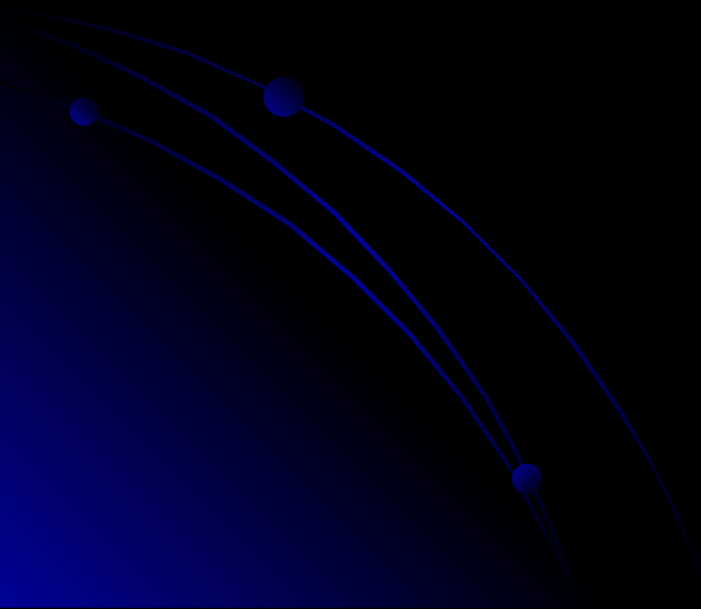


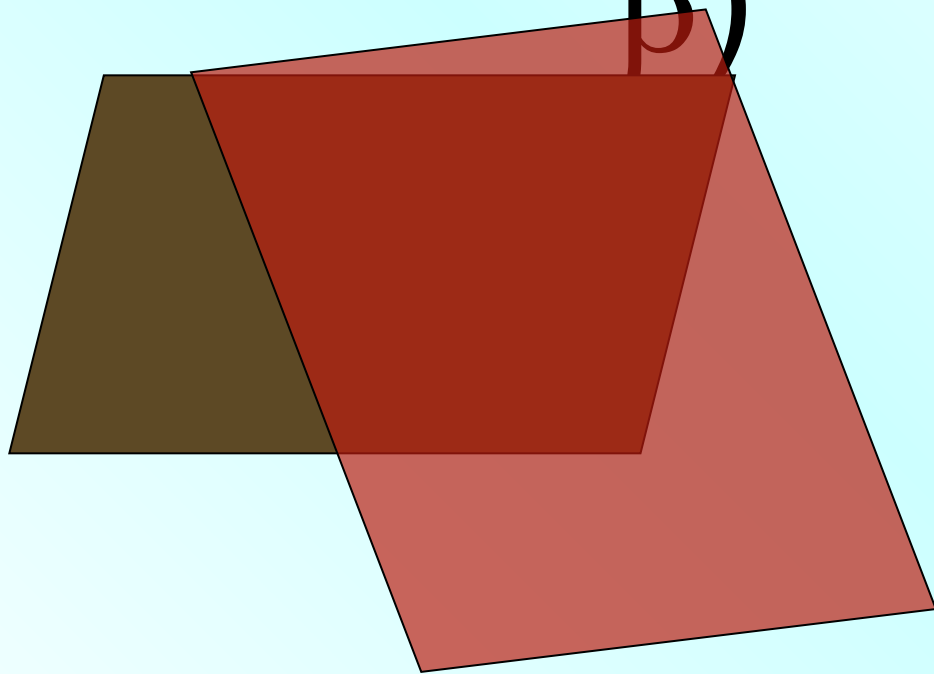
СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ТЕМУ ДВУГРАННИЙ И УГОЛ

