Дискретные случайные величины.
Закон распределения случайной дискретной величины.
Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

План лекции

- Дискретные случайные величины.
- Закон распределения дискретной случайной величины.
- Функция распределения дискретной случайной величины.
- Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Случайная величина – это такая величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее какое именно.

Величина называется случайной, если она принимает различные результаты при проведении опыта, причем вероятность каждого исхода различна.

Случайная величина называется дискретной, если в пределах одного опыта, количество значений которые она может принимать, конечно.

Дискретные случайные величины

Случайные величины, принимающие только отделенные друг от друга значения, которые заранее можно перечислить

Примеры:

- число выпадений орла при трех бросках монеты;
- число попаданий в мишень при 10 выстрелах;
- число вызовов, поступивших на станцию скорой помощи за сутки.

Непрерывные случайные величины

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток

Примеры:

- артериальное давление пациента;
- масса тела пациента;
- скорость биохимической реакции в клетке.

Законом распределения **случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.**

Закон распределения случайной величины может задаваться в виде:

- **таблицы**
- **графика**
- **формулы** (аналитически).

Ряд распределения

Как связаны друг с другом вероятности событий и случайные величины?

Случайные события: два броска монеты

Случайная величина: число выпадений орла

Случайное число выпадений орла	0	1	2
вероятность	P_1	P_2	P_3

Расчет вероятности реализации определенных значений случайного числа

Число выпадений орла равно 0 – события: РР – вероятность 0,5 *0,5 =0, 25

Число выпадений орла равно 1 – события: Р0 или ОР – вероятность 0,5 *0,5 + 0,5*0,5 = 0,5

Число выпадений орла равно 2 – события: 00 – вероятность 0,5 *0,5 = 0,25

Сумма вероятностей: 0,25 + 0,50 + 0,25 = 1

Закон распределения случайной величины

Законом распределения *дискретной случайной величины* называют соответствие между ее возможными значениями и вероятностями их появления. Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы Бернулли) и графически (в виде многоугольника распределения).

Табличное задание закона распределения:

X	X1	X2	X3	…	Xn
P	P1	P2	P3	…	Pn

Здесь x_1, x_2, x_3,...,x_n — значения, которые может принять случайная дискретная величина X и их вероятности $p_1=P(X=x_1)$, $p_2=P(X=x_2)$, $p_3=P(X=x_3)$, $p_4=P(X=x_4)$, $p_n=P(X = x_n)$ и $p_1+p_2+p_3+p_4+...+p_n=1$.

Формула Бернулли

Формула Бернулли — формула в теории вероятности, позволяющая находить вероятность появления события А при независимых испытаниях. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений — сложения и умножения вероятностей — при достаточно большом количестве испытаний. Названа в честь выдающегося швейцарского математика Якоба Бернулли, выведшего формулу.

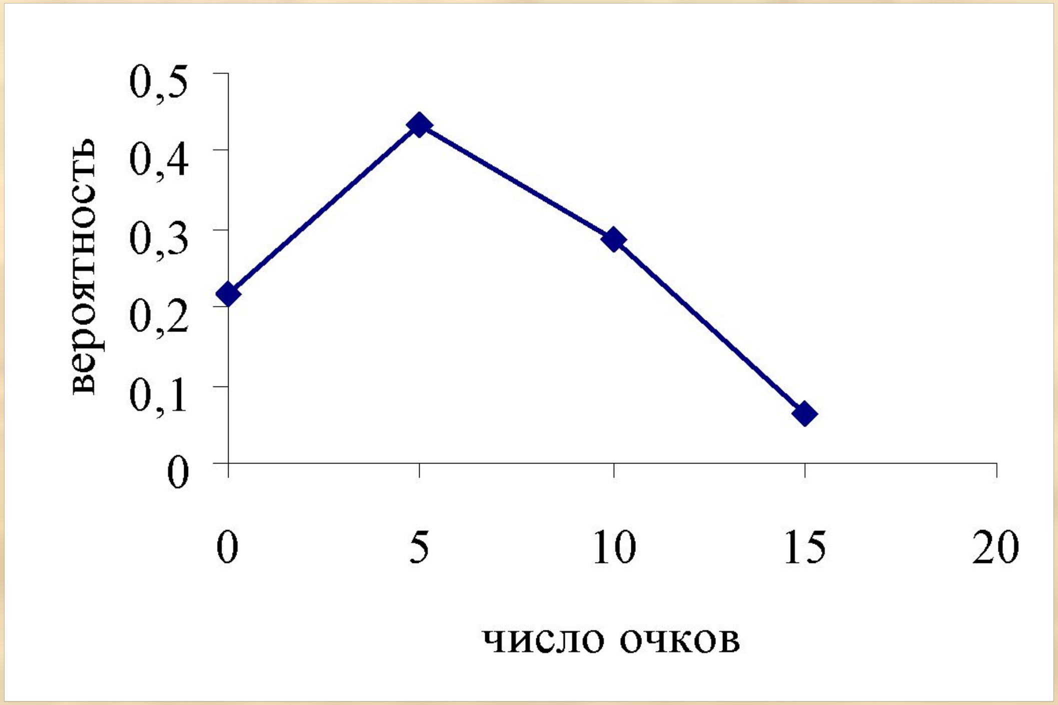
Испытание называется независимым от события А если вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от результатов проведения испытаний.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

