Сравнение двух средних нормальных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки). Условия критерия.

1. Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально
2. Дисперсии генеральных совокупностей неизвестны.
3. Неизвестные генеральные дисперсии равны между собой.

Требуется установить значимо или незначимо различаются выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$, найденные по независимым малым выборкам объемов ***m*** и ***n***.

Или проверить гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$

Статистический критерий

$$t_{расч} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)\cdot S_X^2 + (m-1)\cdot S_Y^2}}\sqrt{\frac{nm\cdot(n+m-2)}{n+m}}$$

Сравнение двух средних нормальных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки). Принятие решений.

Двусторонняя проверка. Если альтернативная гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$

То Если $|t_{расч}| < t_{табл}$, то нулевую гипотезу не отвергают при уровне значимости α, в противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Здесь $t_{табл}$ - *критическое значение распределение* Стьюдента, определенное при степенях свободы $v = n + m - 2$. Определяется <u>отдельно</u> для тестов двусторонней и односторонней проверок.

Правосторонняя проверка. Если альтернативная гипотеза H_1: $M(X) > M(Y)$

Если $t_{расч} < t_{табл}$, то нулевую гипотезу не отвергают при уровне значимости α, в противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Левосторонняя проверка. Если альтернативная гипотеза H_1: $M(X) < M(Y)$

Если $t_{расч} > t_{табл}$, то нулевую гипотезу не отвергают при уровне значимости α, в противном случае принимают альтернативную гипотезу

Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема. Условия критерия Бартлетта.

1. Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально.
2. Из этих совокупностей извлечены независимые выборки $n_1, n_2, \ldots, n_l$ различных объемов. По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$

Нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий:

H_0: $D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_l)$

Средняя арифметическая исправленных дисперсий, взвешенная по числам степеней свободы $k_i=n_i-1$

$$\overline{s^2} = \left(\sum_{i=1}^{l} k_i \cdot s_i^2\right) \Big/ k$$

где $k = \sum_{i=1}^{l} k_i$

Критерий Бартлетта.

$$B_{расч} = V/C$$

Где:

$$V = 2{,}303\left[k \cdot \lg \overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2\right]$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right]$$

Правило принятия решения: Для проверки нулевой гипотезы об однородности дисперсий нормальных совокупностей при уровне значимости α, необходимо вычислить расчетное значение критерия Бартлета $B_{расч}$ и по таблице критических значений определить $\chi^2_{табл}$ со степенями свободы $\nu=l-1$

Если: $B_{расч} < \chi^2_{табл}$, то нулевую гипотезу нет оснований отвергнуть при α, в противном случае нулевую гипотезу отвергают

Замечания к критерию Бартлетта.

Замечание 1. Случайная величина B при условии справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно как χ^2 со степенями свободы $v=l$-1, если объем каждой из выборок n_i не меньше 4.

Замечание 2. критерий Бартлета также называют *гипотезой об однородности дисперсий.*

Замечание 3. критерий Бартлета чувствителен к отклонениям распределений от нормального, поэтому у выводам следует относится с осторожностью.

Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена.

1. Пусть генеральные совокупности X_1, $X_2,\ldots,X_l$ распределены нормально.
2. Из этих совокупностей извлечено l выборок одинакового объема n.
3. По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии s_1^2, $s_2^2,\ldots, s_l^2$, имеющие степени свободы $k=n-1$

Требуется проверить значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии. То есть проверить:

H$_0$: $D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_l)$

Критерий Кочрена: $$G_{расч}=S_{\max}^2 \Big/ \left(S_1^2+S_2^2+\ldots+S_l^2\right)$$

<u>Правило принятия решений</u>: Если $G_{расч}<G_{табл}$ - нет оснований отклонить H$_0$, в противном случае нулевую гипотезу отвергают на заданном уровне значимости α.

Здесь $G_{табл}$ критическое значение распределение Кочрена определенное по таблице для степеней свободы $v_1=n-1$, $v_2=l$.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИКИ

Данные методы математической статистики, в отличие от параметрических методов (t-критерий для сравнения средних в двух выборках), не предполагают знания вида распределений генеральных совокупностей.

