



Проверка однородности генеральных дисперсий

Лекция №6
для студентов 2 курса,
обучающихся по специальности 060609 –
Медицинская кибернетика
доц. Шапиро Л.А.
Красноярск, 2015 г.

План лекции:

1. Актуальность темы.
2. Сравнение двух генеральных дисперсий по независимым выборкам из нормальных совокупностей.
3. Сравнение нескольких генеральных дисперсий. Критерии Кочрена.
4. Сравнение нескольких генеральных дисперсий. Критерий Бартлетта , Левене.
5. Заключение

Актуальность темы

На практике задача сравнений дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, методов измерений и т.д. Лучше тот прибор, инструмент, метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т.е. наименьшую дисперсию.

Сравнение двух генеральных дисперсий по независимым выборкам из нормальных совокупностей. Критерий Фишера-Снедекора.

Пусть есть две независимые выборки значений нормально распределенной величины X : x_1, x_2, \dots, x_n - всего n элементов, и нормально распределенной величины Y : y_1, y_2, \dots, y_m - m элементов.

Для этих выборок найдены исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2 .

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, что генеральные дисперсии совокупностей X и Y равны между собой:

$$H_0: D[X] = D[Y]$$

Гипотеза проверяется по критерию Фишера:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера-Снедекора, со степенями свободы

$k_1 = n - 1$, $k_2 = m - 1$, где n - объем выборки, по которой вычислена большая дисперсия, m - объем выборки, по которой вычислена меньшая дисперсия (распределение Фишера-Снедекора зависит только от числа степеней свободы и не зависит от других параметров).

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

1. Односторонняя критическая область.

$$H_0: D[X] = D[Y]$$

$$H_1: D[X] > D[Y]$$

Вероятность попадания критерия в эту область:

$$P [F > F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha$$

Критическую точку $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$ находим по таблице распределения Фишера.

При $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ нулевая гипотеза отвергается,
генеральные дисперсии различаются

При $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ нулевая гипотеза принимается,
генеральные дисперсии равны

Пример: По двум независимым выборкам $n_1=12$ и $n_2=15$
из нормально распределенных генеральных
совокупностей X и Y найдены исправленные
выборочные дисперсии $s_x^2=11,41$ и $s_y^2=6,52$.

При уровне значимости $0,05$ проверить нулевую
гипотезу $H_0: D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных
дисперсий при конкурирующей гипотезе

$$H_1: D[X] > D[Y].$$

Решение: Найдем отношение большей исправленной
дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 11,41/6,52 = 1,75$$

$$k_1 = 12 - 1 = 11, k_2 = 15 - 1 = 14$$

$$F_{кр}(0,05, 11, 14) = 2,56$$

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ ($1,75 < 2,56$) нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

2. Двусторонняя критическая область.

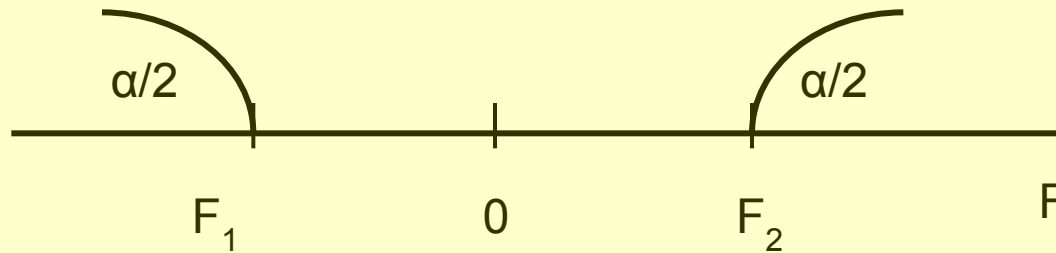
$$H_0: D[X] = D[Y]$$

$$H_1: D[X] \neq D[Y]$$

Строим двустороннюю критическую область так, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы равна α . Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов равна $\alpha/2$.

$$P(F < F_1) = \alpha/2$$

$$P(F > F_2) = \alpha/2$$



т.е. область принятия гипотезы будет $F_1 < F < F_2$.

Правую точку F_2 находим по таблице.левой точки таблица не содержит. Однако достаточно найти правую критическую точку F_2 при уровне значимости вдвое меньше заданного ($\alpha/2$).

Вероятность попадания критерия в «левую часть» тоже равна $\alpha/2$. Так как эти события несовместны, то вероятность попадания критерия во всю двустороннюю область будет равна $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$

- Пример: По двум независимым выборкам $n_1=10$ и $n_2=18$ из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2=1,23$ и $s_y^2=0,41$.

