Кафедра маркшейдерского дела

Математика, часть 2

Статистическая проверка гипотез

Лекция № 12

Статистическая проверка гипотез

- H_0: - нулевая гипотеза
- H_1: - конкурирующая гипотеза (альтернативная)

ГИПОТЕЗЫ

ПРОСТАЯ

СЛОЖНАЯ

Ошибки при принятии гипотез

ОШИБКИ

1 РОДА

Будет отвергнута правильная гипотеза

2 РОДА

Будет принята неправильная гипотеза

Замечание 1

Два случая принятия правильного решения

1

Гипотеза принимается, причём и в действительности она правильная

2

Гипотеза отвергается, причём и в действительности она неверна

Замечание 2

Вероятность совершить ошибку первого рода называют «УРОВЕНЬ ЗНАЧИМОСТИ» и обозначают

$$\alpha$$

$$\alpha = 0.05$$

Это означает, что в 5 случаях из 100 существует риск совершить ошибку 1 рода

Основные определения и понятия

- Критическая область – совокупность значения критерия, при которых отвергают нулевую гипотезу H_0:
- Область принятия гипотез – совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают
- Критические точки – точки, отделяющие критическую область от области принятия решений

Основные определения и понятия

- Принцип проверки гипотез – если критерий принадлежит критической области, нулевая гипотеза отвергается; если принадлежит области принятия решений – принимается

Существуют:

1. Односторонняя критическая область
   1) Левосторонняя
   2) правосторонняя
2. двусторонняя

Критерий о равенстве средних

- Проверяется нулевая гипотеза **H₀:** $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- Альтернативная гипотеза **H₁:** $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

$$T = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \left(n_1 + n_2 - 2\right)}{n_1 + n_2}}$$

- СВ T имеет закон распределения Стьюдента с $k=n_1+n_2-2$ степенями свободы

Таблицы критериев

а) Значение F при P = 0,05 (Фишер)

K_2 \ K_1	2	3	4	6	8	I2	24	∞
2	I9,00	I9,I6	I9,25	I9,33	I9,37	I9,4I	I9,45	I9,50
3	9,55	9,28	9,I2	8,94	8,84	8,78	8,64	8,53
4	6,94	6,59	6,39	6,I6	6,04	5,9I	5,77	5,63
5	5,79	5,4I	5,I9	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,I4	4,76	4,53	4,28	4,I5	4,00	3,84	3,76
7	4,74	4,35	4,I2	3,87	3,73	3,57	3,4I	3,23
8	4,46	4,06	3,84	3,58	3,44	3,28	3,I2	2,93
9	4,26	3,86	3,63	3,37	3,23	3,07	2,90	2,7I
I0	4,I0	3,7I	3,48	3,22	3,07	2,9I	2,74	2,54
I2	3,88	3,49	3,26	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
I4	3,74	3,34	3,II	2,85	2,70	2,53	2,35	2,I3
I6	3,63	3,24	3,0I	2,74	2,59	2,42	2,24	2,0I
I8	3,55	3,I6	2,93	2,66	2,5I	2,34	2,I5	I,92
20	3,49	3,I0	2,87	2,60	2,45	2,28	2,08	I,84
25	3,38	2,99	2,76	2,49	2,34	2,I6	I,96	I,7I
30	3,32	2,92	2,69	2,42	2,27	2,09	I,89	I,62
40	3,23	2,84	2,6I	2,34	2,I8	2,00	I,79	I,52
60	3,I5	2,76	2,52	2,25	2,I0	I,92	I,70	I,39
I20	3,07	2,68	2,45	2,I7	2,02	I,83	I,6I	I,25
∞	2,99	2,60	2,37	2,09	I,94	I,74	I,52	I,00

б) Значение t при P = 0,I; 0,05. (Стьюдент)

K \ P	0,I0	0,05
I	6,3I	I2,7I
2	2,92	4,30
3	2,35	3,I8
4	2,I3	2,78
5	2,0I	2,57
6	I,94	2,45
7	I,89	2,36
8	I,86	2,3I
9	I,83	2,26
I0	I,8I	2,23
I2	I,78	2,I8
I4	I,76	2,I4
I6	I,75	2,I2
I8	I,73	2,I0
20	I,72	2,09
25	I,7I	2,06
30	I,70	2,04
60	I,67	2,00
I20	I,66	I,98
∞	I,64	I,96

в) Значения χ^2.

r \ P	0,I0	0,05
I	2,7I	3,84
2	4,60	5,99
3	6,26	7,82
4	7,78	9,49
5	9,24	II,07
6	I0,64	I2,59
7	I2,02	I4,07
8	I3,36	I5,5I
9	I4,68	I6,93
I0	I5,99	I8,3I
II	I7,28	I9,68
I2	I8,55	2I,00