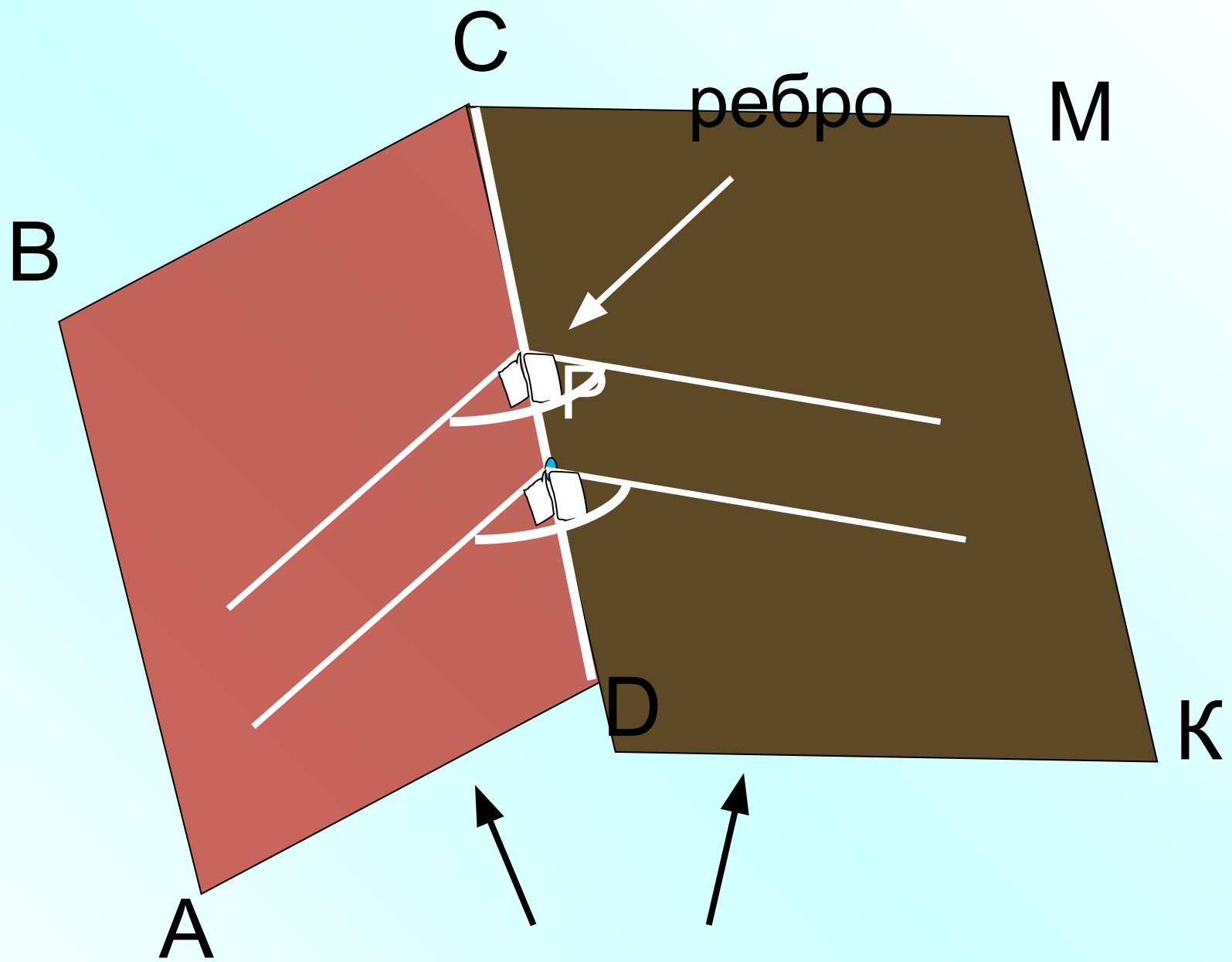


Угол между плоскостями:

$\angle (\alpha,$

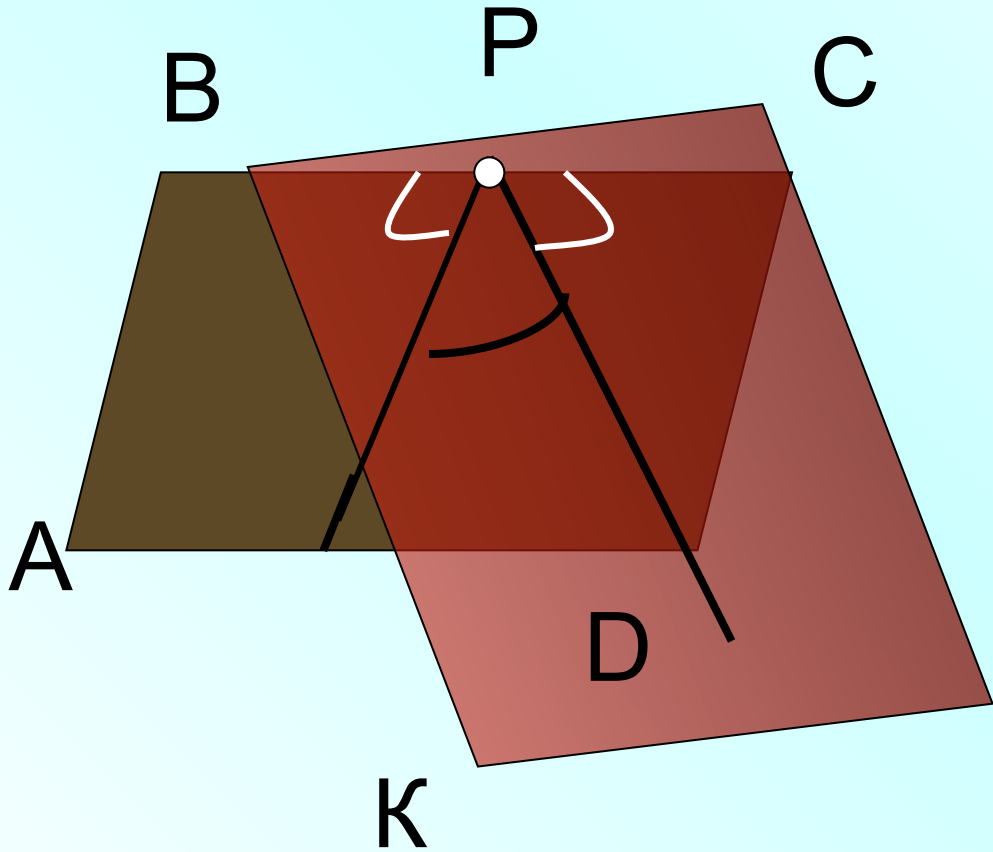
$\beta)$





грани

$$\angle(\alpha, \beta) =$$

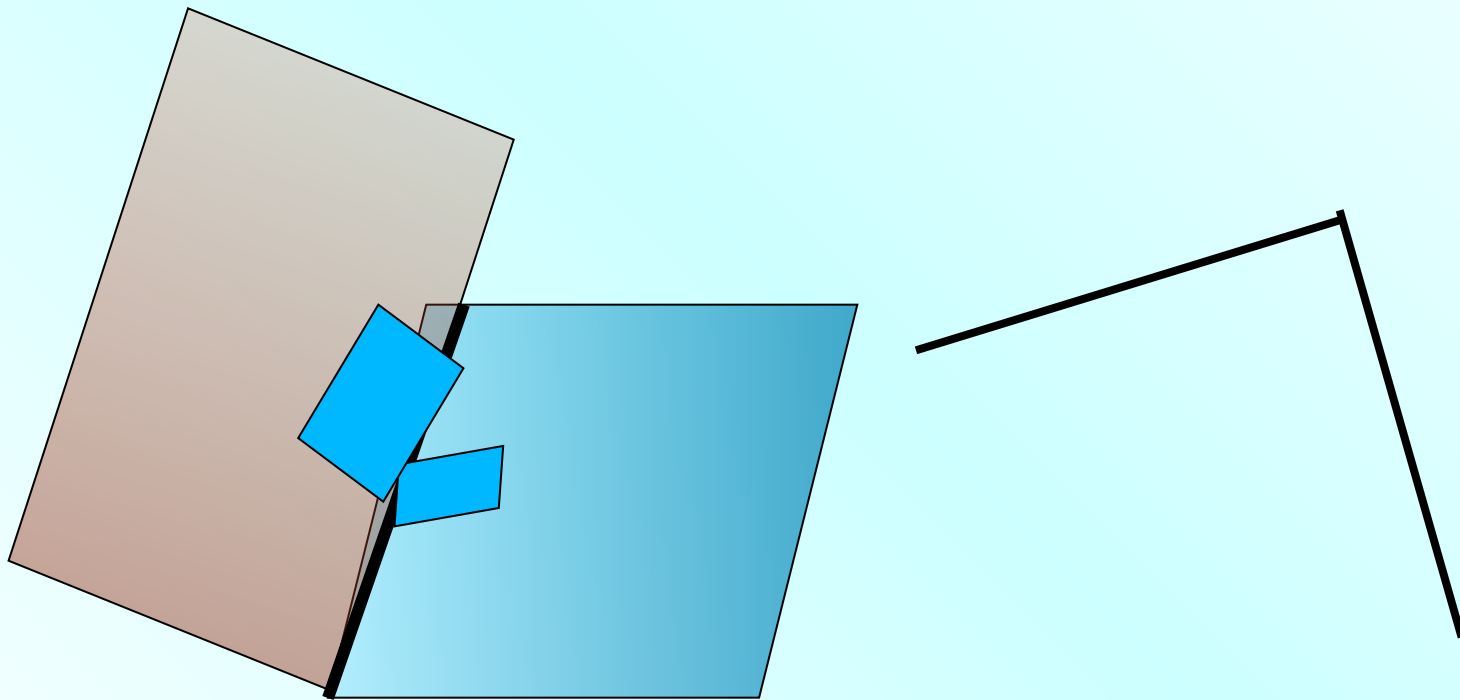


$$\angle ABCM$$

=

$$\angle P$$

Задачи на доказательство того,