При уровне значимости **0,1** проверить нулевую гипотезу $H_0: D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе

$$H_1: D[X] \neq D[Y].$$

Решение: Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 1,23/0,41 = 3$$

$$k_1 = 10 - 1 = 9, k_2 = 18 - 1 = 17$$

$$F_{\text{кр}}(0,05, 9, 17) = 2,5$$

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ ($3 > 2,5$) нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий отвергается.

Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности.

- Генеральная дисперсия хотя и неизвестна, но можно предполагать теоретически или из предыдущего опыта, что она равна σ_0^2 .
- Имеется выборка с исправленной дисперсией S^2 с $k=n-1$ степенями свободы. Требуется проверить нулевую гипотезу, что при заданном уровне значимости генеральная дисперсия равна гипотетическому значению σ_0^2 .
- Т.к. S^2 – несмещенная оценка генеральной дисперсии нулевую гипотезу можно записать в виде: $H_0: M(S^2) = \sigma_0^2$, т.е. требуется установить значимо или нет различаются выборочная и генеральная дисперсия.

Критерий принятия гипотезы:

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Критическая область строится в зависимости от конкурирующей гипотезы:

1. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ правосторонняя область

$$P [\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2(\alpha, k)] = \alpha, \quad k=n-1$$

- Пример: По выборке $n=13$ из нормально распределенной генеральной совокупности найдена исправленная выборочная дисперсии $s^2=14,6$.

1. При уровне значимости $0,01$ проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2=12$

$$H_1: \sigma^2 > 12.$$

Решение:

$$\chi_{набл}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(13-1) \cdot 14,6}{12} = 14,6$$

$$\chi_{кр}^2(0,01, 12)=26,2 \quad \chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2 (14,6 < 26,2)$$

нулевая гипотеза не отвергается- различие между выборочной дисперсией (14,6) и гипотетической генеральной дисперсией (12)-незначимо.

2. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу
 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Решение: Находим двустороннюю критическую область:

$$P [\chi^2 < \chi^2_{\text{левкр}}(\alpha/2, k)] = \alpha/2, \quad k=n-1$$

$$P [\chi^2 > \chi^2_{\text{правкр}}(\alpha/2, k)] = \alpha/2,$$

В таблице есть только правосторонние критические точки.

т.к. события $\chi^2 < \chi^2_{\text{левкр}}$ и $\chi^2 > \chi^2_{\text{левкр}}$ противоположны сумма их вероятностей равна 1:

$$P (\chi^2 < \chi^2_{\text{левкр}}) + P (\chi^2 > \chi^2_{\text{левкр}}) = 1$$

$$P (\chi^2 > \chi^2_{\text{левкр}}) = 1 - P (\chi^2 < \chi^2_{\text{левкр}})$$

Следовательно, по таблице находим $\chi^2_{\text{правкр}}(\alpha/2, k)$ и $\chi^2_{\text{левкр}}(1-\alpha/2, k)$

Если $\chi^2_{\text{левкр}} < \chi^2 < \chi^2_{\text{правкр}}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{левкр}}$ или $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{правкр}}$ нулевая гипотеза отвергается

- Пример: По выборке $n=13$ из нормально распределенной генеральной совокупности найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2=10,3$.

При уровне значимости **0,02** проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2=12$

$$H_1: \sigma^2 \neq 12.$$

Решение:

$$\chi_{набл}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(13-1) \cdot 10,3}{12} = 10,3$$

$$\chi_{крправ}^2(0,01, 12)=26,2 \quad \chi_{левкр}^2(0,99, 12)=3,57$$

$$3,57 < 10,3 < 26,2$$

нулевая гипотеза не отвергается - различие между выборочной дисперсией (10,3) и гипотетической генеральной дисперсией (12) - незначимо.

3. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Левосторонняя критическая область.

по таблице находим $\chi^2_{кр}(1-\alpha, k)$

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}(1-\alpha, k)$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(1-\alpha, k)$ нулевая гипотеза отвергается

$\chi^2_{левкр}(0,98, 12)=4,18$. $4,18 < 10,3$ нулевая гипотеза отвергается.

Сравнение нескольких генеральных дисперсий по независимым выборкам равного объема из нормальных совокупностей, критерий Кочрена.

Пусть генеральные совокупности X_1, X_2, \dots, X_l распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены l независимых выборок одинакового объема n и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $s^2_1, s^2_2, \dots, s^2_l$ с числом степеней свободы $k=n-l$.

