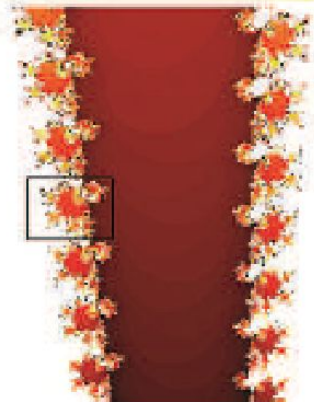
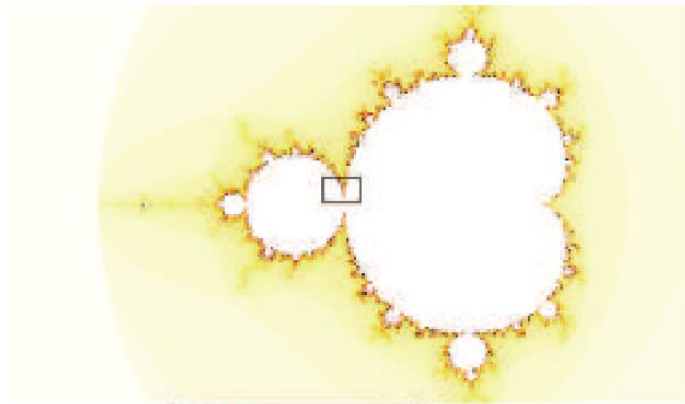
Фрактальность множества Мандельброта-2 (волокна)



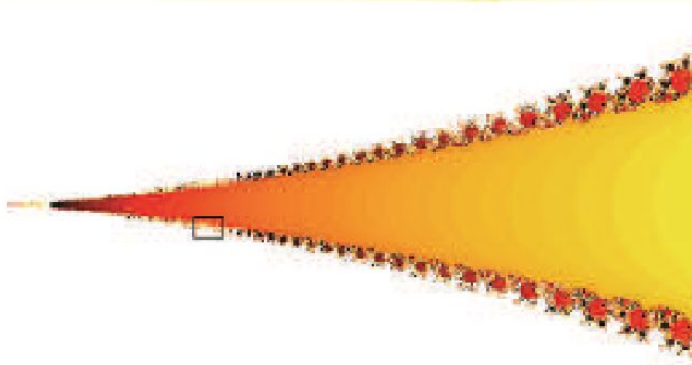
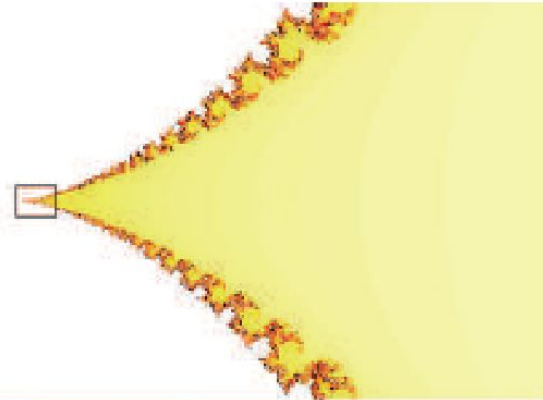
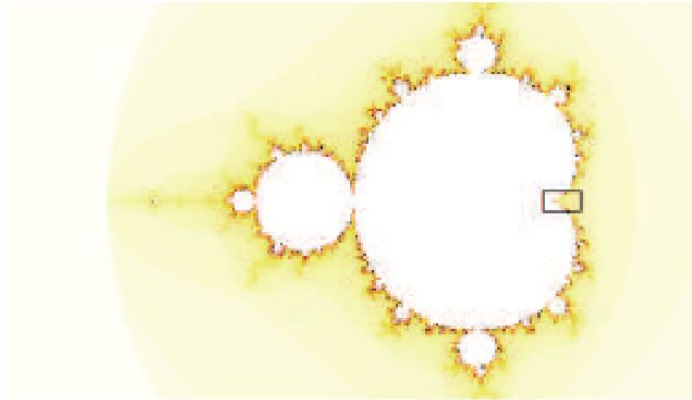
Фрактальность множества Мандельброта – 3 (луковицы)



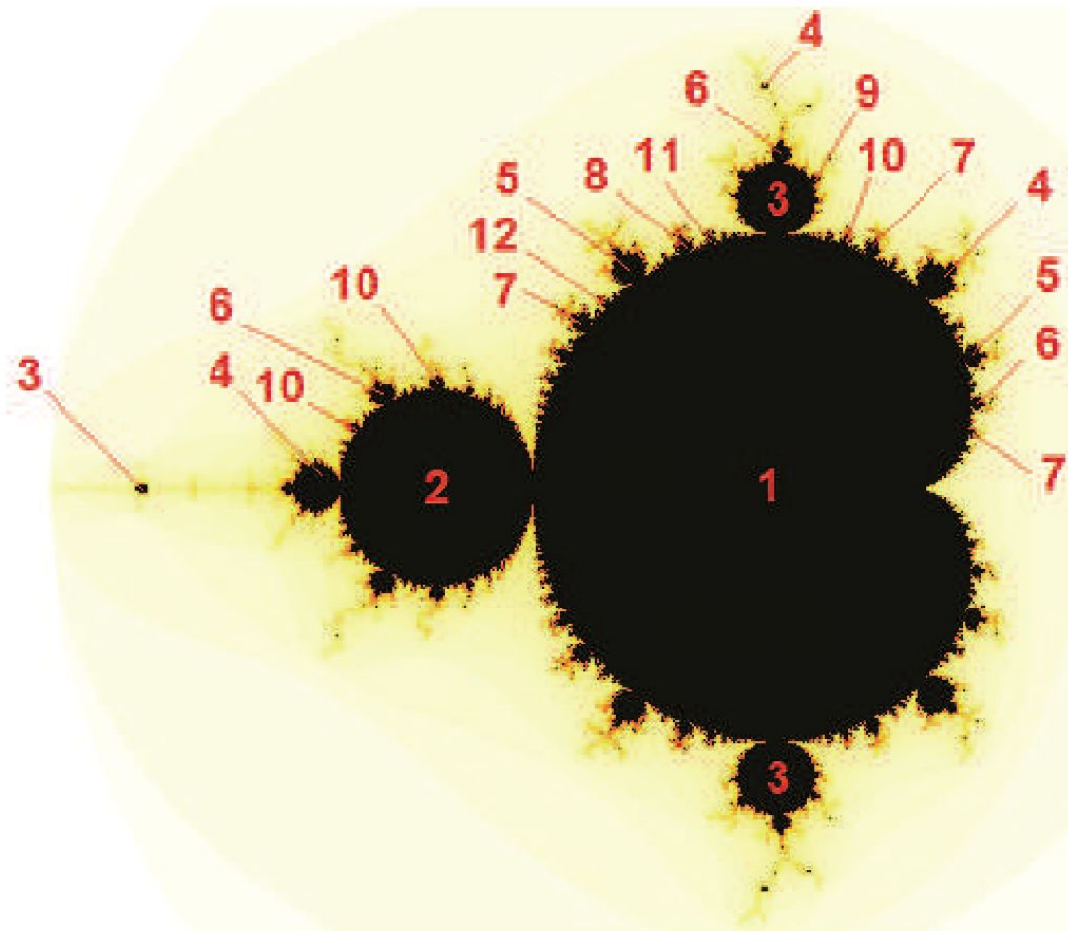
Фрактальность множества Мандельброта – 4 (Долина Морских Коньков)



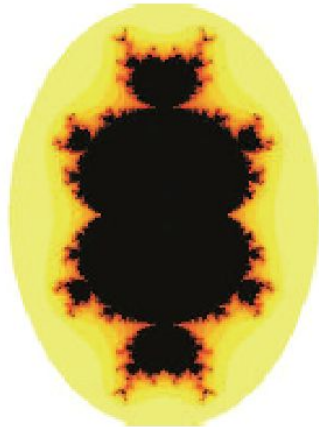
Фрактальность множества Мандельброта – 5 (Долина Слонов)



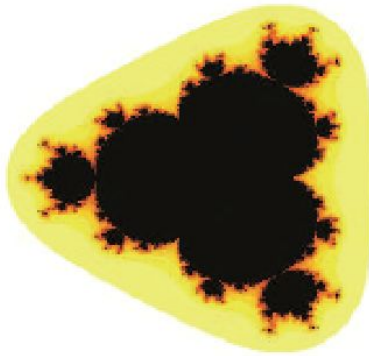
Структура периодов множества Мандельброта



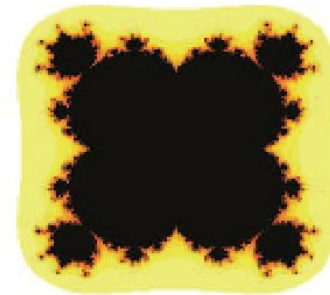
Обобщения: множества Мандельброта высших степеней, $p > 2$



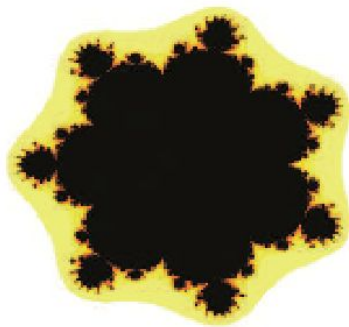
(a) \mathcal{M}_3



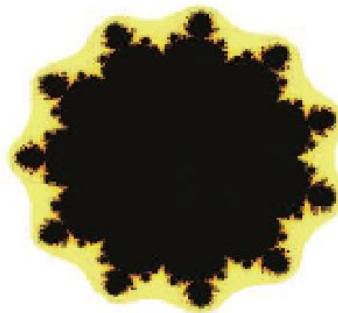
(b) \mathcal{M}_4



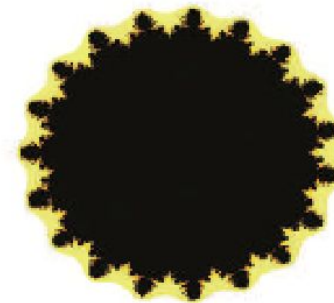
(c) \mathcal{M}_5



(d) \mathcal{M}_8

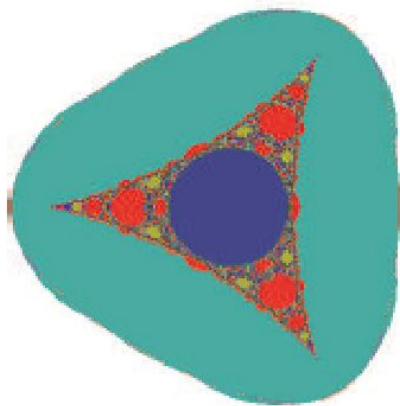


(e) \mathcal{M}_{12}

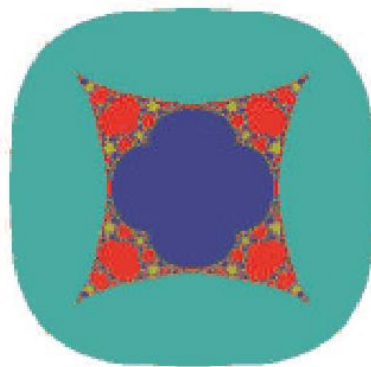


(f) \mathcal{M}_{20}

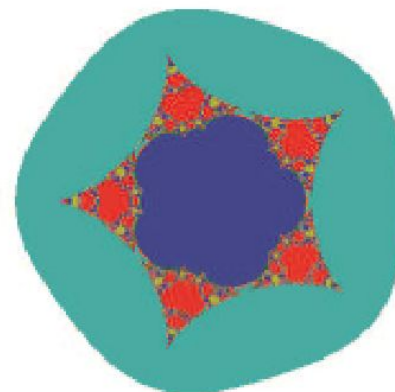
Обобщения: множества Мандельброта отрицательных степеней, $p \leq -2$



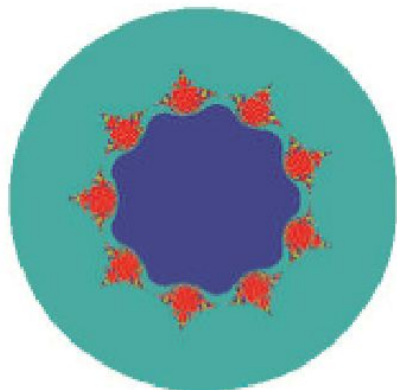
(a) M_{-2}



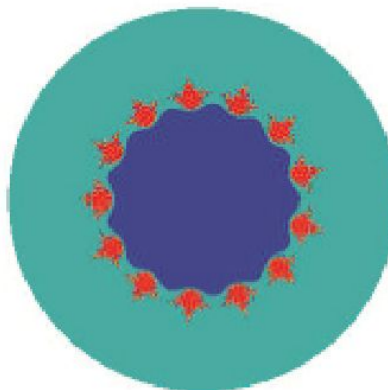
(b) M_{-3}



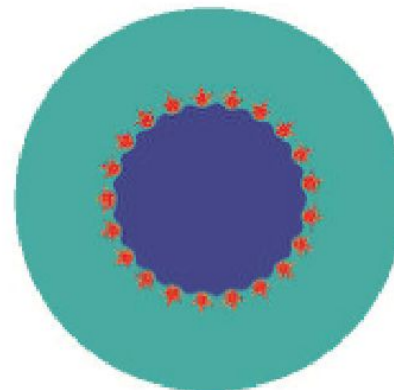
(c) M_{-4}



(d) M_{-8}

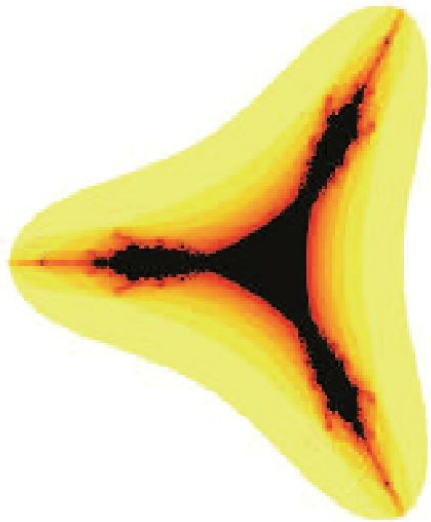


(e) M_{-12}

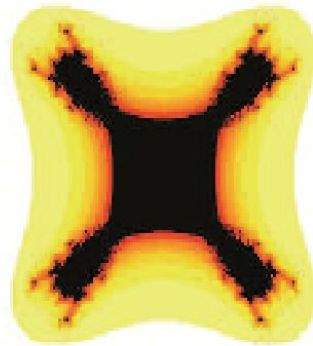


(f) M_{-20}

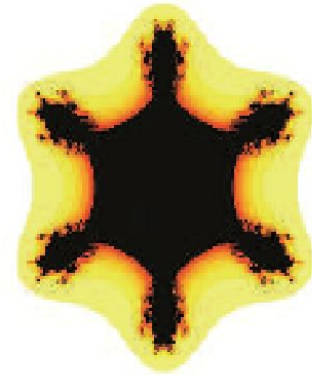
Обобщения: Мандельбар-множества для отображений $z \rightarrow z^2 + c$



(a) \mathcal{T}_2



(b) \mathcal{T}_3



(c) \mathcal{T}_5

Дальнейшие обобщения: возможны ли 3-мерные множества Мандельброта и Жюлиа?