что отмеченный на рисунке угол
является линейным.



а) $PAVC$ - пирамида;

$\angle ACB = 90^\circ$;

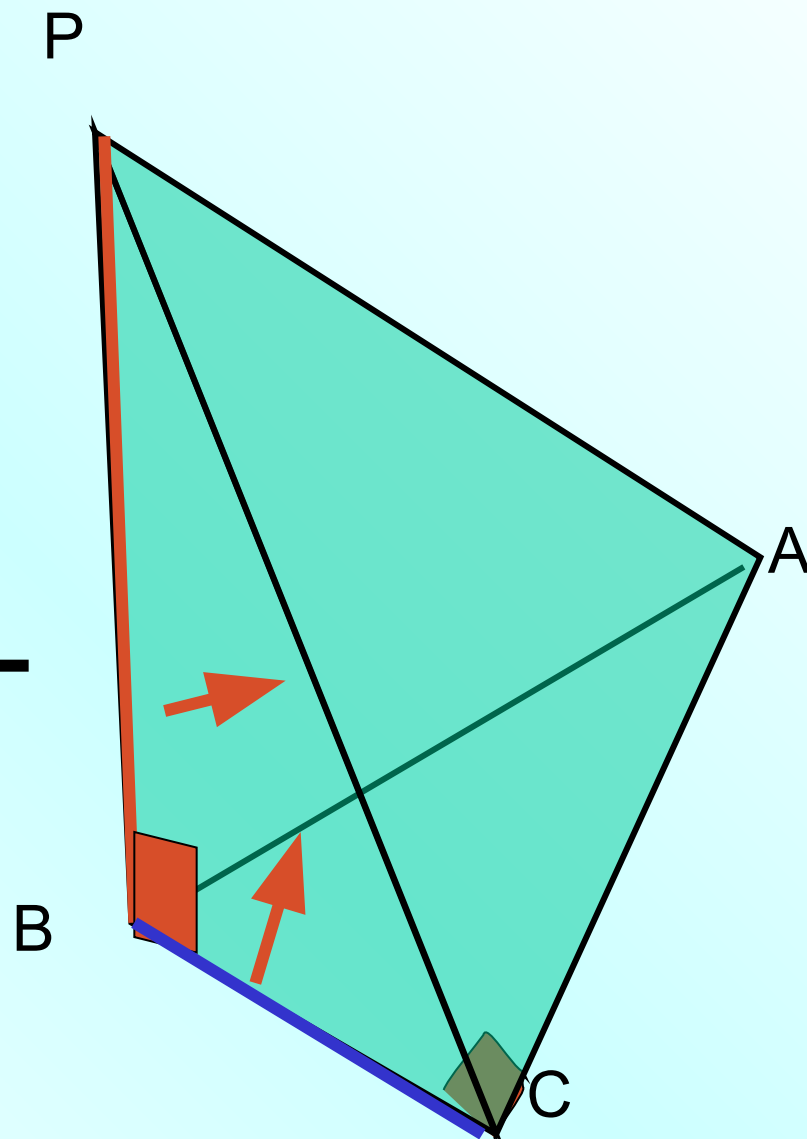
$(PB) \perp (ABC)$

Доказать:

$\angle PCV$ - линейный
угол двугранного
угла с ребром AC .

