

**Семинар 13. Неопределенный
интеграл. Основные
свойства. Непосредственное
интегрирование.**

*Основные свойства
неопределенного интеграла*

Свойства вытекают из определения неопределенного интеграла

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Имеем $d \int f(x) dx = f(x) dx$ и $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

3. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. То есть, если $A \neq 0$ то $\int Af(x) dx = A \int f(x) dx$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, то есть, если $f(x), g(x), h(x)$ – непрерывны в интервале (a, b) , то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx \quad \text{при } x \in (a, b)$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

Имеем

$$dF(x) = f(x)dx \quad \int f(x)dx = F(x) + c$$

Обобщая формулу дифференцирования,

получим

№ п/п	Дифференциал	Неопределенный интеграл
1	$d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m dx$	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$
2	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
3	$d(e^x) = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + c$
4	$d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5	$d(\sin x) = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
6	$d(-\cos x) = \sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
7	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

8	$d(-ctgx) = \frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
9	$d(\arcsin x) = d(-\arccos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
10	$d(\arctgx) = d(-\text{arcctgx}) = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctgx + c = -\text{arcctgx} + c$
11		$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$
12		$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + c$
13		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+a} \right + c$
14		$\int shx dx = chx + c$
15		$\int chx dx = shx + c$

Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для вычисления неопределенных интегралов:

$$1) \quad dx = d(x + b), b = \text{const}$$

$$2) \quad dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$$

$$3) \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a \neq 0, b = \text{const}$$

$$4) \quad x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$5) \quad \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$6) \quad \cos x dx = d(\sin x)$$

В общем случае $f'(x)dx = d(f(x))$

Непосредственное интегрирование предполагает применение основных свойств неопределенных интегралов, свойств дифференциалов и применение табличных интегралов.

6.

Примеры с решениями

$$1. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c \quad (a \neq 0)$$

$$2. \int \sqrt{x-2} dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x-2} + c$$

$$3. \int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

$$5. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \pm \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \pm \arcsin \frac{1}{x} + c$$

$$9. \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Примеры для самостоятельного решения

$$1) \int x\sqrt{x} dx; 2) \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}; 3) \int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx; 4) \int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx; 5) \int \operatorname{tg}^2 x dx; 6) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx; 7) \int x \cos(x^2) dx$$

$$8) \int \frac{dx}{x \ln x}; 9) \int \sqrt{\sin x} \cos x dx; 10) \int \cos(\sin x) \cos x dx$$