Для сравнения двух выборок используют:

Критерий Мана-Уитни

Критерий серий Вальда—Вольфовица

Двухвыборочный критерий Колмогорова—Смирнова

Критерий Мана-Уитни

U-критерий Мана-Уитни — наиболее мощная (чувствительная) непараметрическая альтернатива t-критерию для независимых выборок; фактически.

H_0: различий в двух группах нет

H_1: различия в двух группах существенны.

Статистика Манна—Уитни вычисляется как:

$$U = W - \frac{1}{2}m(n+1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}$$

где W — так называемая статистика Вилкоксона, а

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < Y_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, для U-статистики определяется расчетное значение Z-статистики, которое для принятия решения в пользу нулевой или альтернативной гипотезы, сравнивается с Z, определенном по таблице стандартного нормального распределения.

Критерий серий Вальда—Вольфовица

Критерий серий Вальда—Вольфовица проверяет гипотезу о том, что две независимые выборки извлечены из двух популяций, которые в чем-то **существенно различаются между собой**, иными словами, различаются не только средними, но также формой распределения.

Серийный критерий позволяет обнаружить различие между двумя выборками не только по центральной тенденции, но и по другим характеристикам.

Нулевая гипотеза: ряды X и Y являются двумя выборками из одной генеральной совокупности, то есть данные однородны.

Количественным показателем, по которому можно отличить оба эти распределения друг от друга, может служить число серий S, каждая из которых есть непрерывная последовательность наблюдений, принадлежащих к одному из двух рядов.

Нулевая гипотеза отвергается при $S<S(\alpha)-2$ и не отвергается при $S \geq S(\alpha)$

Здесь α - уровень значимости (обычно 0,05; 0,1; 0,01).

Для значений $S(\alpha)$ существуют таблицы значений.

Двухвыборочный критерий Колмогорова—Смирнова

Критерий Колмогорова—Смирнова проверяет гипотезу о том, что выборки извлечены из одной и той же популяции, против альтернативной гипотезы, когда выборки извлечены из разных популяций. Иными словами, проверяется гипотеза однородности двух выборок.

Однако в отличие U-критерия Манна—Уитни, который проверяет различие в положении двух выборок, критерий Колмогорова—Смирнова также чувствителен к различию общих форм распределений двух выборок (в частности, различия в рассеянии, асимметрии и т. д.).

Для теста рассчитывается р-уровень.

Решение принимают следующим образом

$p>\alpha$ (p>0,2), то верна H_0 о том, что различия в выборках несущественны.

$p\leq\alpha$, то верна H_1 о том, что различия в выборках существенны.

Дисперсионный анализ

Определение: **Дисперсионным анализом** называется анализ изменчивости признака под влиянием каких-либо контролируемых изменяющихся факторов.

То есть **фактор в дисперсионном анализе** описывает причину вариации данных. Если фактор всего один, то процедура проверки носит название **однофакторного дисперсионного анализа**.

Определение. **Уровнем дисперсионного анализа** называется число, описывающее число категорий интересующего фактора.

Основной целью дисперсионного анализа является исследование значимости различия между средними.

Нулевая гипотеза:

«Средние величины результативного признака во всех условиях действия фактора (или градациях фактора) одинаковы».

Альтернативная гипотеза:

«Средние величины результативного признака в разных условиях действия фактора различны».

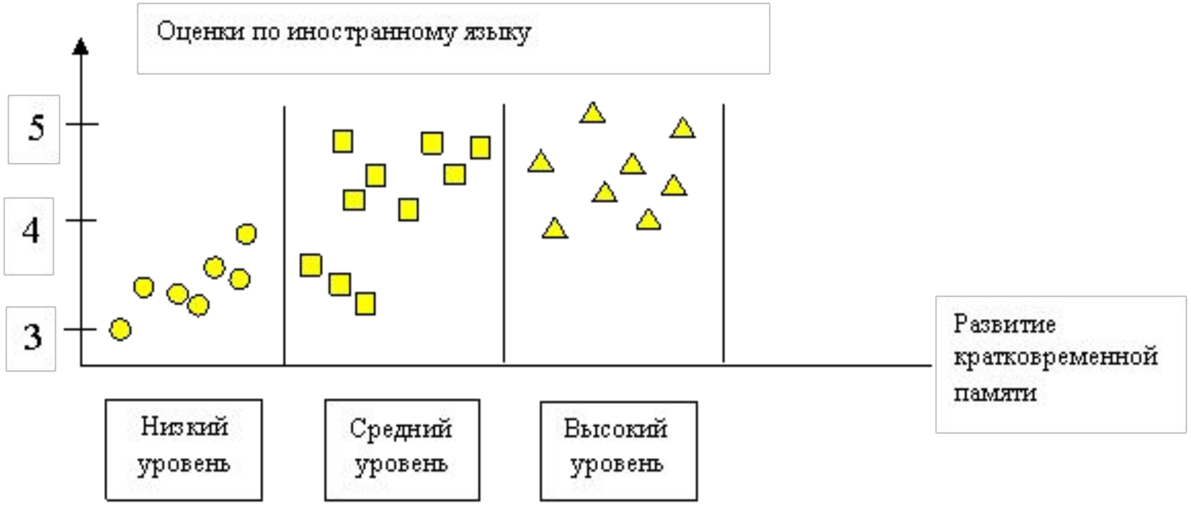
Условия использования дисперсионного анализа