Даниэл Уйат, 2007 $\{\rho, \phi, \theta\}^2 = \{\rho^2, 2\phi, 2\theta\}$.

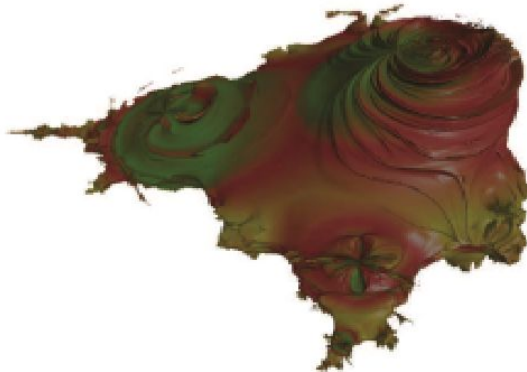
(неалгебраический 3-мерный аналог
голоморфной динамики)



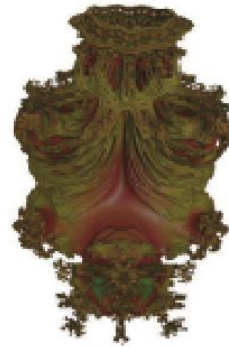
- аналог множества
Мандельброта

Обобщение Ниландера: Мандельбалбы

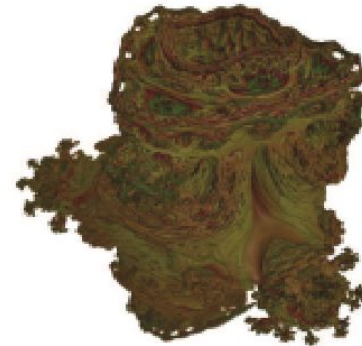
$$\{\rho, \phi, \theta\}^p = \{\rho^p, p\phi, p\theta\},$$



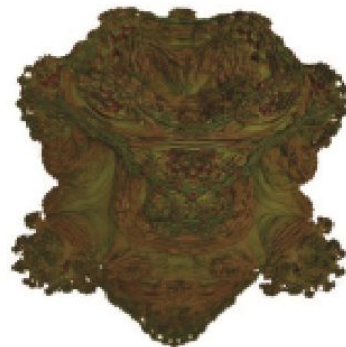
(a) $z \rightarrow z^2 + c$



(b) $z \rightarrow z^3 + c$



(c) $z \rightarrow z^4 + c$



(d) $z \rightarrow z^5 + c$

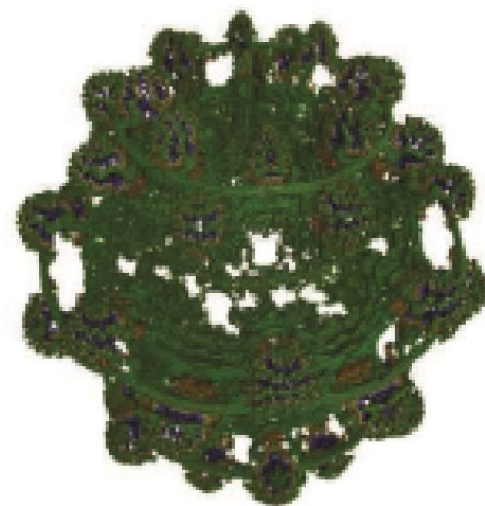
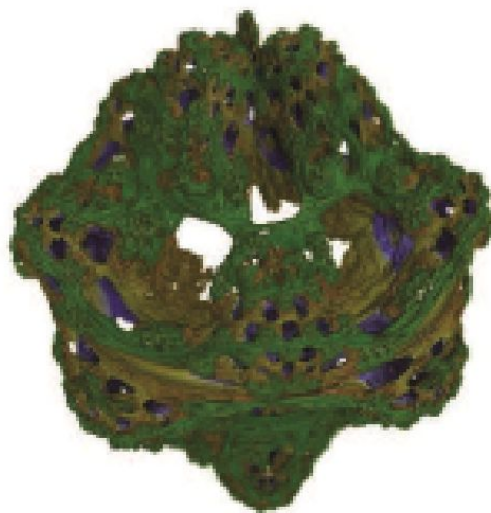


(e) $z \rightarrow z^8 + c$

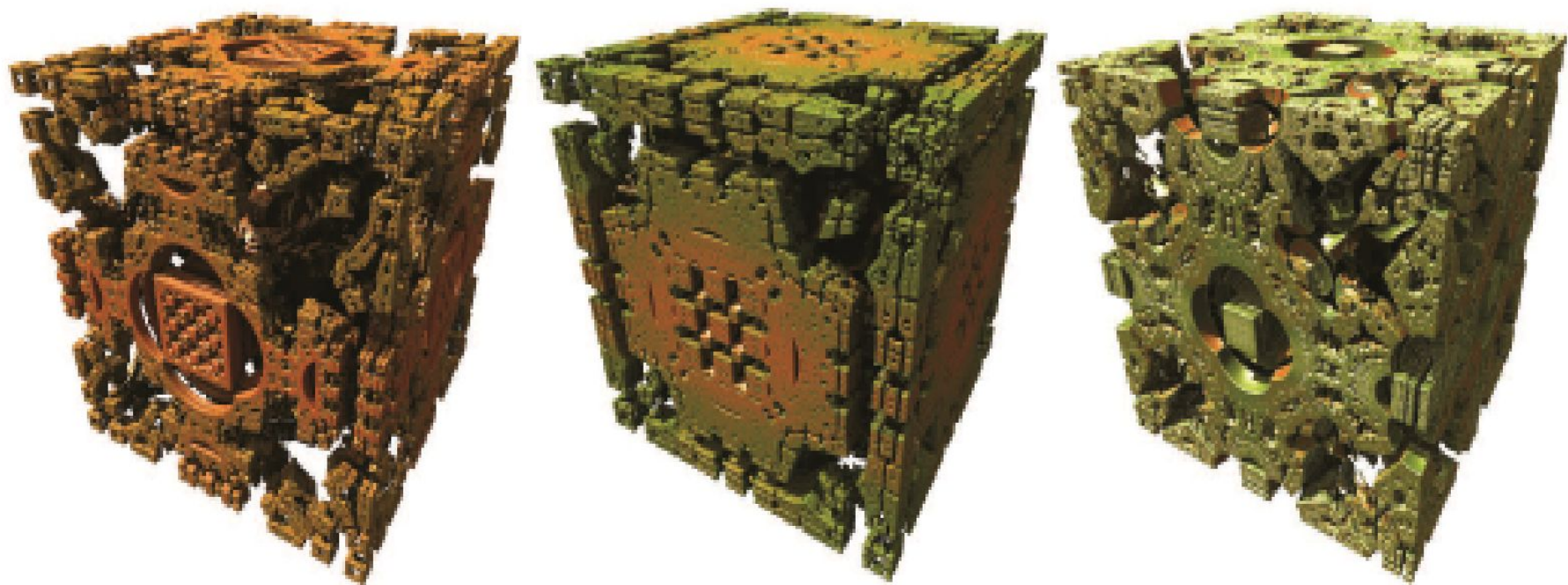


(f) $z \rightarrow z^{20} + c$

Жюлиа-балбы



Мандельбоксы (3D Мандельбары)



Кватернионы (Гамильтон, 1843)

$$\mathbb{H} := \{a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

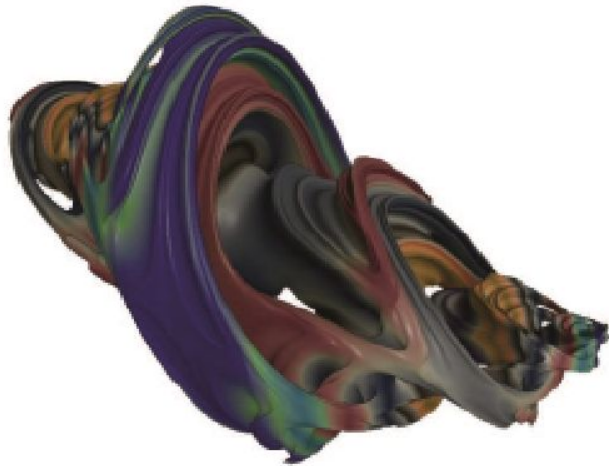
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4, \\ a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3, \\ a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2, \\ a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1).$$

$$(a_1 + a_2i) + (a_3 + a_4i)j, \text{ i.e., } \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

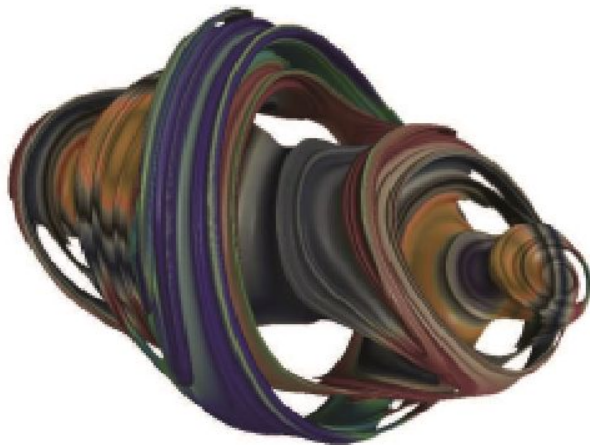
Кватернионные множества Жюлиа: 3-мерные проекции



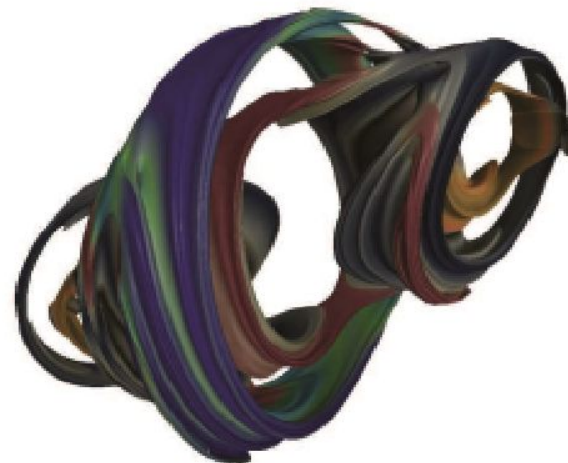
(a) $c = -0.2 + 0.8i$



(b) $c = -0.9 + 0.4i$

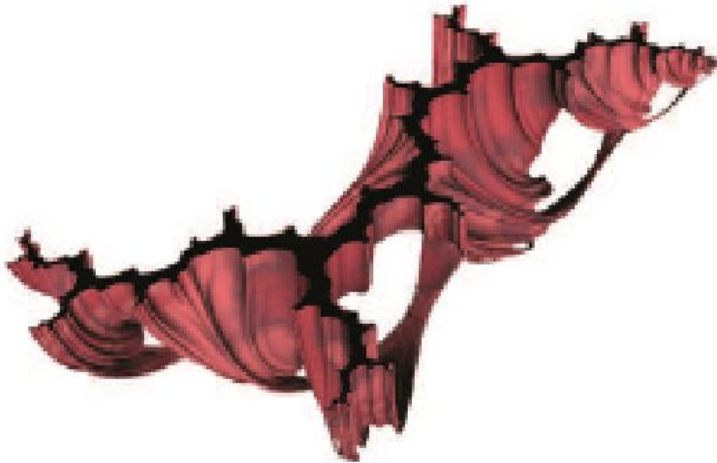


(c) $c = -0.1 + 0.6i - 0.5j + 0.3k$



(d) $c = -0.3 - 0.3i - 0.6j - 0.4k$

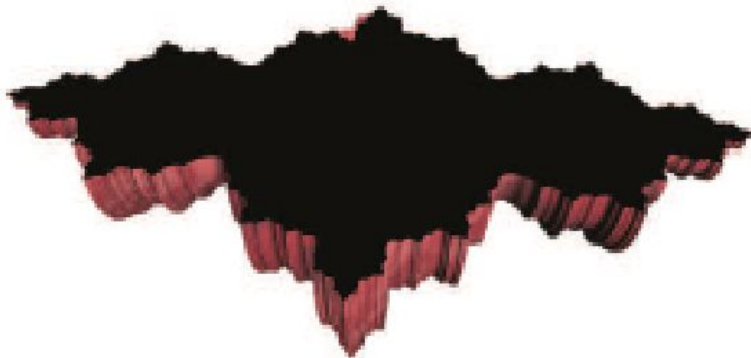
Кватернионные множества Жюлиа: сечения комплексной плоскостью