где n – количество независимых испытаний;
p – вероятность наступления события А;
q – вероятность того, что событие А не произойдет, q = 1 – p;
m – количество раз, когда событие А не произошло при n различных испытаний (m < n).

Ряд распределения случайного числа выбитых очков

события	000	100+010 +001	110+101 +011	111
число очков	0	5	10	15
вероятность события	0,216	0,432	0,288	0,064



Понятие математического ожидания

Математическое ожидание – понятие среднего значения, одна из важнейших характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины X, принимающей последовательность значений x_1, x_2, ..., x_n, с вероятностями, равными соответственно p_1, p_2, ..., p_n, математическое ожидание определяется формулой:

$$M_x = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

где k – количество независимых испытаний;

x_i – значение случайной дискретной величины;

p_i – вероятность значения случайной дискретной величины;

Понятие дисперсии

Дисперсия (от лат. dispersio - рассеяние) в математической статистике и теории вероятностей - мера рассеивания (отклонения от среднего). В статистике дисперсия есть среднее арифметическое из квадратов отклонений наблюденных значений (x1, x2,...,xn) случайной величины от их среднего арифметического. В теории вероятностей дисперсия случайной величины X называется математическое ожидание E $(X — m_x)^2$ квадрата отклонения X от её математического ожидания m_x= E (X). Дисперсия случайной величины X обозначается через D (X) или через s^2_X.

Вычисление значений ряда распределений случайного числа

Задача. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4.За каждое попадание стрелку начисляется 5 очков. Построить ряд распределения числа выбитых очков.

Обозначение события: попал – 1, не попал - 0

Полная группа событий: 000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111

Вероятность событий: биномиальное распределение

$$P(3,k) = \frac{3!}{k!(3-k)} 0.4^k \cdot (1-0.4)^{3-k}$$

k = 0, 1, 2, 3

Основные характеристики дискретных случайных величин

- Математическое ожидание (среднее значение) **случайной величины равно сумме произведений значений, принимаемых этой величиной, на соответствующие им вероятности:**

$$M(x)=x_1P_1 + x_2P_2 + \ . \ . \ . \ + x_nP_n = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

- Дисперсия **случайной величины – это математическое ожидание квадрата соответствующего отклонения случайной величины x_i от ее математического ожидания:**

  $D(x) = M\,[x_i – M(x)]^2$

- Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Задача на нахождение закона распределения

Найти распределение вероятности числа очков, выпавших на кубике с первого броска, математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Выпадение любой грани равновероятно, так что распределение будет выглядеть так:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическое ожидание:

$$M_x = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3.5$$

Дисперсия:

$$D_x=\frac{1}{6}((1-3.5)^2+((2-3.5)^2+((3-3.5)^2+((4-3.5)^2+((5-3.5)^2+((6-3.5)^2)=\frac{35}{12}\approx 2.9$$

ПРИМЕР: **Рассчитать основные числовые характеристики для числа заказов препарата, поступивших за 1 час**

x_i	P_i	$x_i P_i$	$(x_i – M)^2$	$(x_i – M)^2 P_i$
2	0,1	0,2	$(2-3,6)^2=2,56$	0,256
3	0,3	0,9	$(3-3,6)^2=0,36$	0,108
4	0,5	2	$(4-3,6)^2=0,16$	0,08
5	0,1	0,5	$(5-3,6)^2=1,96$	0,196

M(x)=3,6

D(x)=0,64

$$\sigma = \sqrt{0,64 = 0,8}$$

Расчеты

- $M(x)=2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}3+4\cdot0{,}5+5\cdot0{,}1=3{,}6$
- $D(x)=(2-3{,}6)^2\cdot0{,}1+(3-3{,}6)^2\cdot0{,}3+(4-3{,}6)^2\cdot0{,}5+(5-3{,}6)^2\cdot0{,}1=0{,}64$

$$\sigma(x)=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$$

Число заказов=3,6±0,8