Матрицы и определители

Преподаватель:
Мокляк Денис Сергеевич

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей размера m х n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Обозначение:

$\underset{m\times n}{A}$ **- матрица размерности** $m \times n$

a_{ij} **- элемент матрицы** i **–ой строки и** j **-го столбца,**

где

$i=1,2\dots m$

$j=1,2\dots n$

$$\underset{m\times n}{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица размерности m x n

Две матрицы называются __равными,__ если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется __квадратной.__

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размерности 3x3

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются <u>диагональными.</u>

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется <u>единичной</u>.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

единичная матрица

Матрица любого размера называется <u>нулевой</u>, если все ее элементы равны 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

нулевая матрица

Матрица, состоящая из одной строки, называется <u>матрицей-строкой</u> или <u>вектором-строкой</u>.

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$$

матрица-строка

Матрица, состоящая из одного столбца, называется <u>матрицей-столбцом</u> или <u>вектором-столбцом</u>.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

матрица-столбец

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

Например:

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

Ресурсы	*Промышленность*	*с/хозяйство*
Эл. энергия	*8*	*7.2*
Труд. ресурсы	*5*	*3*
Водные ресурсы	*4.5*	*5.5*

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент a_{ij} показывает сколько i – го ресурса потребляет j – отрасль.

Например, a_{32} показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

Пусть дана матрица $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$

Умножаем ее на число λ**:** $\lambda \cdot A = B$

Где каждый элемент матрицы B**:**

$$\boxed{b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}}$$

Где: $i = 1,2\ldots m$

$j = 1,2\ldots n$

Например:

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

2. Сложение матриц

Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

Складываем их:

$$A + B = C$$

Где каждый элемент матрицы *C*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Аналогично проводится вычитание матриц.

Пример.

Найти сумму и разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i – ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.

Пусть даны матрицы

$$\underset{m\times k}{A}=(a_{ij})$$

$$\underset{k\times n}{B}=(b_{ij})$$

Умножаем их:

$$\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}$$

Где каждый элемент матрицы *C*:

$$\boxed{c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}}$$

$$i=1,2\ldots m$$

$$j=1,2\ldots n$$

Пример.

Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times 3}{A}\cdot \underset{3\times 2}{B}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+0\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4+4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Теперь перемножим матрицы в обратном порядке:

$$\underset{3\times2}{B}\cdot\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4\\ 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot0+4\cdot4\\ 0\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot3+4\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 16\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Умножение матриц в общем случае некоммутативно:

$$\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

Перечисленные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1

$$A+B=B+A$$

2

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

4

$A(B+C)=AB+AC$

5

$A(BC)=(AB)C$

4. Транспонирование матриц

Матрица А^{T} называется <u>транспонированной</u> к матрице А, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{T}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

свойства операции траспонирования:

1

$(A^{T})^{T}=A$

2

$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$

3

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

4

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Пример.

Транспонировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Определители.
Свойства определителей.

- Определителем (детерминантом) матрицы n-го порядка называется число:

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

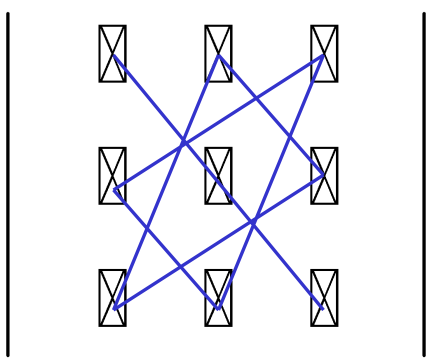
- Правило Сарруса:

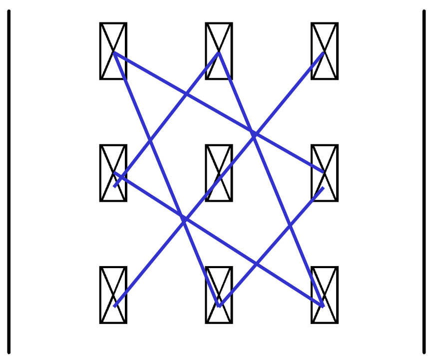
$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

- Правило треугольника:





« + »   « - »

Примеры:

1) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 15 - (-2) = 17$$

2) $$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

3) $$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Примеры:

4) $$\begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9$$

Примеры:

$$5)\quad \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 4\cdot(-1)\cdot 7 + 7\cdot 5\cdot 5 + (-2)\cdot 3\cdot 0 -$$

$$-5\cdot(-1)\cdot(-2) - 0\cdot 5\cdot 4 - 7\cdot 3\cdot 7 =$$

$$= -28 + 175 + 0 - 10 - 0 - 147 = -10$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его транспонировать: $\det A = \det A^T$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$$

3. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 \cdot \left(2 - 9 + 2 - 1 - 12 + 3\right) = 24 \cdot \left(-15\right) = -360$$

4. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 6 - 6 + 3 - 4 = 0$$

5. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

6. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором- из вторых слагаемых.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix}}_{60} = \begin{vmatrix} 2 & 2-1 & 4 \\ 7 & 3-1 & 3 \\ 7 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{-38} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{98}$$

7. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца) , умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \times \kappa \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - \left(-10\right) = 10$$

8. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Привести определитель к треугольному виду и вычислить его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} + = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 60$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца.