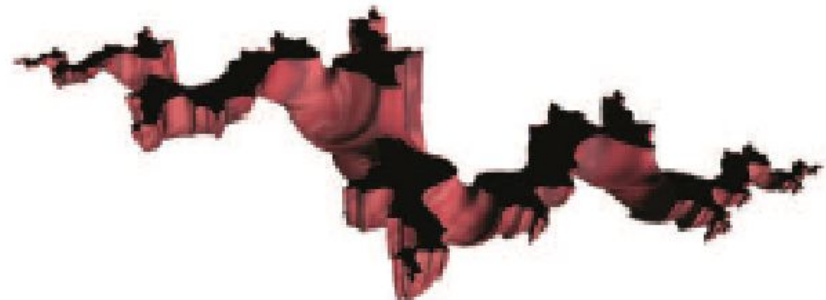
(a) $c = i$



(b) $c = 0.27 + 0.07i$



(c) $c = -0.75$



(d) $c = -1 - 0.4i$

Кватернионные множества Жюлиа: слоения по

ЦЕПЬЮ СЛОЕВ

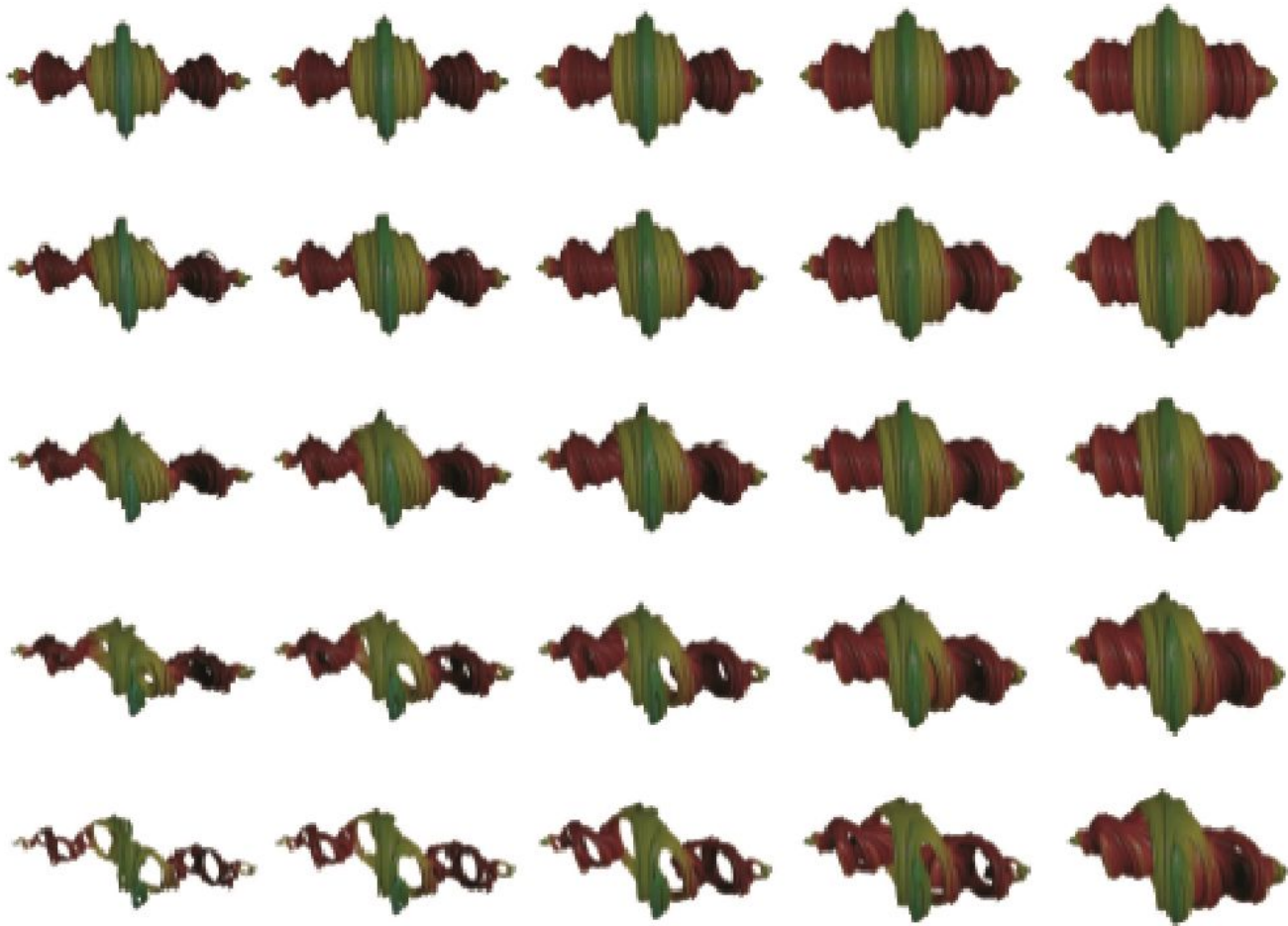


Figure 2.4: Slices of $\mathcal{J}^{\mathbb{H}}(-1, 0.1, 0, 0)$ along axis of reals (from -1 to -0.6) and i -axis (from 0.1 to 0.5) with a step of 0.1 .

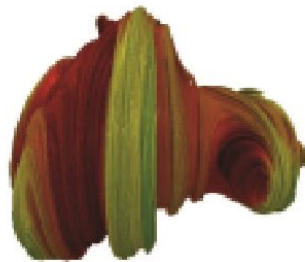
Кватернионное множество Мандельброта: 3-мерная проекция



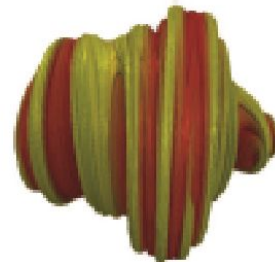
Степенные кватернионные множества Жюлиа – 3-мерные сечения



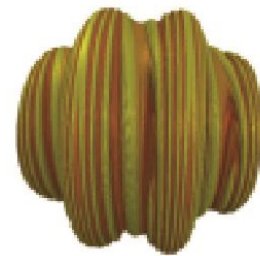
(a) $p = 2$



(b) $p = 3$



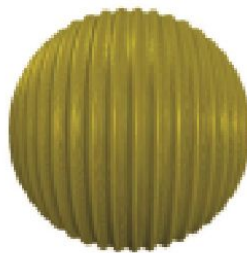
(c) $p = 5$



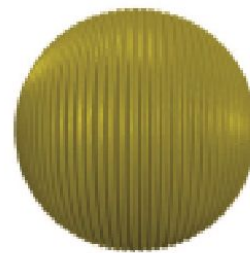
(d) $p = 10$



(e) $p = 20$



(f) $p = 50$



(g) $p = 100$

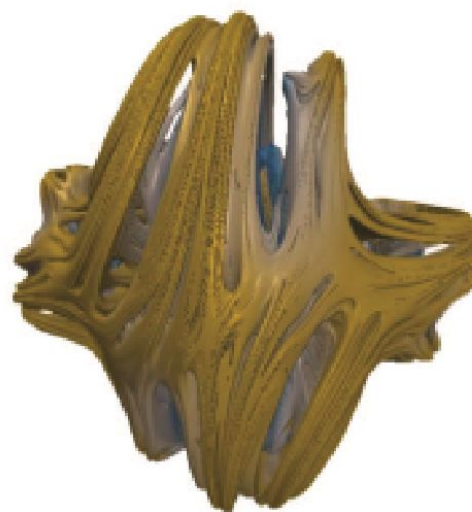


(h) $p = 1000$

Обобщенно-полиномиальные кватернионные множества Жюлиа

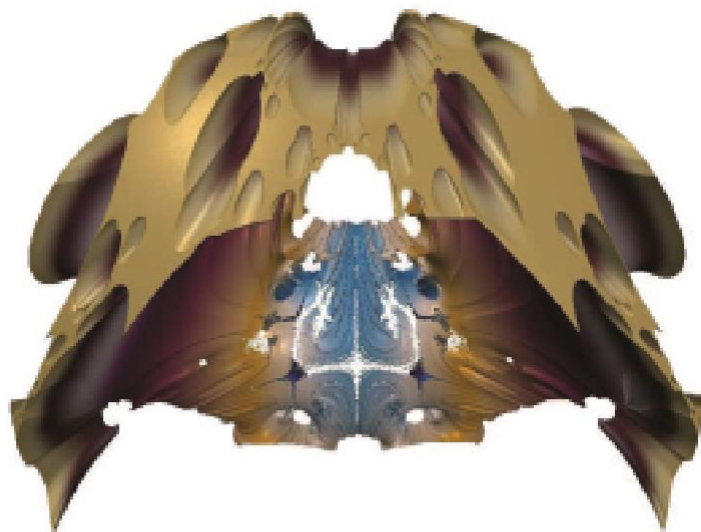


(a) $z \rightarrow z^2 - c/z,$
 $c = 0.5 + 0.3i - 0.1j$

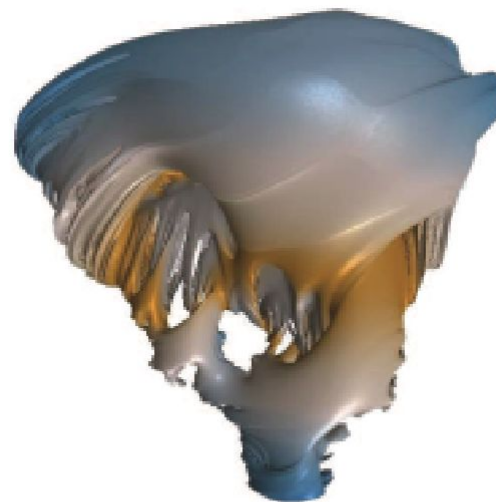


(b) $z \rightarrow cz^2 - cz^{-2},$
 $c = 0.3 + 0.3i - 0.5j - 0.2k$

Обобщенно-полиномиальные и трансцендентные кватернионные множества Жюлиа

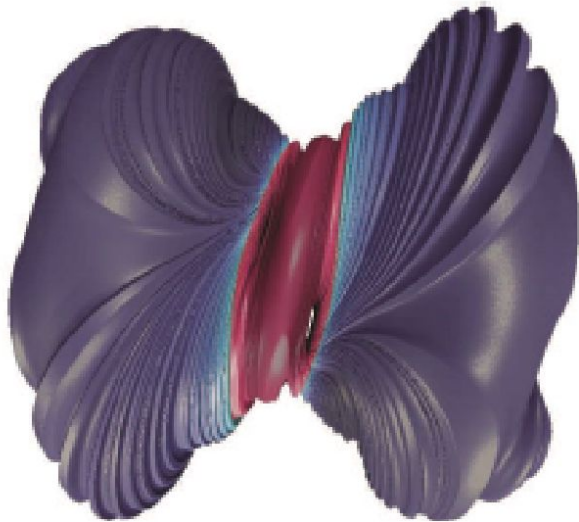


$$(c) z \rightarrow cz^{-2} - c^2z + c,$$
$$c = 0.3i - 0.3j$$

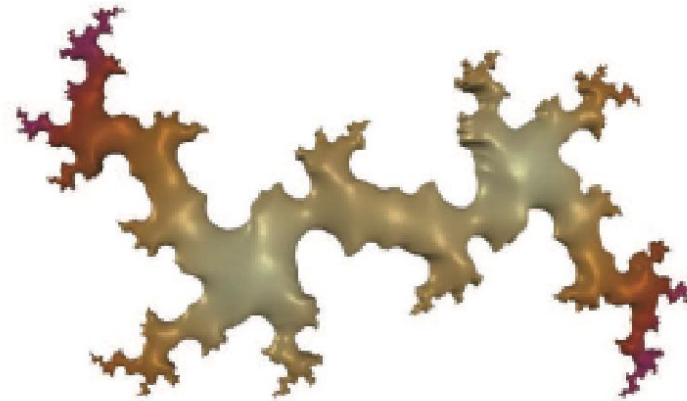


$$(d) z \rightarrow \ln(c) / z - z^{-4},$$
$$c = 0.3 - 1.9i + 1.1j - 0.2k$$

Трансцендентные кватернионные множества Жюлиа

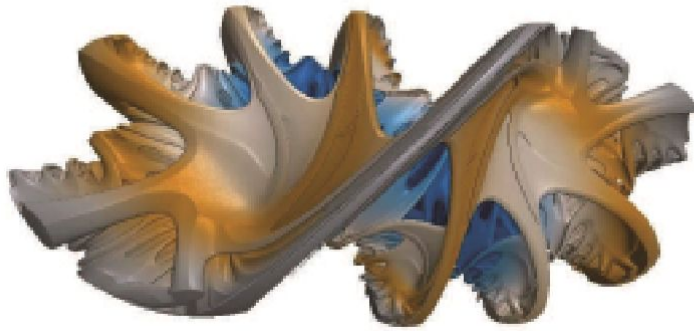


$$(e) z \rightarrow c^2 / \ln(c) + z^{-4}, \\ c = 0.55 + 0.4i - 0.5j + 0.5k$$



$$(f) z \rightarrow z / \ln(c) - (zc)^2, \\ c = 0.6 + 0.6i - 0.4j$$

Трансцендентные и полиномиальные кватернионные множества Жюлиа



(a) $z \rightarrow 1/\ln(c) + \ln(z^2 + c)$,
 $c = 0.4 + 0.4i - 0.6j$



(b) $z \rightarrow (1 - z - c)^2 - (zc)^2$,
 $c = 0.5 - 0.3i + 0.3j - 0.1k$

Трансцендентные и полиномиальные кватернионные множества Жюлиа



$$(c) z \rightarrow 1 - c + (\ln(z) + c)^2, \\ c = 0.6 - 0.29j$$

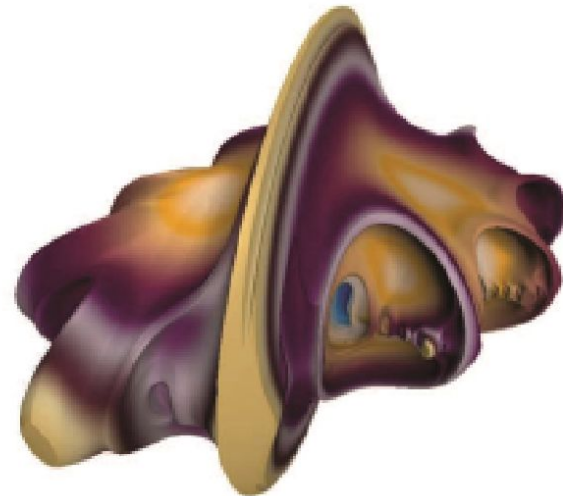


$$(d) z \rightarrow (z/c)^4 - z/c, \\ c = 0.27 + 0.35i - 0.5j$$

Трансцендентные кватернионные множества Жюлиа



$$(e) z \rightarrow c \ln(c) + z^2/c,$$
$$c = 0.75 + 0.67i - 0.34j$$

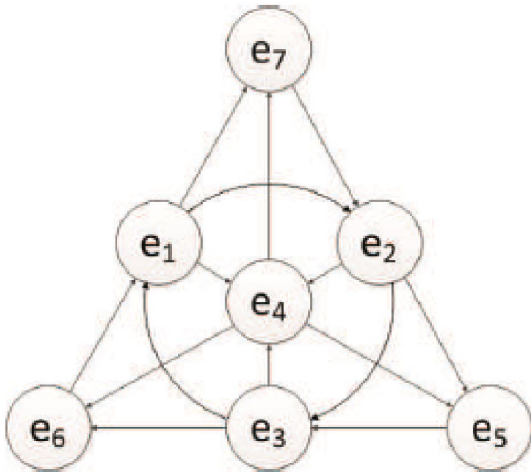


$$(f) z \rightarrow 1.6/\ln(c) + \ln(z^2 + c),$$
$$c = 0.1 + 1i + 0.1j + 0.1k$$

Алгебра октав (числа Кэли, Грэйвс, 1843)

$$\mathbb{O} := \{a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + a_5l + a_6r + a_7s + a_8t \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

$$(a_1, \dots, a_8) + (b_1, \dots, b_8) = (a_1 + b_1, \dots, a_8 + b_8)$$



$$(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) + (a_5 + a_6i + a_7j + a_8k)l.$$