$BC \perp AC$
 $PB \perp (ABC)$ } $PC \perp AC$

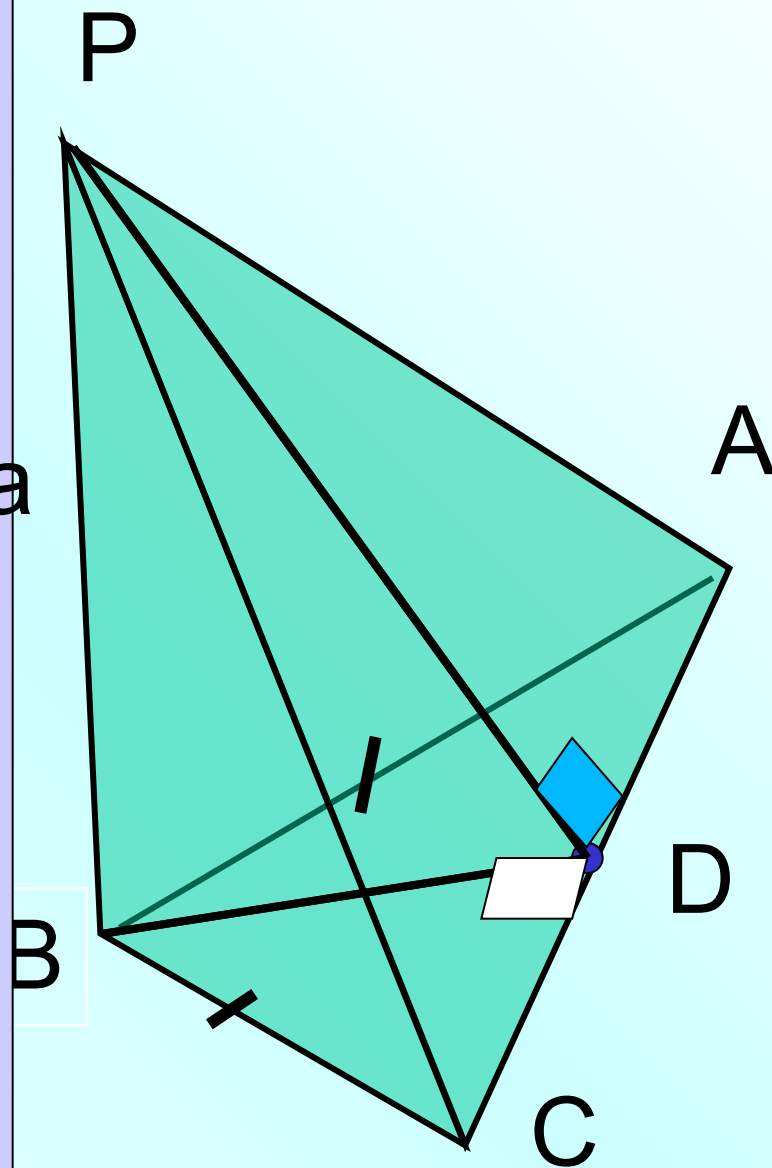
$\Rightarrow \angle PACV = \angle PCV$



$\triangle ABC$ – равнобедренный, D – середина AC , значит: $BD \perp AC$.

$BD \perp AC$
 $PB \perp (ABC)$ } $PD \perp AC$

$\Rightarrow \angle PACB = \angle PDB$



с) $PA BCD$ - пирамида;

$(PB) \perp (ABC)$;

$(BK) \perp (DC)$;

Доказать:

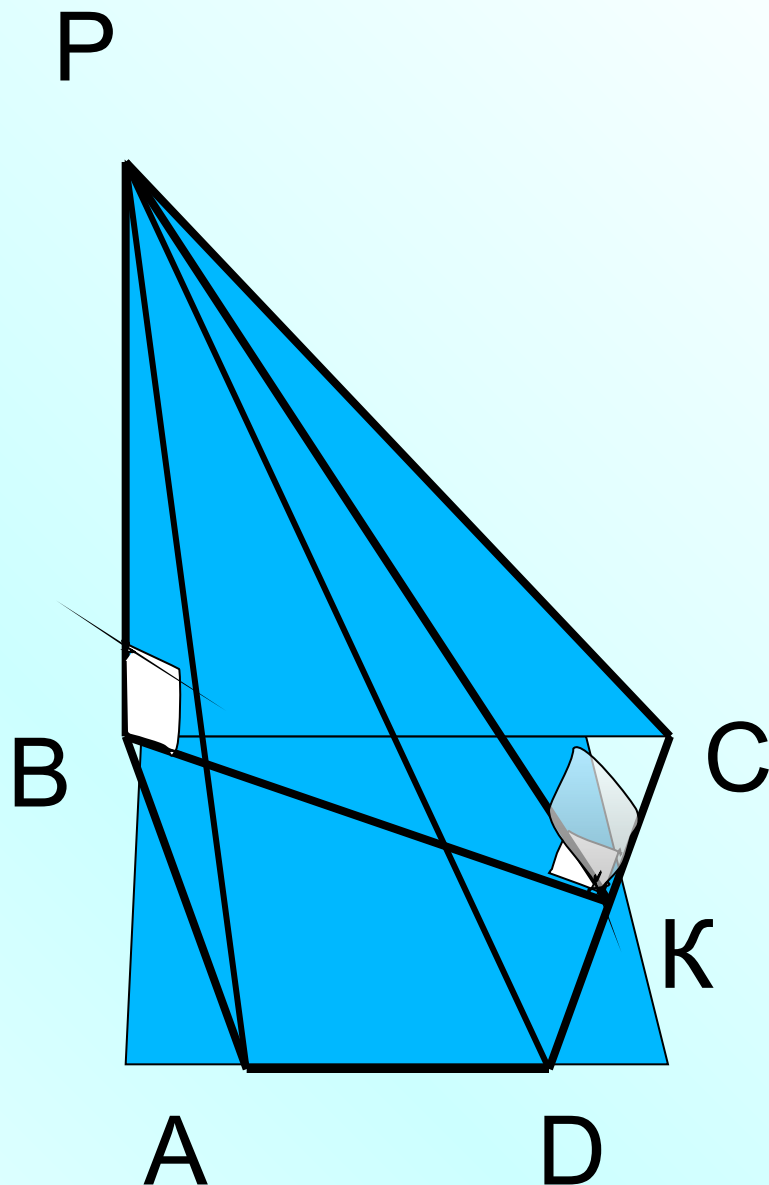
$\angle PKB$ - линейный
угол двугранного
угла с ребром CD .