- Минором M_{ij} элемента a_{ij} det D называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца содержащих данный элемент.

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для данного определителя найти миноры: M_{22}, M_{31}, M_{43}

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

- Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} det D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

т.е. $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю.

разложение по i-ой строке:

$$\det D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ , \quad i = 1,\ldots,n$$

разложение по j-му столбцу:

$$\det D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ , \quad j = 1,\ldots,n$$

Разложить данный определитель по элементам: 1) 3-ей строки; 2) 1-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

1) Разложим данный определитель по элементам 3-ей строки:

$$\det D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot M_{32} +$$

$$+ a_{33} \cdot (-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^7 M_{34} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 36 - 2 \cdot 2 - 4 - 4 \cdot 11 = 56$$

2) Разложим данный определитель по элементам 1-го столбца:

$$\det D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot M_{21} +$$

$$+ a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{41} \cdot (-1)^5 M_{41} =$$

$$=1\cdot(-1)^{2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-20+0+3\cdot 36-32=56$$

Основные методы вычисления определителя.

- 1. разложение определителя по элементам строки или столбца;
- 2. метод эффективного понижения порядка;
- 3. приведение определителя к треугольному виду.

Метод эффективного понижения порядка:

Вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&5&2\\3&2&-1&4\\1&1&-3&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-3) & \times(-1)\\ & \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&5&2\\0&-4&-10&-8\\0&-1&-6&-2\end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$

Вычислить определитель приведением его к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$
=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
=4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times 2 \\ + \\ \\ \end{matrix} \qquad =4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} =
$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(\text{-}2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$

Обратная

Матрица

Определение. Матрица называется *обратной* к квадратной матрице , если

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Примечание. Операция деления для матриц не определена. Вместо этого предусмотрена операция обращения (нахождения обратной) матрицы.

Определение. Матрица, составленная из *алгебраических дополнений* для элементов исходной матрицы , называется *с о ю з н о й   м а т р и ц е й* .

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Формула для нахождения обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Алгоритм нахождения

- 1. Находим определитель матрицы А. Он должен быть отличен от нуля.
- 2. Находим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А.
- 3. Составляем союзную матрицу и транспонируем ее.
- 4. Подставляем результаты п.1 и п.4 в формулу обратной матрицы.

$$A^{-1}$$

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Р е ш е н и е. Действуем по алгоритму:

1. Находим определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Определитель отличен от нуля $\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 4$$

$$A_{12} = -3$$

$$A_{21} = -2$$

$$A_{22} = 1$$

3. Составляем союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Записываем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Проверка

- Воспользуемся определением обратной матрицы и найдем произведение

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\cdot1+(-2)\cdot3 & 4\cdot2+(-2)\cdot4\\ (-3)\cdot1+1\cdot3 & (-3)\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Задача. Найти матрицу, обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Находим определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-\left(1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 1\right) =$$

$$= 4 - 6 - 1 - (2 - 4 - 3) = -3 - (-5) = 2 \neq 0.$$

2. Алгебраические дополнения для первой строки:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(3 - 1\right) = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8,$$

Алгебраические дополнения для второй строки:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -\left(-1+2\right) = -1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\left(-4+1\right) = 3,$$

Алгебраические дополнения для третьей строки:

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\left(2 - 3\right) = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матриц

- перестановка строк (столбцов) местами;
- исключение из матрицы строк (столбцов), состоящих из нулей;
- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к одной строке (столбцу) другой, предварительно умноженной на любое число, отличное от нуля.

Определение. *Эквивалентными* называются матрицы, полученные одна из другой путем элементарных преобразований.

Важным понятием для матриц является понятие РАНГА.

Существует несколько определений этого понятия. Мы остановимся на одном из них, основанном на элементарных преобразованиях.

Определение. *Рангом матрицы* называется число ненулевых строк в матрице, после приведения ее к ступенчатому виду (путем элементарных преобразований).

Обозначение. Ранг матрицы будем обозначать $r(A)$

или $rang(A)$.

Теорема. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.