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, что генеральные дисперсии совокупностей равны между собой: $H_0: D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_l)$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем критерий Кочрена - отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:

$$G = S_{\max}^2 / (S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_l^2)$$

Распределение этой СВ зависит только от числа степеней свободы k и числа выборок l .

правосторонняя область

$$P [G > G_{\text{кр}}(\alpha, k, l)] = \alpha, \quad k = n - l$$

Если $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}(\alpha, k, l)$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $G_{\text{набл}} > G_{\text{кр}}(\alpha, k, l)$ нулевая гипотеза отвергается

- Пример: По четырем независимым выборкам $n=17$ из нормально распределенной генеральной совокупности найдены исправленные выборочные дисперсии: 0,26, 0,36, 0,40, 0,42.
- а) При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности генеральных дисперсий
- б) Оценить генеральную дисперсию

Решение:

$$G_{\text{набл}} = 0,42 / (0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42) = 0,2917$$

$$G_{\text{крправ}}(0,05, 16, 4) = 0,4366$$

$$0,2917 < 0,4366$$

нулевая гипотеза не отвергается - исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

б) т.к. нулевая гипотеза принимается, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднее арифметическое исправленных дисперсий:

$$\sigma^2 = (0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42) / 4 = 0,36$$

Сравнение нескольких генеральных дисперсий по независимым выборкам различного объема из нормальных совокупностей, критерий Бартлетта.

Пусть генеральные совокупности X_1, X_2, \dots, X_l распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены l независимых выборок различного объема n_1, n_2, \dots, n_l и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $s^2_1, s^2_2, \dots, s^2_l$.

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, что генеральные дисперсии совокупностей равны между собой: $H_0: D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_l)$
(гипотеза об однородности дисперсий)

Число степеней свободы дисперсии s_i^2 :

$$k_i = n_i - 1.$$

Обозначим \bar{s}^2 - среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$\bar{s}^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^l k_i s_i^2 \right)}{k}$$

Критерий Бартлета: $V = \sqrt{k}/C$, где

$$V = 2,303 \left[k \lg \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^l k_i \lg s_i^2 \right]$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^l \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right]$$

Бартлетт установил, что при условии справедливости нулевой гипотезы С.В. В распределена приближенно как χ^2 с $l-1$ степенями свободы, если все $k_i > 2$, т.е. объем каждой выборки не меньше 4.

Критическую область строят правостороннюю:

$$P [B > \chi^2_{кр}(\alpha, l-1)] = \alpha$$

по таблице находим $\chi^2_{кр}(\alpha, l-1)$

Если $B_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований
отвергнуть нулевую гипотезу

Если $B_{набл} > \chi^2_{кр}$ нулевая гипотеза
отвергается

Пример: по четырем независимым выборкам объемом $n_1=10$, $n_2=12$, $n_3=15$, $n_4=16$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 0,25, 0,40, 0,36, 0,46.

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий (критическая область - правосторонняя).

Решение:

$$\bar{s}^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^l k_i s_i^2 \right)}{k} = 18,59 / 49 = 0,379$$

$$\lg 0,379 = -0,42$$

$$V = 2,303 [49 \cdot (-0,42) - (-21,066)] = 1,02$$

По таблице находим $\chi^2_{\text{кр}}(0,05, 4-1) = 7,8$

т.к. $V < \chi^2_{\text{кр}}$ $C = 1,06 > 1$, то $V_{\text{набл}} = V/C < \chi^2_{\text{кр}}$

нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, исправленные дисперсии различаются незначимо

Критерий Левене (Levene)

$$W = \frac{(N - k) \cdot \sum_{i=1}^k N_i (Z_i - Z_{\dots})^2}{(k - 1) \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - Z_{i.})^2}$$

где:

W- критерий Левене

k- число различных групп

N- число случаев во всех группах

N_i- число случаев в i группе

Y_{ij} – значение j переменной в i группе

$$Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|$$

\bar{Y}_i - средняя арифметическая i-й группы

Заключение

Нами рассмотрены:

Критерии проверки однородности дисперсий.


РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

- Попов А.М. Теория вероятней и математическая статистика /А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 440 с.
- Герасимов А. Н. Медицинская статистика: учебное пособие / А. Н. Герасимов. – М. : Мед. информ. агентство, 2007. – 480 с.
- Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К. В. Балдин. – М. : Флинта, 2010. – 488с.

Учебно–методические пособия:

- Шапиро Л.А., Шилина Н.Г. Руководство к практическим занятиям по медицинской и биологической статистике Красноярск: ООО «Поликом». – 2003.



БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