Итерационный процесс над ОКТАВАМИ

1. Неассоциативность $z \rightarrow (z0)(\delta z) + c, z, 0, c \in \mathbb{O},$
2. Проблема визуализации

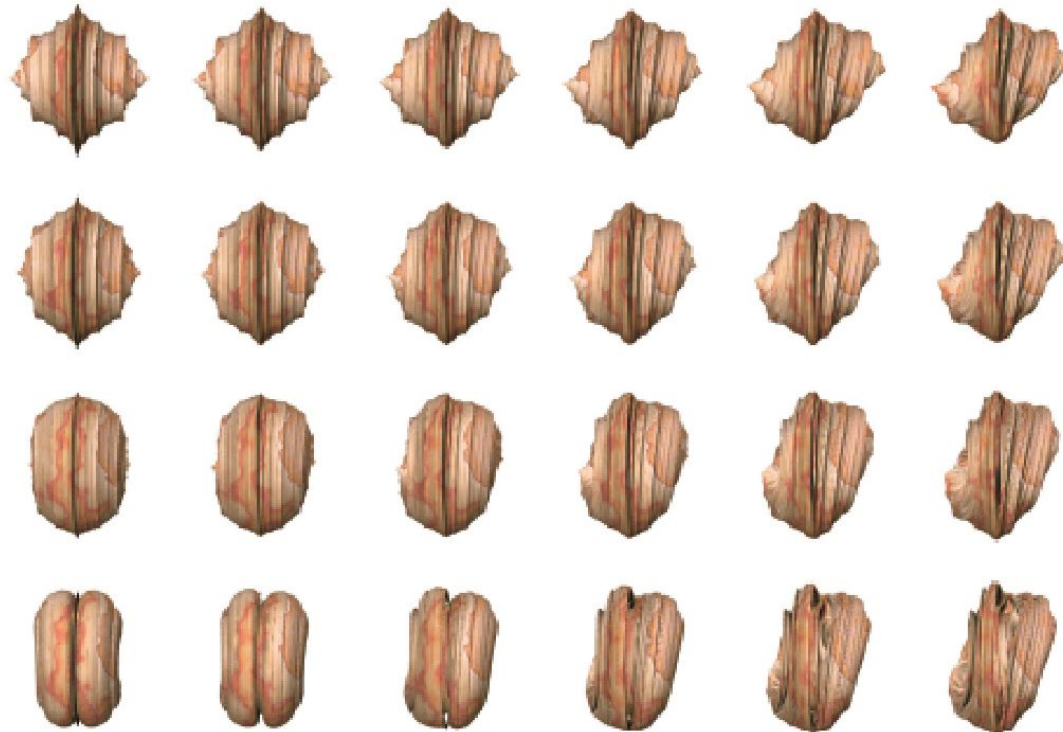


Figure 2.11: Slices of $\mathcal{J}^0(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ along axis of reals (from 0 to 0.3) and i -axis (from 0 to 0.5), with a step of 0.1.

Октонионные множества Жюлиа - сечения

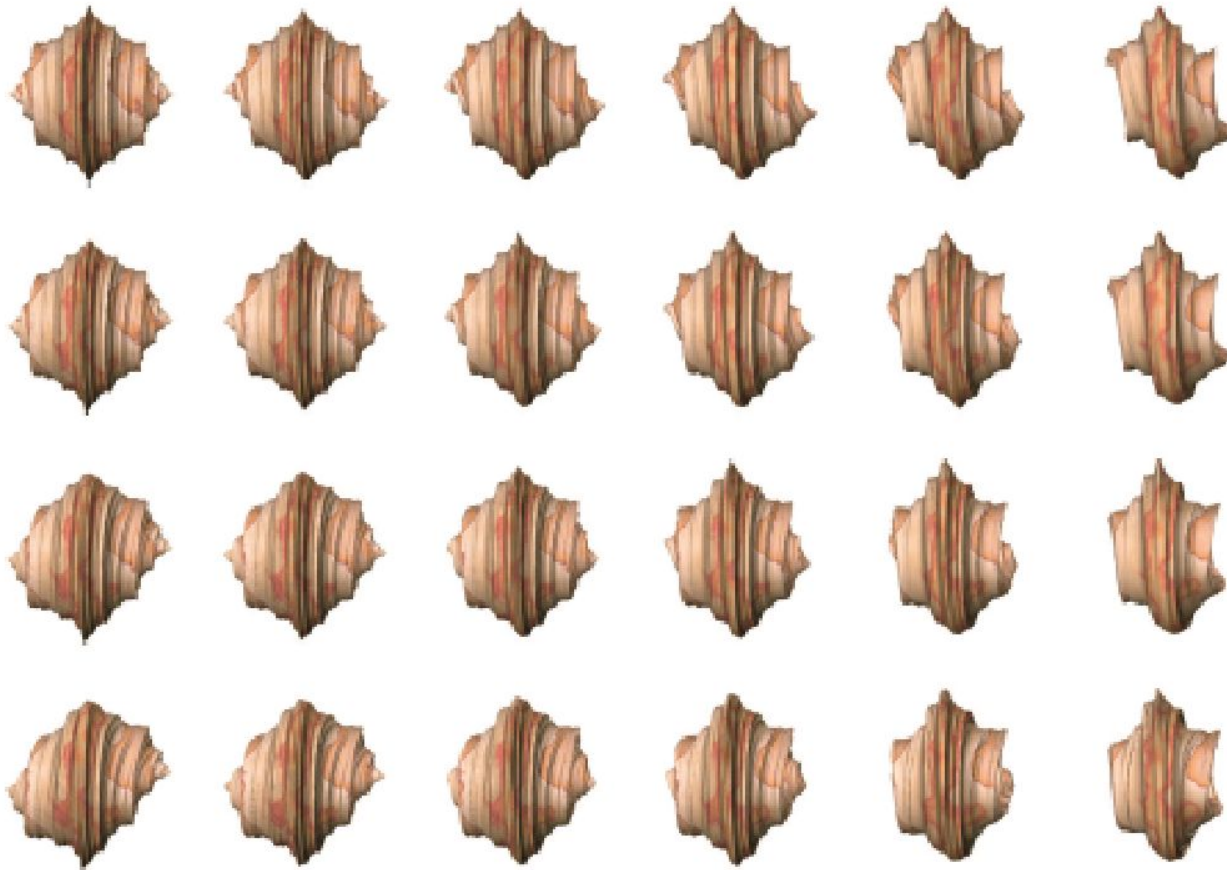


Figure 2.12: Slices of $\mathcal{J}^0(0,0,0,0,0,0,0,0)$ along j -axis (from 0 to 0.3) and k -axis (from 0 to 0.5), with a step of 0.1.

Октонионные множества Жюлиа - сечения

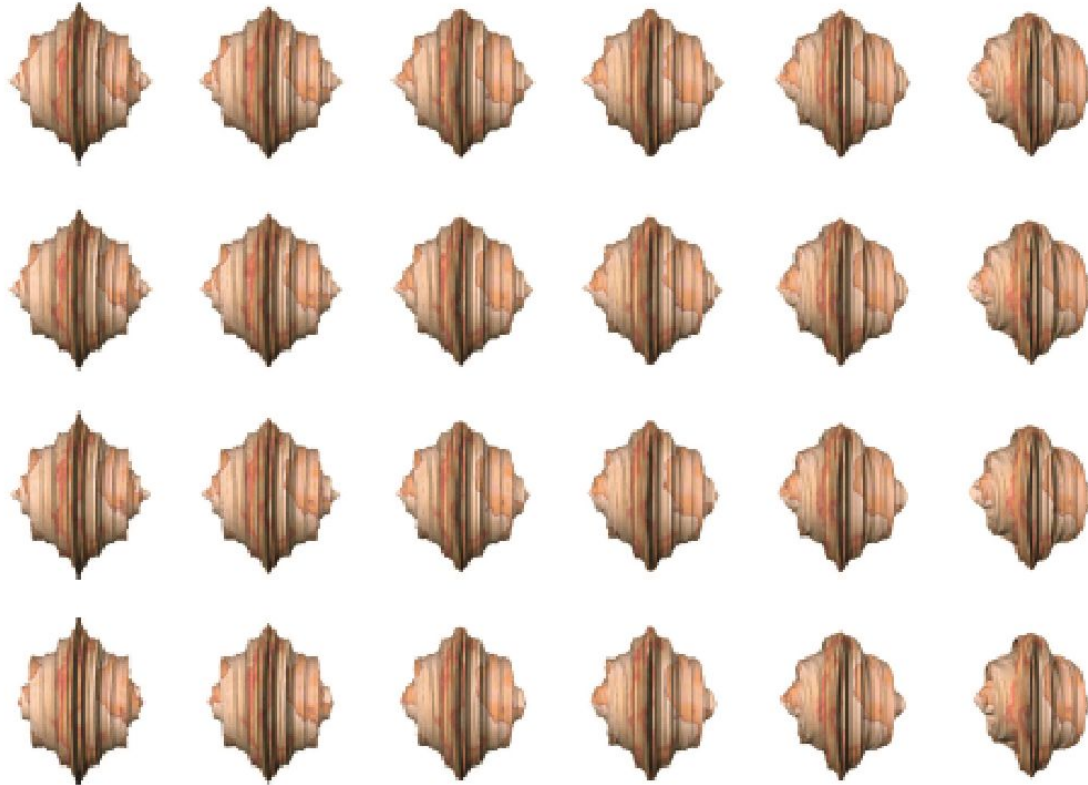


Figure 2.13: Slices of $\mathcal{J}^0(0,0,0,0,0,0,0,0)$ along l -axis (from 0 to 0.3) and r -axis (from 0 to 0.5), with a step of 0.1.

Октонионные множества Жюлиа - сечения

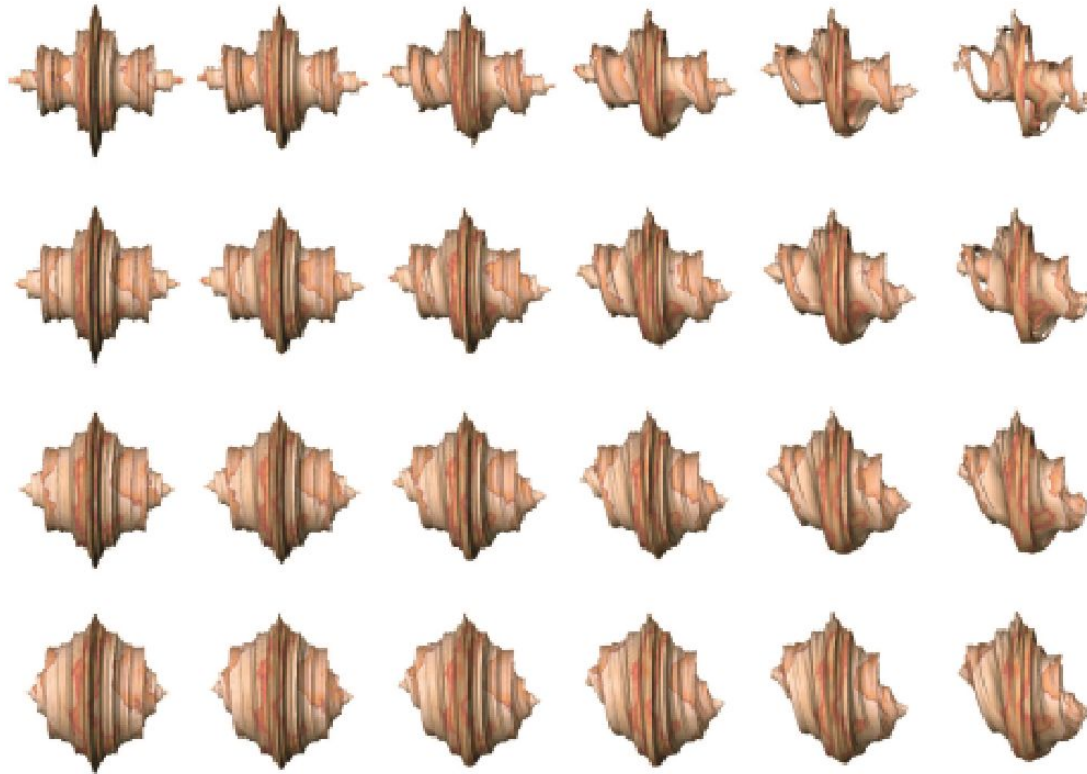


Figure 2.14: Slices of $\mathcal{J}^{\mathbb{O}}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ along axis of reals (from -0.3 to 0) and t -axis (from 0 to 0.5), with a step of 0.1 .

Что дальше: сединионы, патионы?

1. R, C, H, O – нормированные алгебры с делением (других нет);
2. S, P, \dots - (размерность 16, 32, ...) – неассоциативны, неальтернативны, имеют делители нуля:

$$ab=0, a \neq 0, b \neq 0$$

- препятствие для существования множеств Жюлиа и Мандельброта

Алгебры Клиффорда

$\text{cl}(p, q, F)$:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \rightarrow$$

$$\{\{e\}, \{ee\}, \{eee\}, \dots, \underbrace{\{e \dots e\}}_n\}$$

$$\dim \text{cl}(p, q, F) = 2^{p+q}$$

1. $(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$ —
ассоциативность;

2. $e_i e_j = -e_j e_i$ $i \neq j$ —
антикоммутативность;

3. $e_i^2 = \pm 1$ —
квадратичное тождество.