Критерий однородности средних

- Проверяется нулевая гипотеза **H$_0$:** $\bar{x} = \bar{x}_i$

- Альтернативная гипотеза **H$_1$:** $\bar{x} \neq \bar{x}_i$

$$T = \frac{\left|\bar{x} - \bar{x}_i\right|}{\sigma}\sqrt{\frac{n_i(n-2)}{n - n_i - n_i y_i^2}}; \qquad y_i = \frac{\left|\bar{x} - \bar{x}_i\right|}{\sigma}$$

- СВ T имеет закон распределения Стьюдента с k=n-2 степенями свободы

Таблицы критериев

а) Значение F при P = 0,05 (Фишер)

K_2 \ K_1	2	3	4	6	8	I2	24	∞
2	I9,00	I9,I6	I9,25	I9,33	I9,37	I9,4I	I9,45	I9,50
3	9,55	9,28	9,I2	8,94	8,84	8,78	8,64	8,53
4	6,94	6,59	6,39	6,I6	6,04	5,9I	5,77	5,63
5	5,79	5,4I	5,I9	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,I4	4,76	4,53	4,28	4,I5	4,00	3,84	3,76
7	4,74	4,35	4,I2	3,87	3,73	3,57	3,4I	3,23
8	4,46	4,06	3,84	3,58	3,44	3,28	3,I2	2,93
9	4,26	3,86	3,63	3,37	3,23	3,07	2,90	2,7I
I0	4,I0	3,7I	3,48	3,22	3,07	2,9I	2,74	2,54
I2	3,88	3,49	3,26	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
I4	3,74	3,34	3,II	2,85	2,70	2,53	2,35	2,I3
I6	3,63	3,24	3,0I	2,74	2,59	2,42	2,24	2,0I
I8	3,55	3,I6	2,93	2,66	2,5I	2,34	2,I5	I,92
20	3,49	3,I0	2,87	2,60	2,45	2,28	2,08	I,84
25	3,38	2,99	2,76	2,49	2,34	2,I6	I,96	I,7I
30	3,32	2,92	2,69	2,42	2,27	2,09	I,89	I,62
40	3,23	2,84	2,6I	2,34	2,I8	2,00	I,79	I,52
60	3,I5	2,76	2,52	2,25	2,I0	I,92	I,70	I,39
I20	3,07	2,68	2,45	2,I7	2,02	I,83	I,6I	I,25
∞	2,99	2,60	2,37	2,09	I,94	I,74	I,52	I,00

б) Значение t при P = 0,I; 0,05. (Стьюдент)

K \ P	0,I0	0,05
I	6,3I	I2,7I
2	2,92	4,30
3	2,35	3,I8
4	2,I3	2,78
5	2,0I	2,57
6	I,94	2,45
7	I,89	2,36
8	I,86	2,3I
9	I,83	2,26
I0	I,8I	2,23
I2	I,78	2,I8
I4	I,76	2,I4
I6	I,75	2,I2
I8	I,73	2,I0
20	I,72	2,09
25	I,7I	2,06
30	I,70	2,04
60	I,67	2,00
I20	I,66	I,98
∞	I,64	I,96

в) Значения χ^2.

r \ P	0,I0	0,05
I	2,7I	3,84
2	4,60	5,99
3	6,26	7,82
4	7,78	9,49
5	9,24	II,07
6	I0,64	I2,59
7	I2,02	I4,07
8	I3,36	I5,5I
9	I4,68	I6,93
I0	I5,99	I8,3I
II	I7,28	I9,68
I2	I8,55	2I,00

Критерий о равенстве дисперсий

- Проверяется нулевая гипотеза **H_0:** $\sigma_1 = \sigma_2$
- Альтернативная гипотеза **H_1:** $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}; \qquad \sigma_1 > \sigma_2$$

- СВ T имеет закон распределения Фишера с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы

Таблицы критериев

а) Значение F при P = 0,05 (Фишер)