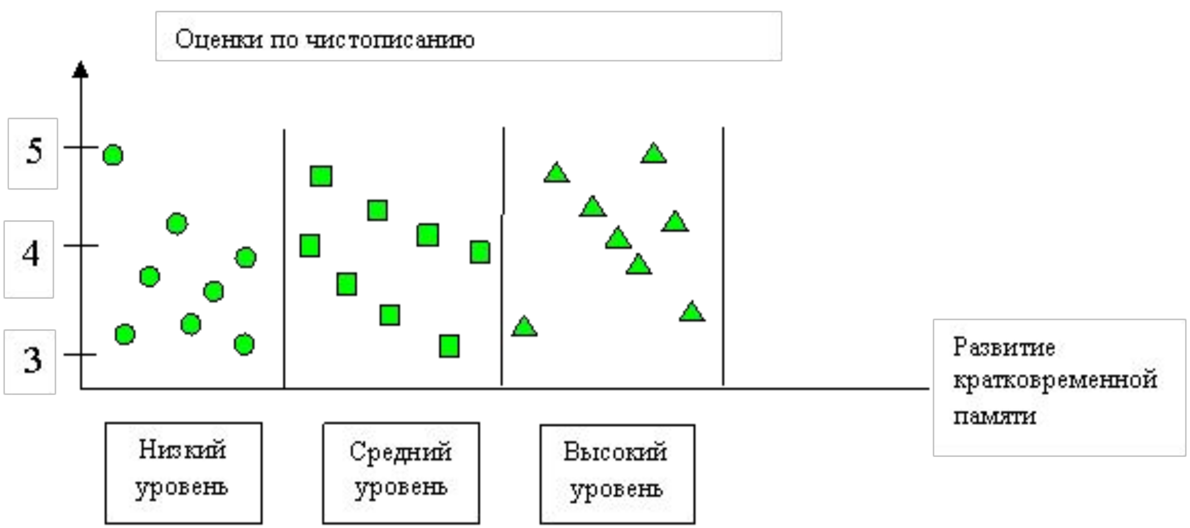
1. Участвующие в сравнении совокупности, то есть к которым применяется дисперсионный анализ, должны быть нормально распределены.
2. Выборки должны быть независимы друг от друга.
3. Все совокупности должны иметь одинаковую дисперсию.
4. Все выборки должны быть одинакового объема

Справка: Фундаментальная концепция дисперсионного анализа была предложена Фишером в 1920 году.

Справка: В зарубежной литературе дисперсионный анализ именуется ANOVA – «Analisis of Variance»

Пример задачи дисперсионного анализа*





Иллюстрируется исследование зависимости учебной успеваемости школьников от развития кратковременной памяти. В качестве фактора рассматривался уровень развития кратковременной памяти, а в качестве результативных признаков – успеваемость по предмету. Видно, например, что фактор, по-видимому, оказывает существенное влияние при обучении иностранному языку, и незначим для чистописания.