Примеры: $\text{cl}(0, 1, \mathbb{R}) \sim \mathbb{C}$,
 $\text{cl}(1, 0, \mathbb{R}) \sim \mathbb{D}$, $\text{cl}(0, 2, \mathbb{R}) \sim \mathbb{H}$.

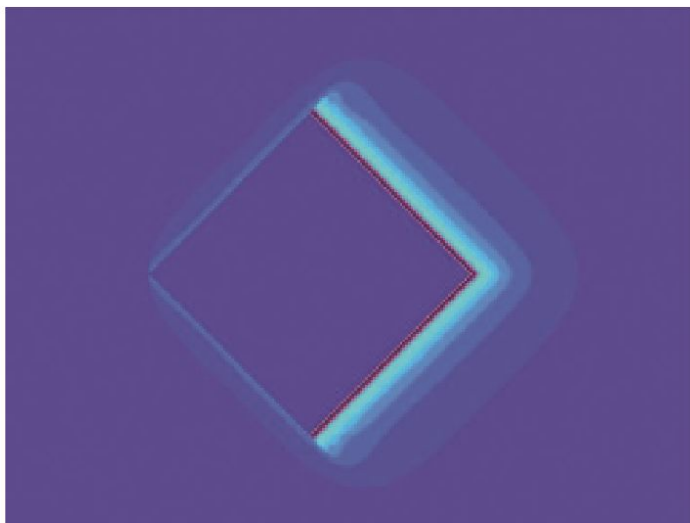
Клиффордовы фрактальные множества

$$z \rightarrow z^p + c \text{ for } z, c \in \mathbb{K}_n, p \geq 2,$$

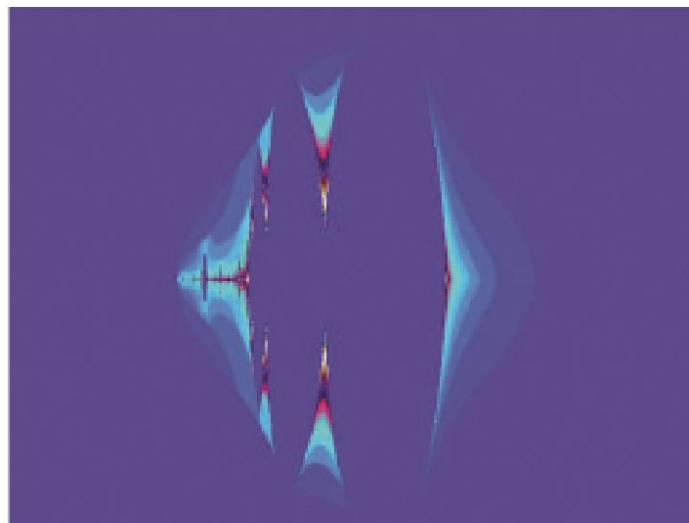
$$\mathcal{J}_p^{\mathbb{K}_n}(c) = \{z \in \mathbb{K}_n \mid \forall m \in \mathbb{N} |z_m| < B\}$$

$$\mathcal{M}_p^{\mathbb{K}_n} = \{c \in \mathbb{K}_n \mid f^{(s)}(z) \not\rightarrow \infty \text{ as } s \rightarrow \infty\}$$

«Фракталы» на двойных и дуальных числах: $a+bj$ ($j^2=+1$, $j^2=0$)



(a) $M_2^{C^v}$



(b) $M_2^{C^0}$

«Фракталы» на расщепленных кватернионах: $ii=-1, jj=+1, kk=+1$

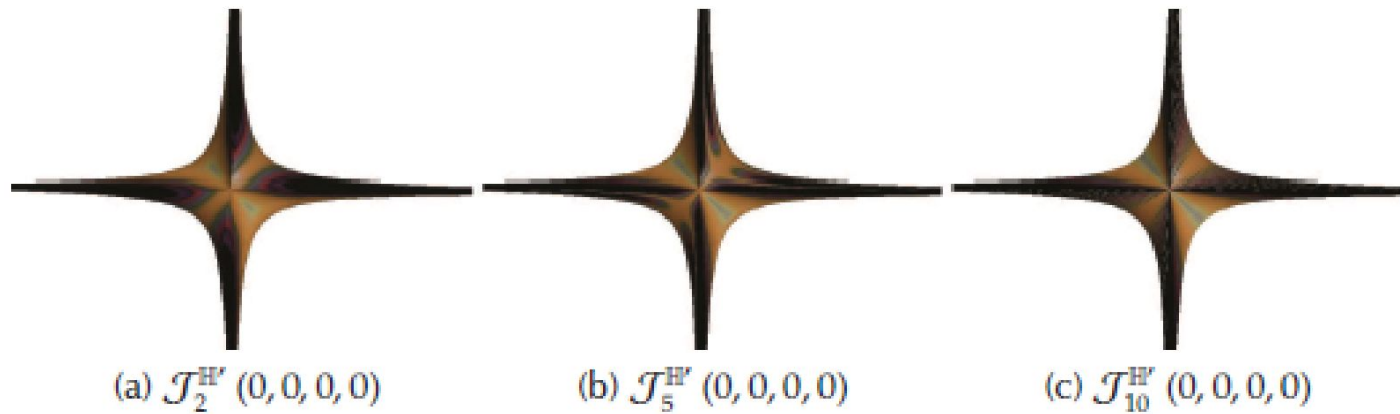
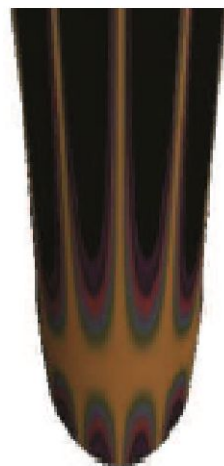


Figure 2.17: Exemplary 3-D projections of sets in an \mathbb{H}' -space.

«Фракталы» на полукватернионах: $ii=-1, jj=kk=jk=0$



(a) $\mathcal{J}_2^{\mathbb{H}^0}(0,0,0,0)$



(b) $\mathcal{J}_5^{\mathbb{H}^0}(0,0,0,0)$



(c) $\mathcal{J}_{10}^{\mathbb{H}^0}(0,0,0,0)$

Figure 2.18: Exemplary 3-D projections of sets in an \mathbb{H}^0 -space.

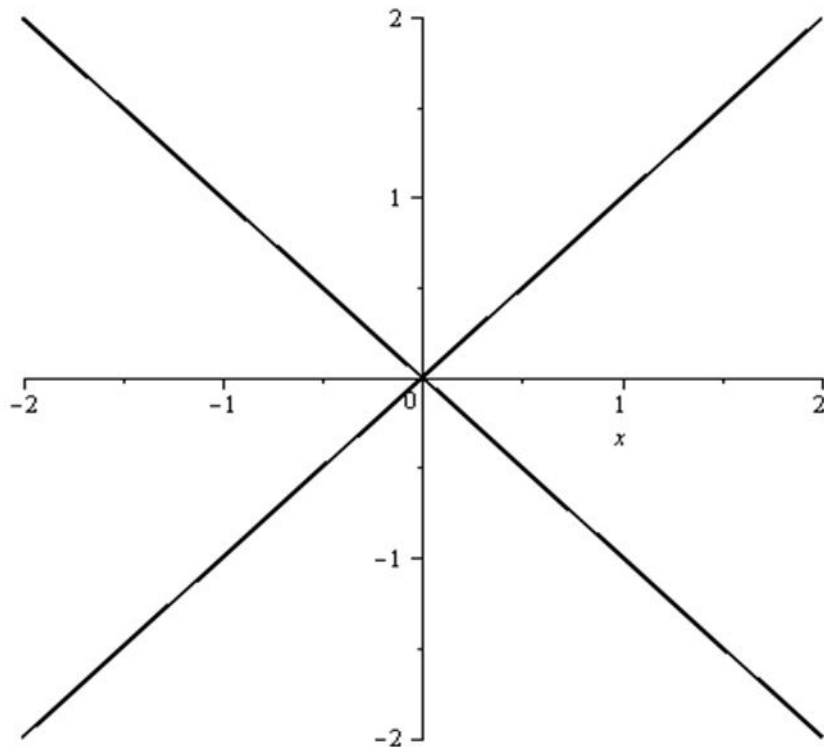
Действительно ли невозможны фракталы на двойных числах?

Алгебра двойных чисел: $a+bj$, $j^2=-1$

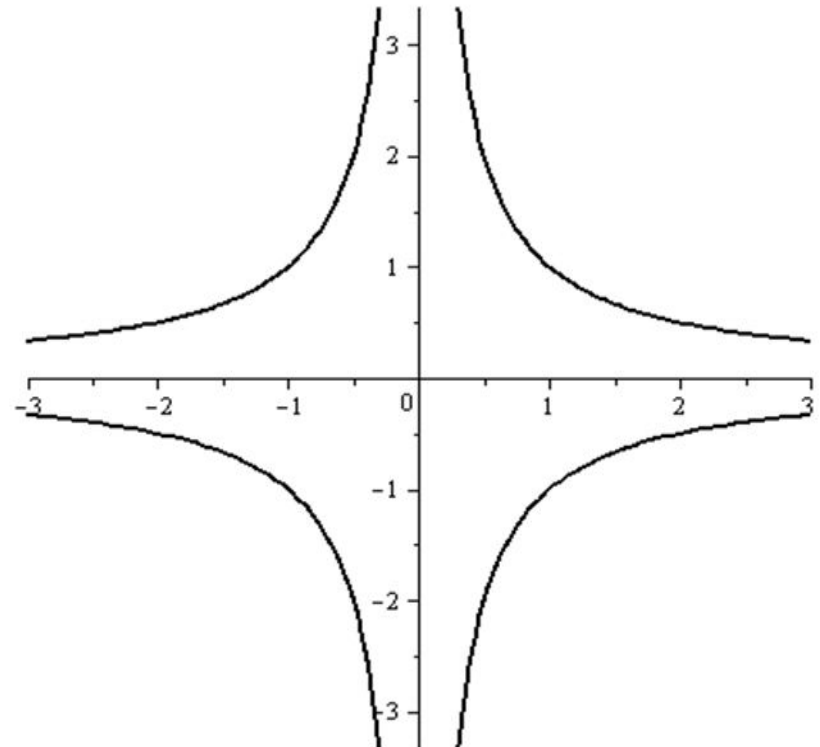
1. Ассоциативно-коммутативна;
2. Содержит делители нуля;
3. Изоморфна прямой сумме двух вещественных алгебр;
4. Описывает 2-мерное пространство-время Минковского СТО;
5. Делители нуля – световые сигналы в СТО!