K_2 \ K_1	2	3	4	6	8	I2	24	∞
2	I9,00	I9,I6	I9,25	I9,33	I9,37	I9,4I	I9,45	I9,50
3	9,55	9,28	9,I2	8,94	8,84	8,78	8,64	8,53
4	6,94	6,59	6,39	6,I6	6,04	5,9I	5,77	5,63
5	5,79	5,4I	5,I9	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,I4	4,76	4,53	4,28	4,I5	4,00	3,84	3,76
7	4,74	4,35	4,I2	3,87	3,73	3,57	3,4I	3,23
8	4,46	4,06	3,84	3,58	3,44	3,28	3,I2	2,93
9	4,26	3,86	3,63	3,37	3,23	3,07	2,90	2,7I
I0	4,I0	3,7I	3,48	3,22	3,07	2,9I	2,74	2,54
I2	3,88	3,49	3,26	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
I4	3,74	3,34	3,II	2,85	2,70	2,53	2,35	2,I3
I6	3,63	3,24	3,0I	2,74	2,59	2,42	2,24	2,0I
I8	3,55	3,I6	2,93	2,66	2,5I	2,34	2,I5	I,92
20	3,49	3,I0	2,87	2,60	2,45	2,28	2,08	I,84
25	3,38	2,99	2,76	2,49	2,34	2,I6	I,96	I,7I
30	3,32	2,92	2,69	2,42	2,27	2,09	I,89	I,62
40	3,23	2,84	2,6I	2,34	2,I8	2,00	I,79	I,52
60	3,I5	2,76	2,52	2,25	2,I0	I,92	I,70	I,39
I20	3,07	2,68	2,45	2,I7	2,02	I,83	I,6I	I,25
∞	2,99	2,60	2,37	2,09	I,94	I,74	I,52	I,00

б) Значение t при P = 0,I; 0,05. (Стьюдент)

K \ P	0,I0	0,05
I	6,3I	I2,7I
2	2,92	4,30
3	2,35	3,I8
4	2,I3	2,78
5	2,0I	2,57
6	I,94	2,45
7	I,89	2,36
8	I,86	2,3I
9	I,83	2,26
I0	I,8I	2,23
I2	I,78	2,I8
I4	I,76	2,I4
I6	I,75	2,I2
I8	I,73	2,I0
20	I,72	2,09
25	I,7I	2,06
30	I,70	2,04
60	I,67	2,00
I20	I,66	I,98
∞	I,64	I,96

в) Значения χ^2.

r \ P	0,I0	0,05
I	2,7I	3,84
2	4,60	5,99
3	6,26	7,82
4	7,78	9,49
5	9,24	II,07
6	I0,64	I2,59
7	I2,02	I4,07
8	I3,36	I5,5I
9	I4,68	I6,93
I0	I5,99	I8,3I
II	I7,28	I9,68
I2	I8,55	2I,00

Критерий (Уилкоксона) о принадлежности двух выборок к одной генеральной совокупности

Пусть имеется две выборки из генеральной совокупности

$$\{X\} = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\,; \quad \{Y\} = y_1, y_2, y_3, y_4$$

Расположим данные в порядке возрастания, к примеру так

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, x_3, y_4, x_4, x_5$$

Если некоторому значению X предшествует некоторый У, то такая пара образует инверсию. Так X_3 даёт 3 инверсии, X_4 и X_5 по четыре инверсии, всего

$$U = 3 + 4 + 4 = 11$$

Критерий (Уилкоксона) о принадлежности двух выборок к одной генеральной совокупности

При n>10 и m>10 распределение числа инверсий близко к нормальному закону распределения с математическим ожиданием

$$M_U = \frac{n*m}{2}$$

И стандартом

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n*m}{12}\left(n+m+1\right)}$$

Тогда доверительный интервал запишется:

$$J_U\left(M_U - t\sigma_U \div M_U + t\sigma_U\right)$$

Пример

- Жила опробована двумя способами. Оценить, принадлежат ли результаты к одной генеральной совокупности, т.е. равноценны ли 2 метода

№№	Способ 1	Способ 2	№№	Способ 1	Способ 2
1	1.27	2.48	7	9.28	7.95
2	12.30	5.51	8	1.22	2.22
3	0.32	4.09	9	3.94	7.67
4	3.96	4.57	10	0.65	0.36
5	1.70	2.73	11	4.85	6.00
6	1.32	1.33	12	7.56	9.37

Пример

- Расположим данные в порядке возрастания

x	y_1	x	x	x	x	y_2	x	y_3	y_4	y_5	x
0.32	0.36	0.65	1.22	1.27	1.32	1.33	1.70	2.22	2.48	2.73	3.94
x	y_6	y_7	x	y_8	y_9	x	y_{10}	y_{11}	x	y_{12}	x
3.98	4.09	4.57	4.85	5.51	6.00	7.56	7.67	7.95	9.28	9.37	12.3

Число инверсий:

$$U = 1+1+1+1+2+5+5+7+9+11+12 = 55$$

Пример

$$M_U = \frac{12*12}{2} = 72$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{12*12}{12}(12+12+1)} = 17.3$$

$$t\sigma = 1.96*17.3 = 34$$

$$J_U(72-34 \div 72+34) = (38 \div 106)$$

ВЫВОД: Выборки принадлежат к одной генеральной совокупности,
Расхождений в опробовании двумя способами нет