*пример взят из http://khomich.narod.ru/metodi

Принципы дисперсионного анализа

	Группа 1	Группа 2
Наблюдение 1 Наблюдение 2 Наблюдение 3	**2** **3** **1**	**6** **7** **5**
Среднее Сумма квадратов (СК)	**2** **2**	**6** **2**
Общее среднее Общая сумма квадратов	**4** **28**	

Выводы средние в двух группах: $\overline{X}_1 = \frac{(2+3+1)}{3} = 2$ и $\overline{X}_2 = \frac{(6+7+5)}{3} = 6$

Сумма квадратов отклонений в каждой группе: $SS_1 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - 2)^2 = 2$ и

$$SS_2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - 6)^2 = 2$$

Общее средняя дисперсия :2+2=4, Общая сумма квадратов рассчитывается без учета деления на выборки при среднем 4:

$$SS_{общ} = \sum_{i=1}^{6}(x_i - 4)^2 = 28$$

Дисперсия, основанная на внутригрупповой изменчивости, меньше, чем общая дисперсия.

Принципы дисперсионного анализа

Общая сумма квадратов $SS_{общ}$ = 28 разбита на компоненты: сумму квадратов, обусловленную внутригрупповой изменчивостью (2+2=4) и сумму квадратов, обусловленную различием средних значений между группами (28-(2+2)=24).

Определение: Внутригрупповая изменчивость (SS) называется **остаточной компонентой или дисперсией ошибки,** то есть при проведении эксперимента она не может быть предсказана или объяснена.

Определение: Компоненту дисперсии между группами называют **дисперсией эффекта *SS эффекта*** и ее можно объяснить различием между средними значениями в группах.

В основе дисперсионного анализа лежит правило о разложении дисперсии.

$$SS_{общ} = SS_{м/групп} + SS_{ост}$$

Дисперсии аналитической группировки

Если данные имеют вид аналитической группировки, то вычисляют:

Общую дисперсию (измеряет вариацию признака по всей совокупности):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i}$$

Межгрупповую дисперсию: характеризует систематическую вариацию.

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i}$$

где $\boldsymbol{x_i}$ и - соответственно средняя *i*-ой группы и общая средняя варирующего признака ***x;***

$\boldsymbol{n_i}$ – частота *i*-ой группы

k- число групп.

Дисперсии аналитической группировки

Внутригрупповую дисперсию: отражает случайную вариацию и рассчитывается для каждой *i*-ой группы отдельно

$$\sigma^2{}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} (x_i - \bar{x}_i)^2 n_i}{n_i}$$

где $\boldsymbol{x_i}$ - значение признака у отдельных элементов совокупности;

$\boldsymbol{n_i}$ – число единиц в группе *i*.

Средняя из внутригрупповых дисперсий

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

Теорема (правило сложения Дисперсий): общая дисперсия, возникающая под влиянием всех факторов, равна сумме дисперсий, возникающих под влиянием всех прочих факторов, и дисперсии, возникающей за счет группировки признака.

$$\sigma^2 = \delta^2 + \overline{\sigma^2}$$

Проверка гипотезы дисперсионного анализа

H$_0$: о равенстве математических ожиданий для всех выборок $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_k$

H$_1$: о неравенстве $\mu_0 \neq \mu_1 \neq \ldots \neq \mu_k$, для всех выборок $i = \overline{1,k}$

Вычисляется значение F-критерия Фишера

$$F_{расч} = \frac{SS_{ост} / k-1}{SS_{м/групп} / N-k}$$

Где N – общее число наблюдений во всех k выборках

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Определяется табличное значение $F_{табл} = F^{p}_{k-1,N-k}$ вероятности p и степеней свободы $m_1 = k\text{-}1$, $m_2 = N\text{-}k$, причем $p = 1\text{-}\alpha$, где α – уровень значимости.

$F_{табл} > F_{расч} \Rightarrow$ принимаем H$_0$ с вероятностью p;

$F_{табл} < F_{расч} \Rightarrow$ отвергаем H$_0$ в пользу H$_1$ с вероятностью p.

Точность оценки

- Определение. **Точечной** называют оценку Q, которая определяется одним числом.
- Определение. **Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами—концами интервала.

Интервальные оценки позволяют установить **точность** и **надежность** оценок .

Пусть для оценки неизвестного параметра Q была найдена по данным выборки статистическая характеристика Q^*.

Примечание: примем Q постоянным числом (Q может быть и случайной величиной).

1. Q^* тем точнее определяет параметр Q, чем меньше абсолютная величина разности $|Q- Q^*|$.
2. Если $\delta>0$ и $|Q- Q^*| <\delta$, то чем меньше δ , тем оценка точнее.
3. ***Положительное число δ характеризует точность оценки.***