Внутренняя геометрия двойных чисел

Делители нуля=окружность нулевого радиуса=мировые линии

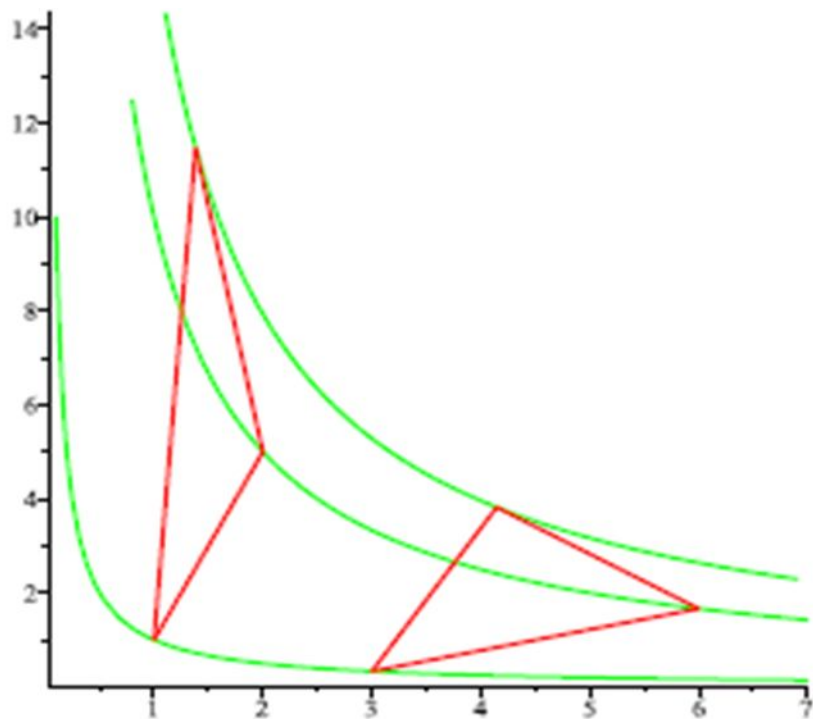


Полная окружность единичного радиуса с центром в нуле

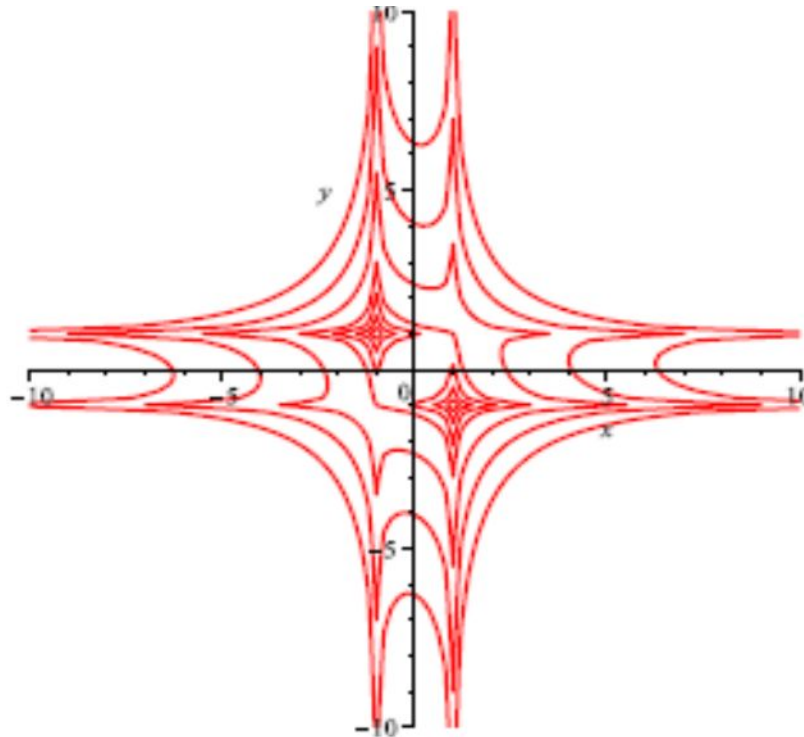


Внутренняя геометрия двойных чисел

Конгруэнтные
равносторонние
треугольники

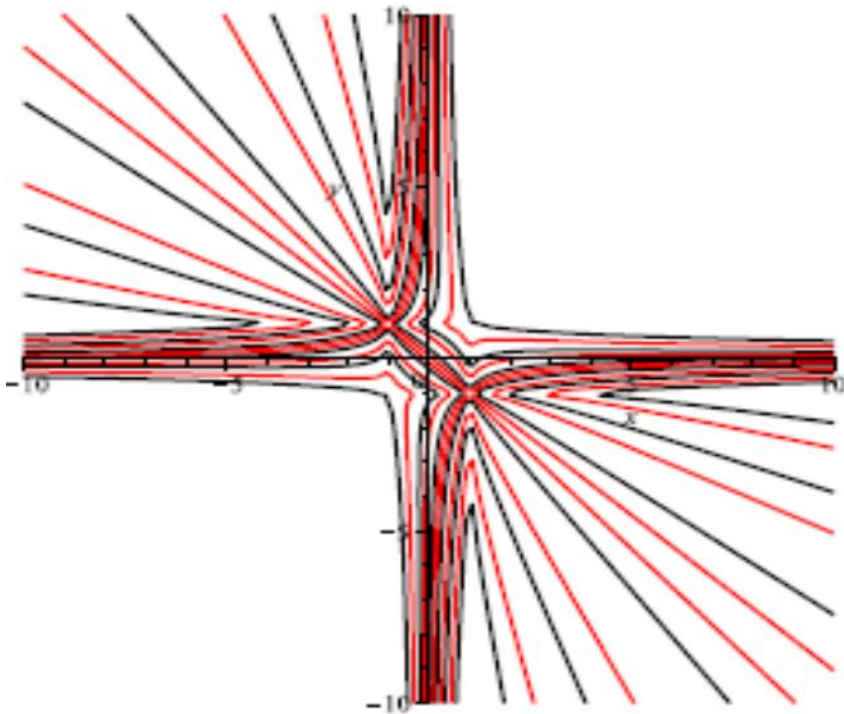


- Семейство софокусных гиперболических эллипсов

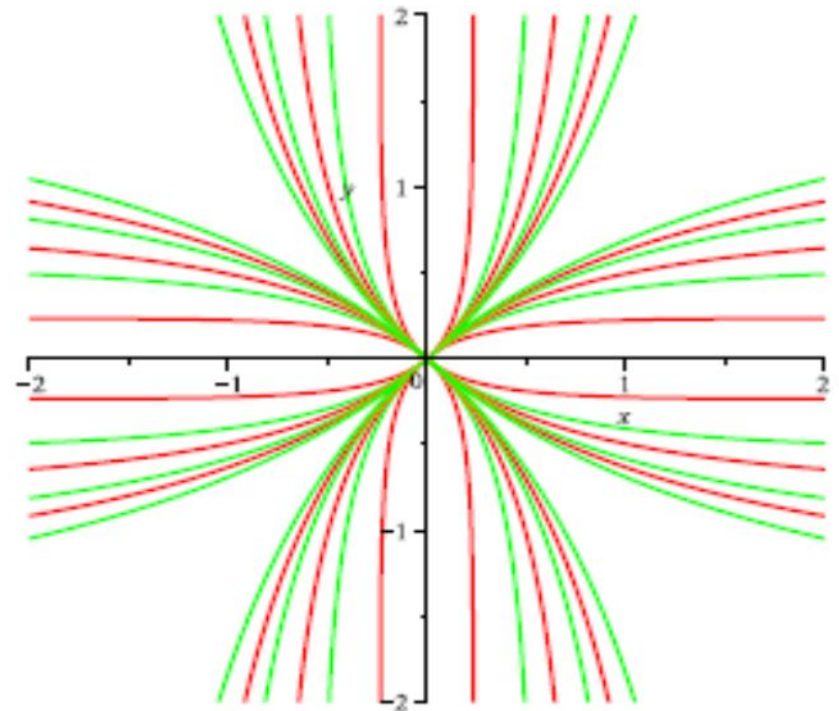


Внутренняя геометрия двойных чисел

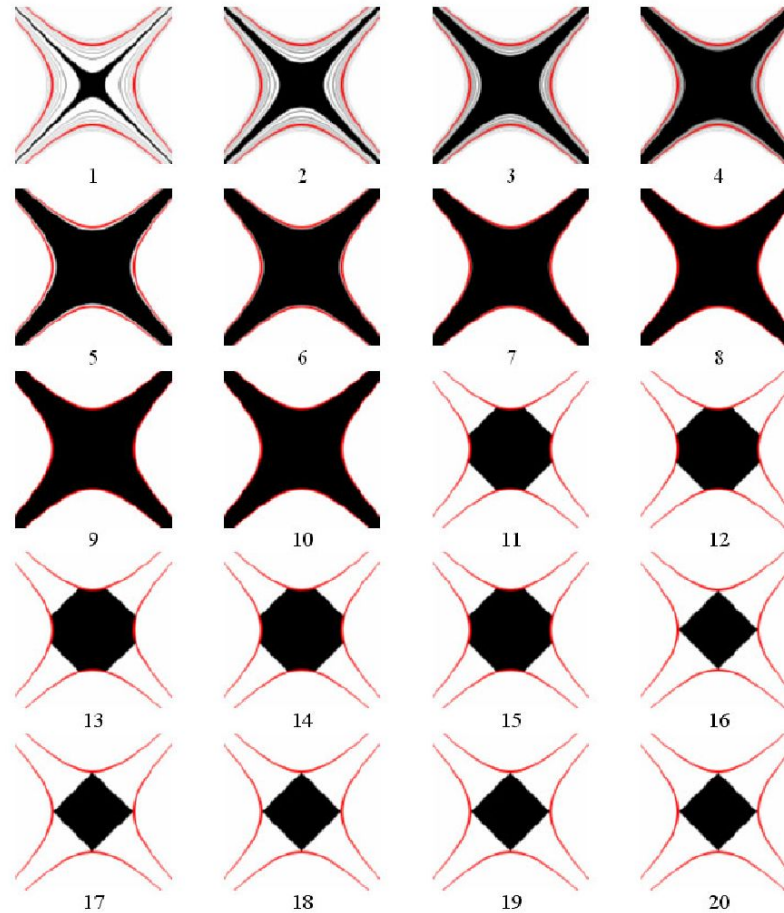
- Семейство гиперболических гипербол



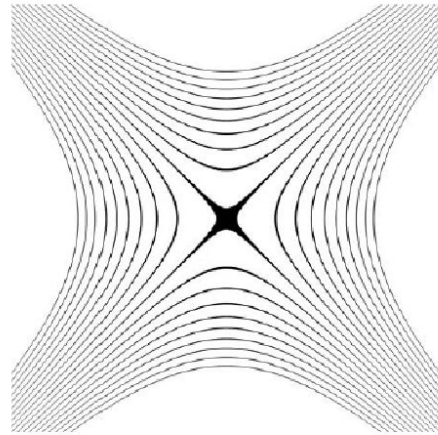
- Семейство гиперболических спиралей



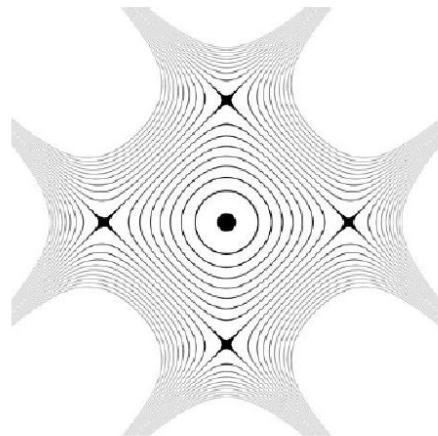
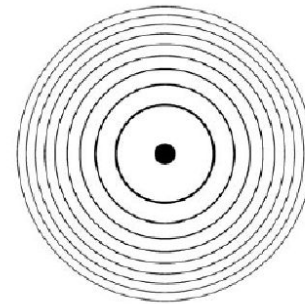
Фракталы на двойных числах с внутренней геометрией



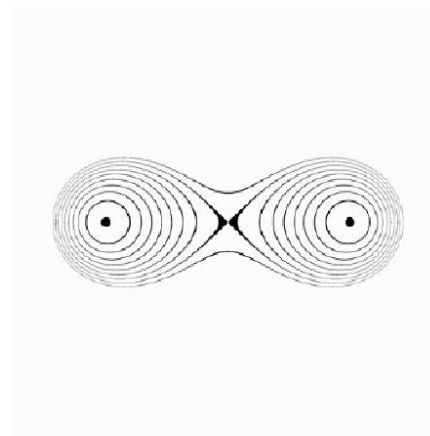
Фракталы на двойных числах с внутренней геометрией



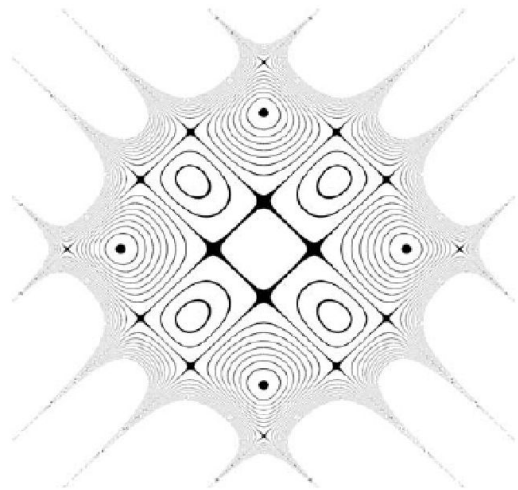
0



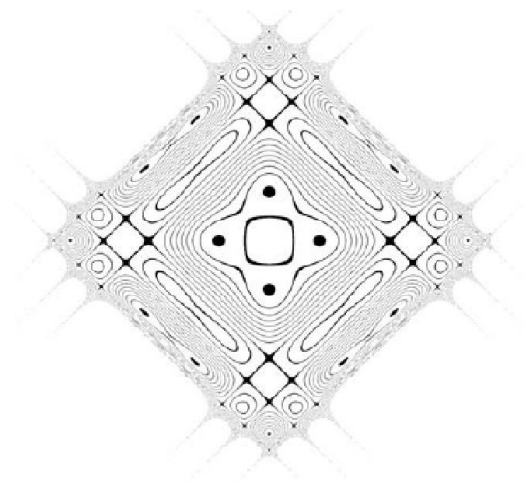
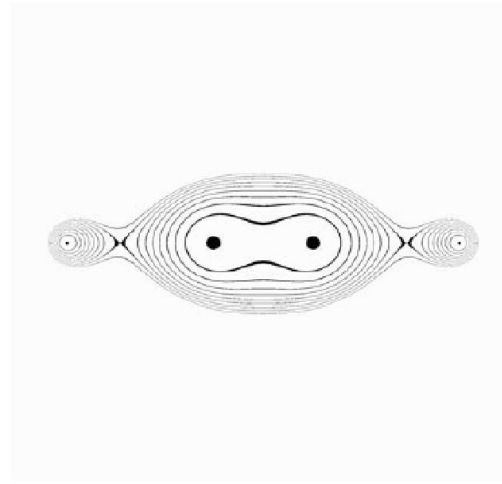
1



Фракталы на двойных числах с внутренней геометрией



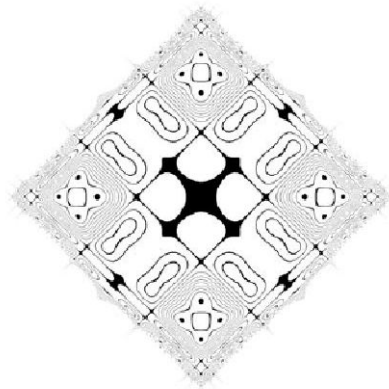
2



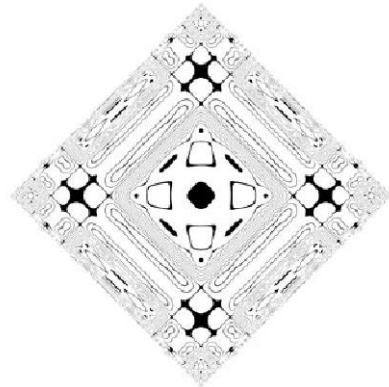
3



Фракталы на двойных числах с внутренней геометрией



4

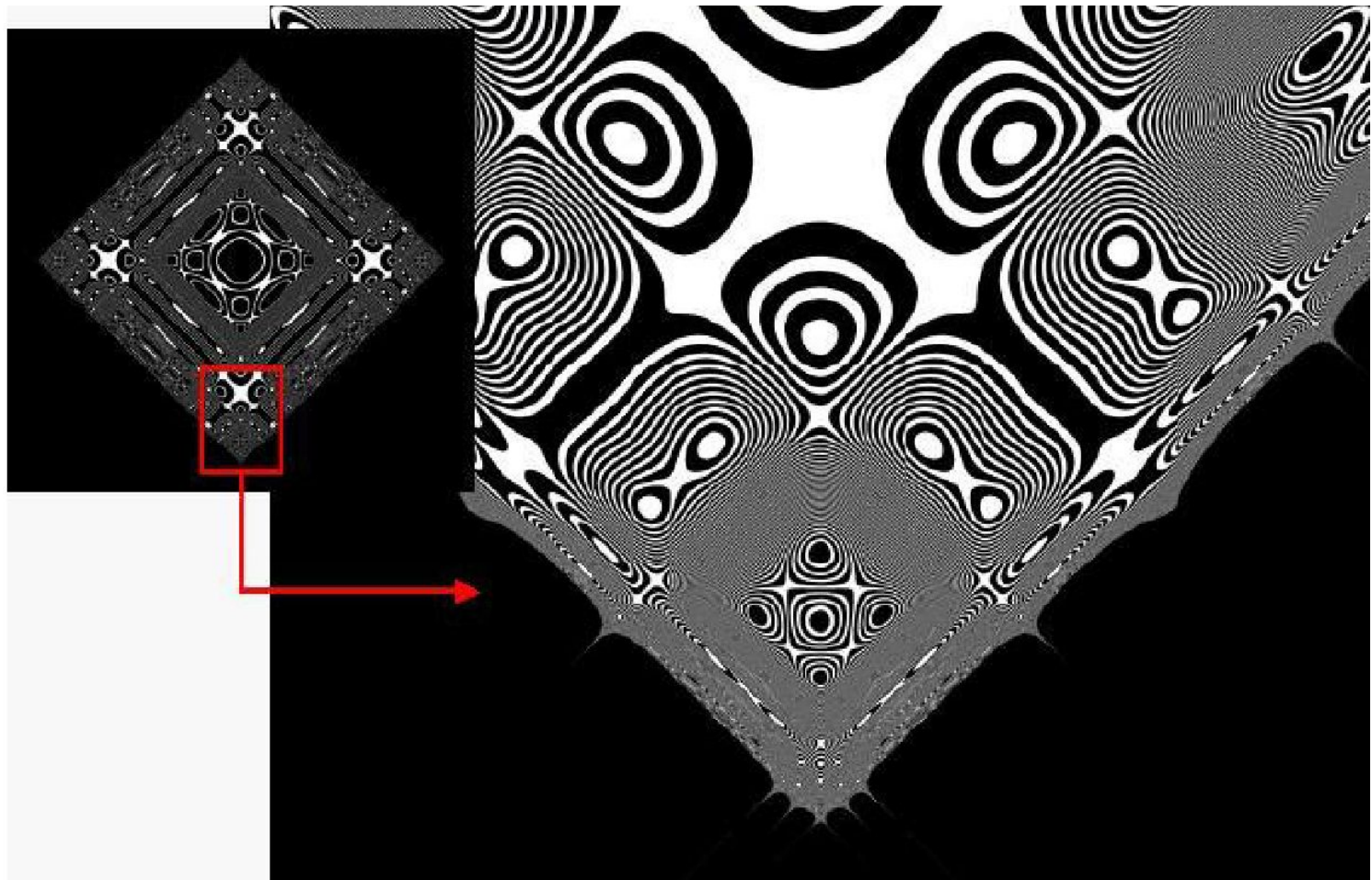


5



Рис. 2: Предфракталы первых 5 поколений для квадратичного отображения (1) при $c = -1.3 + j0$.
Левый столбец – аналоги множества Жюлиа на H_2 ; правый – множество Жюлиа на C .

Фракталы на двойных числах с внутренней геометрией



Публикации

Павлов Д.Г., Просандеева М.С., Панчелюга В.А. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93-97.

Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1 (11), том. 6, - с. 135–145.

Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Панчелюга В. А. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2009, 1 (11), том. 6, - с. 146–151.

Алгебраический конструктор: прямая сумма алгебр и тензорное произведение

Алгебры $A(e_1, \dots, e_n)$ и $B(f_1, \dots, f_m)$

Прямая сумма:

$$A \oplus B : \quad \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m\}$$

$$\dim A \oplus B = n + m, \quad e_i f_j = 0$$

Тензорное произведение:

$$A \otimes B : \quad \{e_i f_j\}$$

$$\dim A \otimes B = nm, \quad e_i f_j = f_j e_i.$$

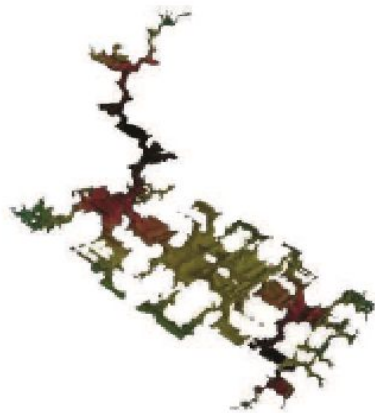
Бикомплексные числа $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (тессарины)

$$B = a + bi_1 + bi_2 + cj,$$

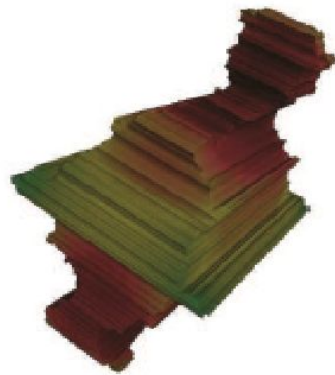
$$i_1^2 = i_2^2 = -1, \quad j^2 = +1,$$

$$i_1 i_2 = i_2 i_1 = j$$

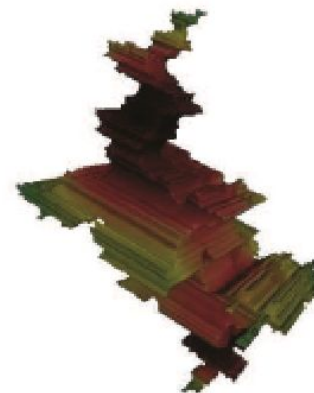
Бикомплексные множества Жюлиа (проекции)



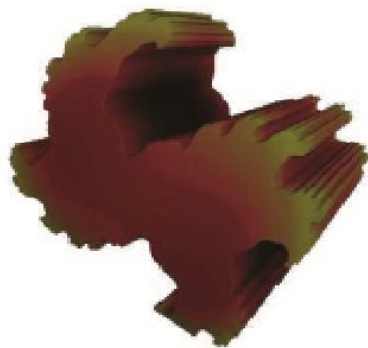
(a) $c = i_1$



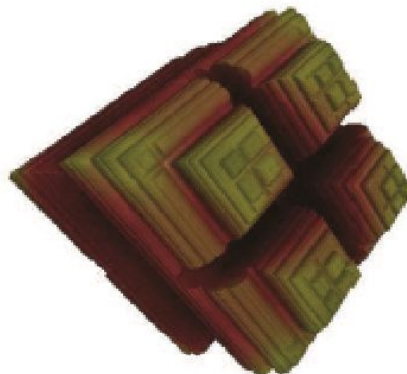
(b) $c = -0.4 - 0.2i_1 + 0.3i_2 + 0.5j$



(c) $c = -0.2 + 0.8i_1$



(d) $c = 0.2 + 0.1i_1 + 0.1i_2 - 0.2j$



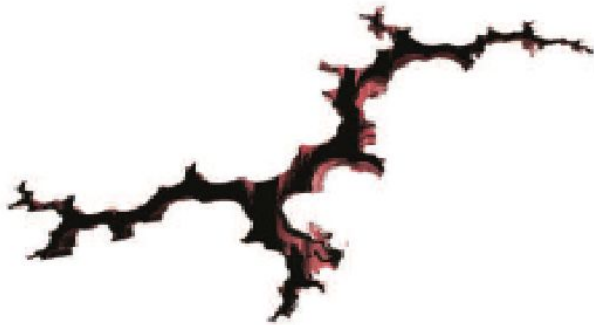
(e) $c = 0.31$



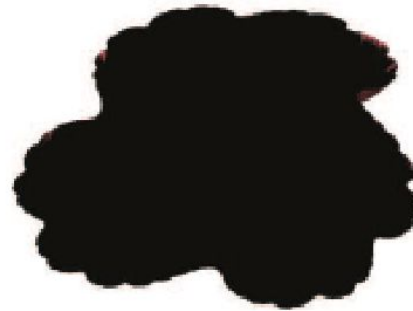
(f) $c = -1.2$

Figure 3.1: Examples of $\mathcal{J}_2^{\mathbb{C}_2}$ -sets.

Тривиальные бикомплексные множества Жюлиа (сечения)



(a) $c = i$



(b) $c = 0.27 + 0.07i$

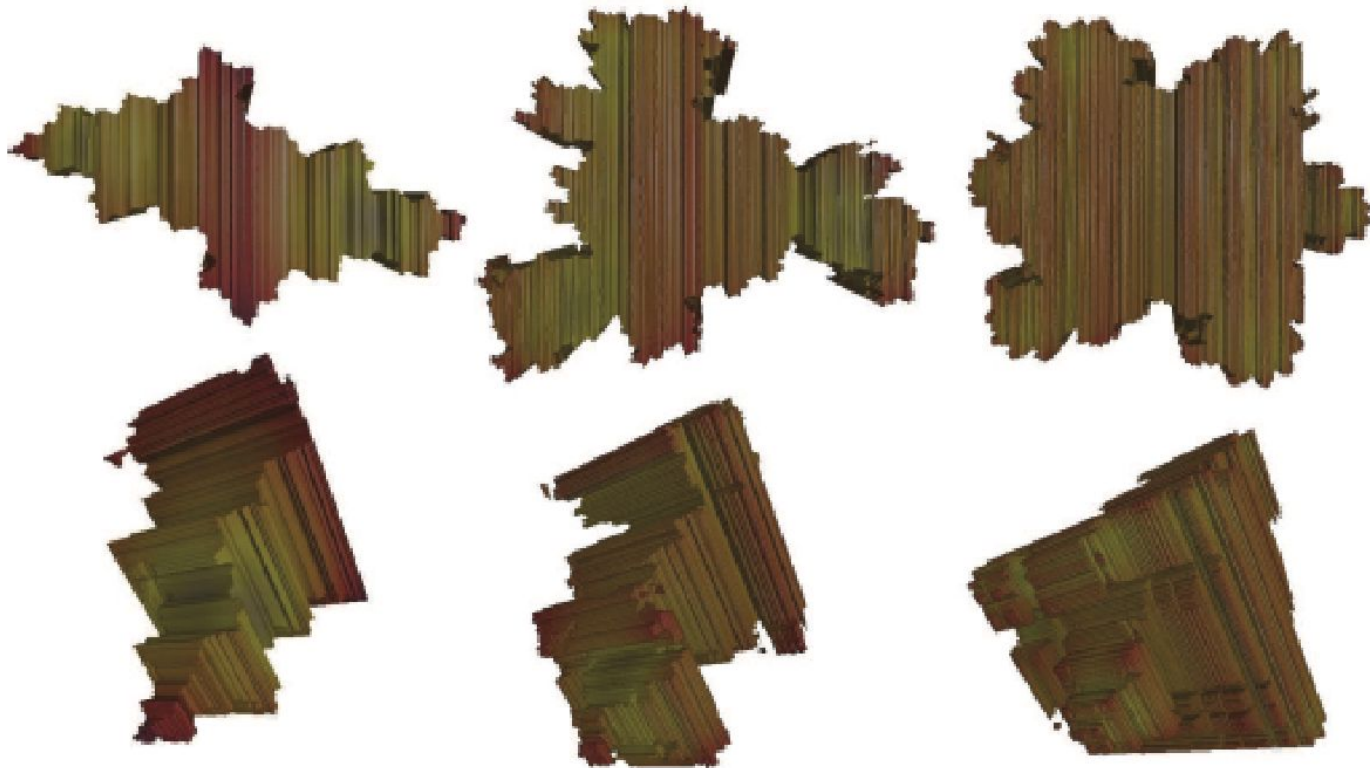


(c) $c = -0.75$



(d) $c = -1 - 0.4i$

Полиномиальные бикомплексные множества Жюлиа



(a) $\mathcal{J}_2^{C_2}(-0.5, 0.5, 0, 0)$

(b) $\mathcal{J}_3^{C_2}(-0.5, 0.5, 0, 0)$

(c) $\mathcal{J}_5^{C_2}(-0.5, 0.5, 0, 0)$

Предел полиномиальных бикомплексных множеств Жюлиа – тело Штейнмеца

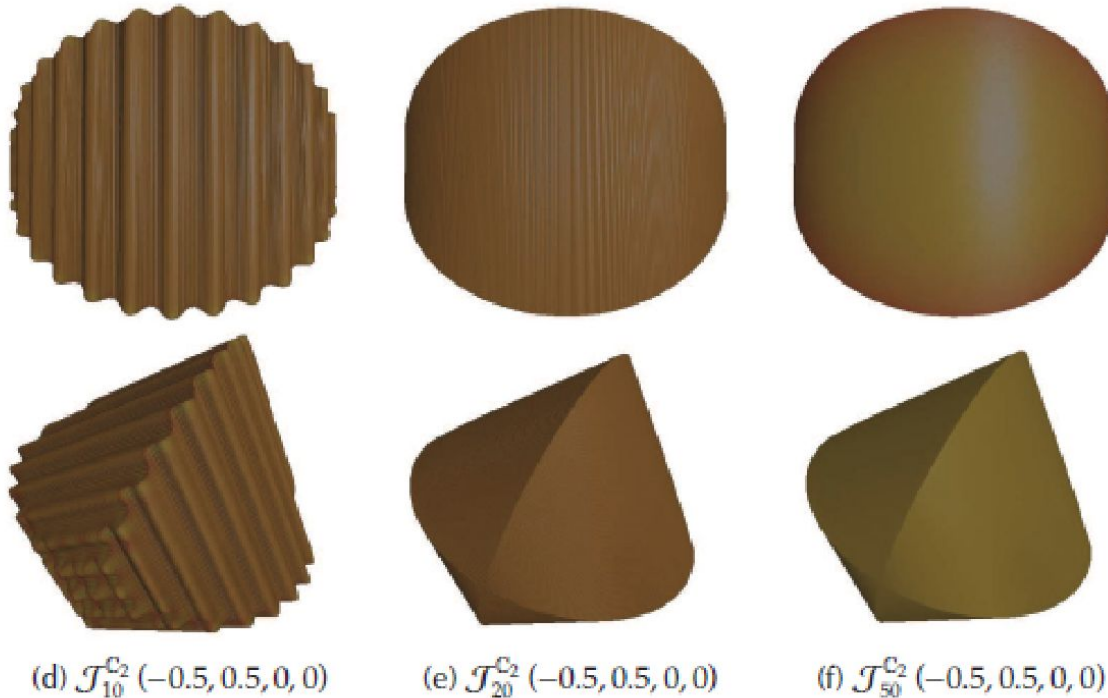


Figure 3.4: Tending of 3-D projections of $\mathcal{J}_p^{\mathcal{C}_2}(-0.5, 0.5, 0, 0)$ to the Steinmetz solid.

Слоения бикомплексного множества Жюлиа

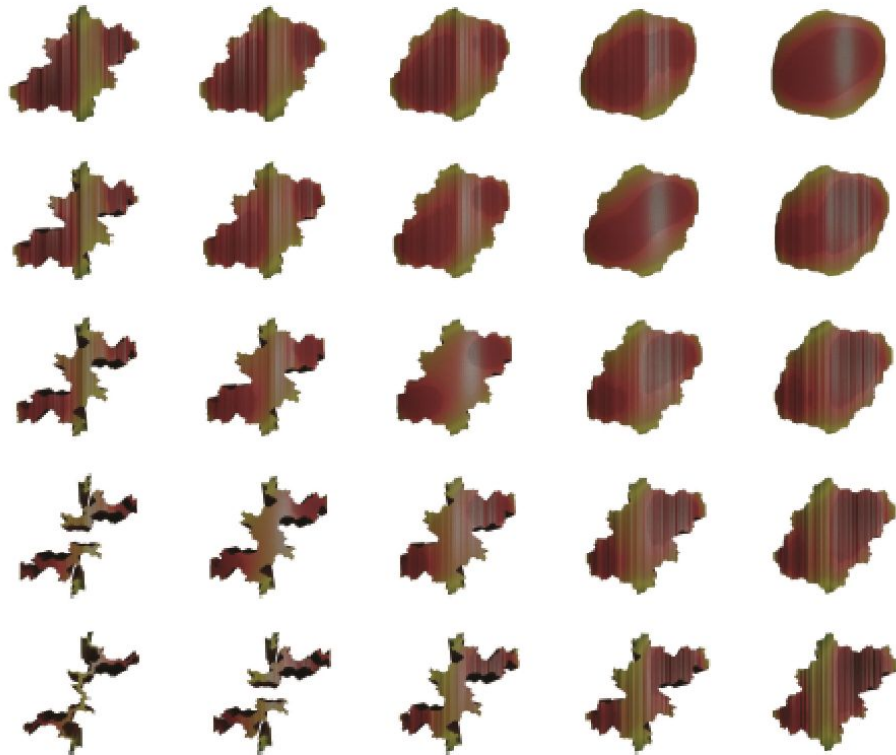
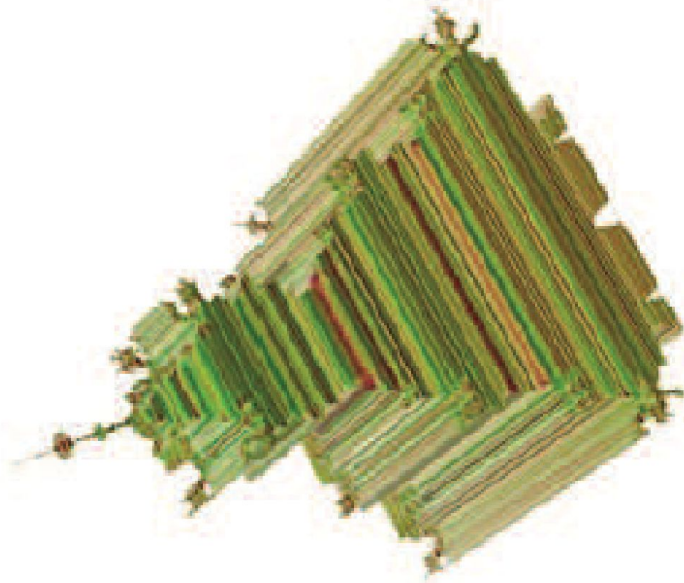


Figure 3.6: Slices of $\mathcal{J}^{C_2}(0, -0.5, 0.1, 0)$ along i_1 -axis (from -0.5 to -0.1) and i_2 -axis (from 0.1 to 0.5), with a step of 0.1 .

Проекция бикомплексного множества Мандельброта (Тетраброт)



Бикватернионъ $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} := \{ \tilde{q} = (b_1 + d_1 j) + (b_2 + d_2 j) i_1 + (b_3 + d_3 j) i_2 + (b_4 + d_4 j) i_3 \mid b_n, d_n \in \mathbb{R} \},$$

$$j^2 = -1, i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1.$$

Несвязные бикватернионные множества Жюлиа



(a) $p = 2, c = 0.4 + 0.4i_1$



(b) $p = 2, c = -0.3i_1 - 0.3i_2$



(c) $p = 3, c = -0.82i_1$



(d) $p = 3, c = 0.435$

Figure 3.8: Examples of disconnected, but not totally, biquaternionic \mathcal{J} -sets.

Бикватернионные множества Жюлиа

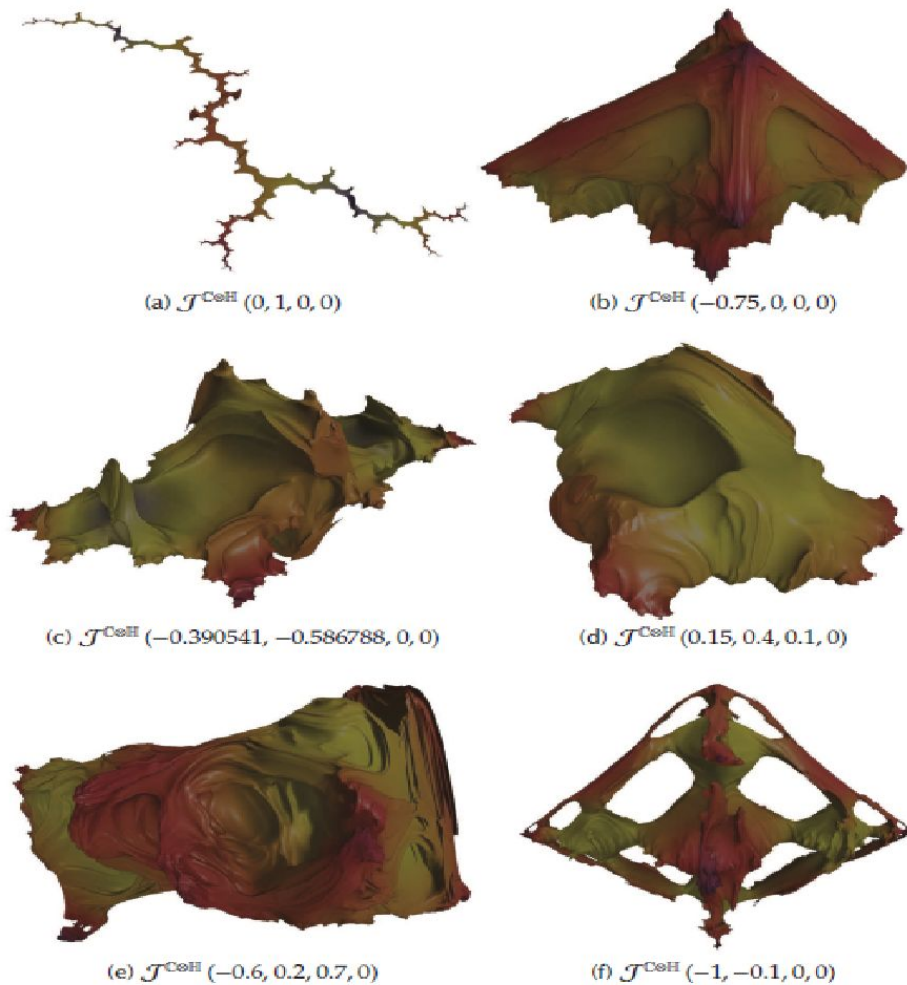


Figure 3.9: Examples of \mathcal{J}^{CoH} -sets.

Полиномиальные бикватернионные множества Жюлиа

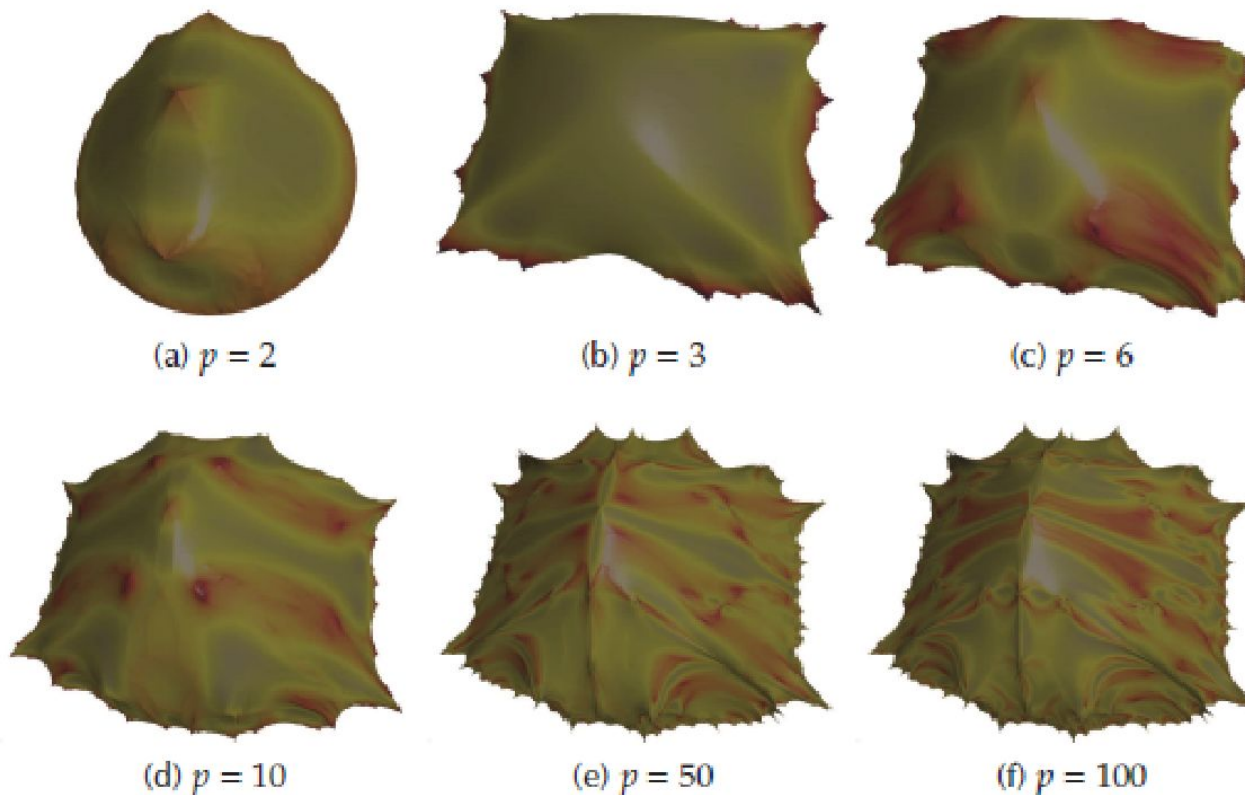


Figure 3.10: Examples of $\mathcal{J}_p^{\text{CoH}}$ -sets for various values of p and with $c = 0$.

Слоения бикватернионного множества Жюлиа

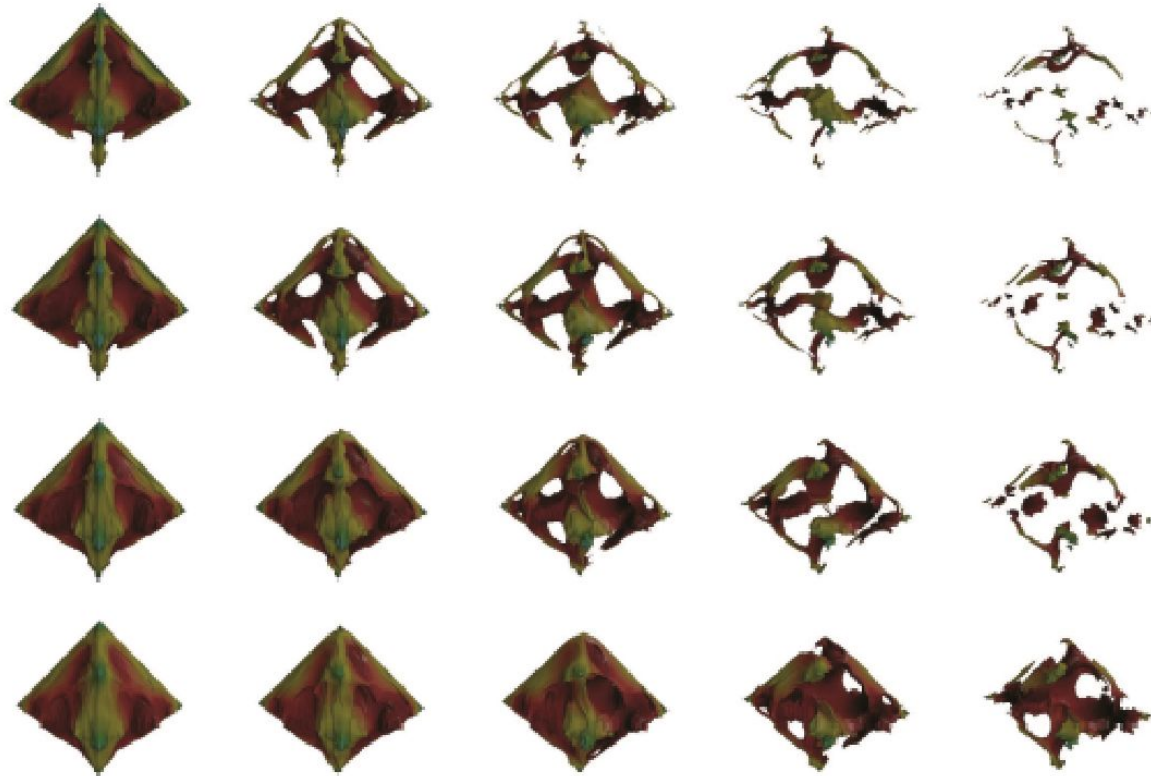


Figure 3.11: Slices of $\mathcal{J}^{\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}_2}(-1, 0, 0, 0)$ along the axis of reals (from -1 to -0.7) and i_1 -axis (from 0 to 0.4), with a step of 0.1 .

Спасибо за внимание!