$BK \perp PC$

$PB \perp (ABC)$

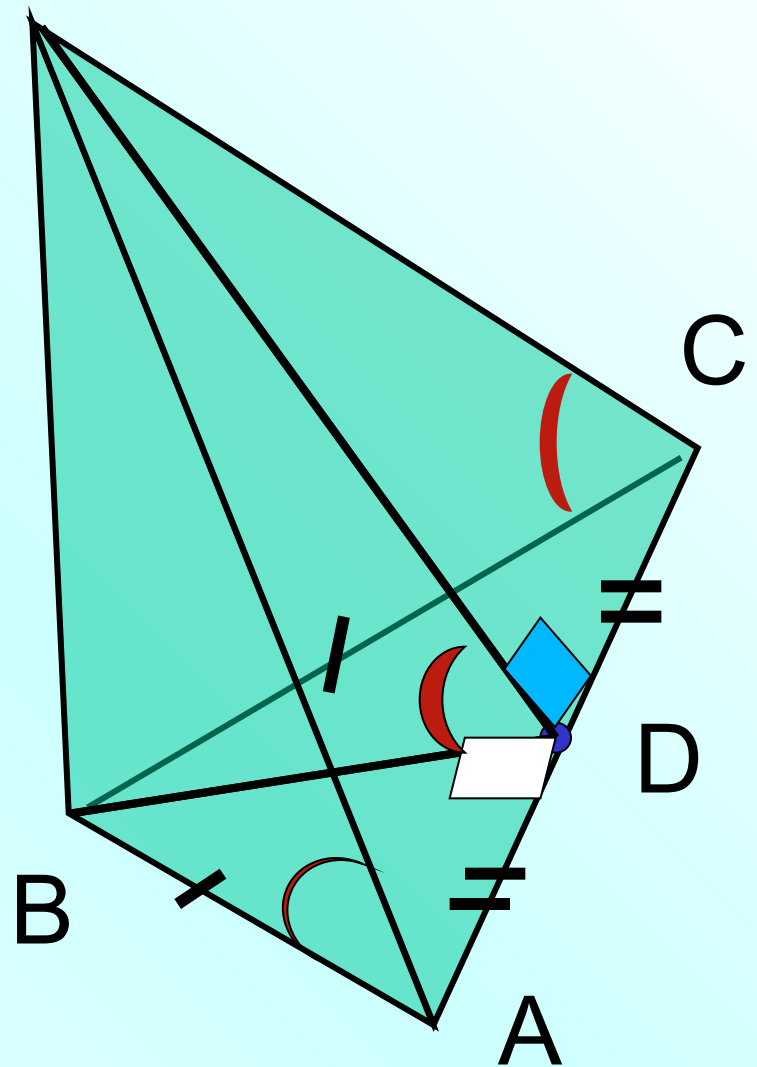
} $PK \perp DC$

$\Rightarrow \angle PCDB = \angle PKB$

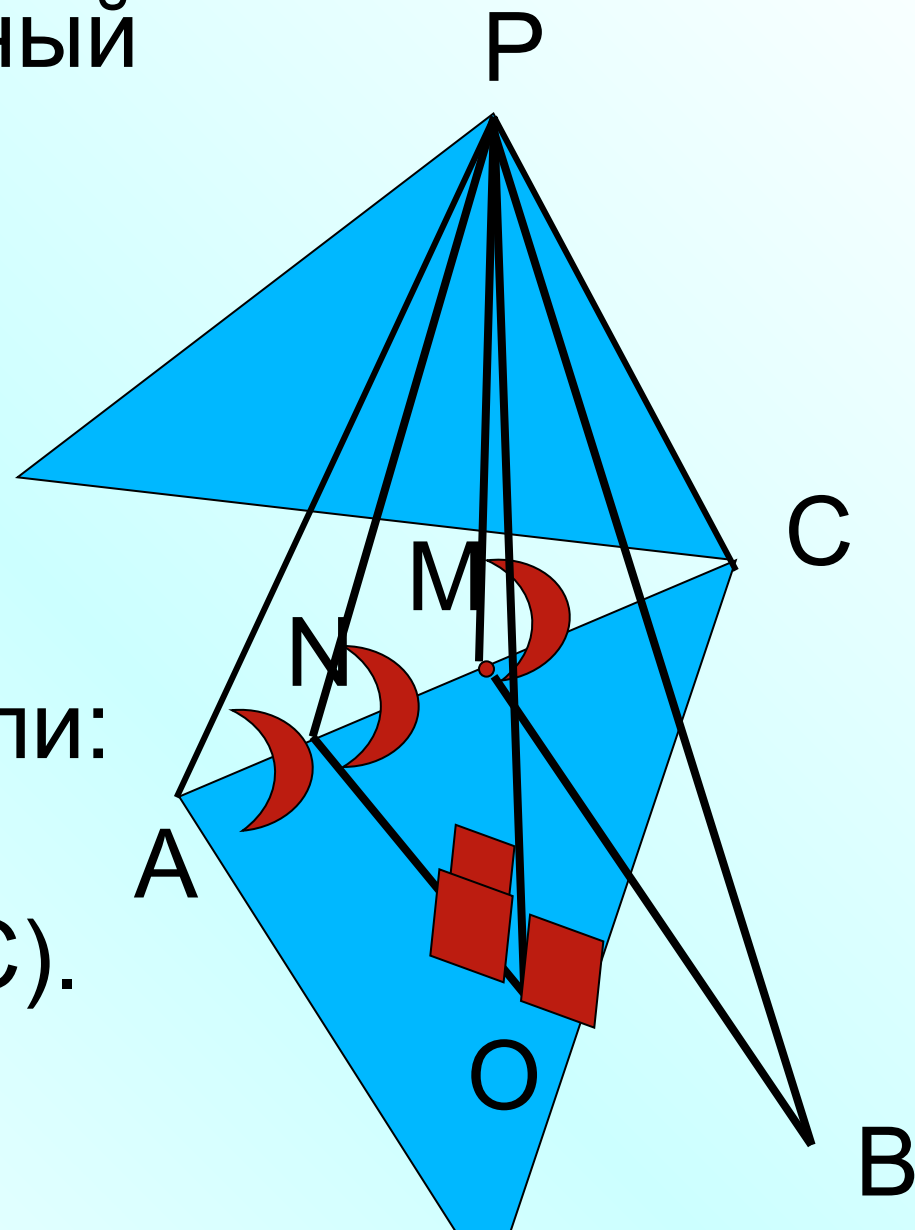


2. Задачи на выделение
линейного угла
среди нескольких обозначенных
на рисунке углов.

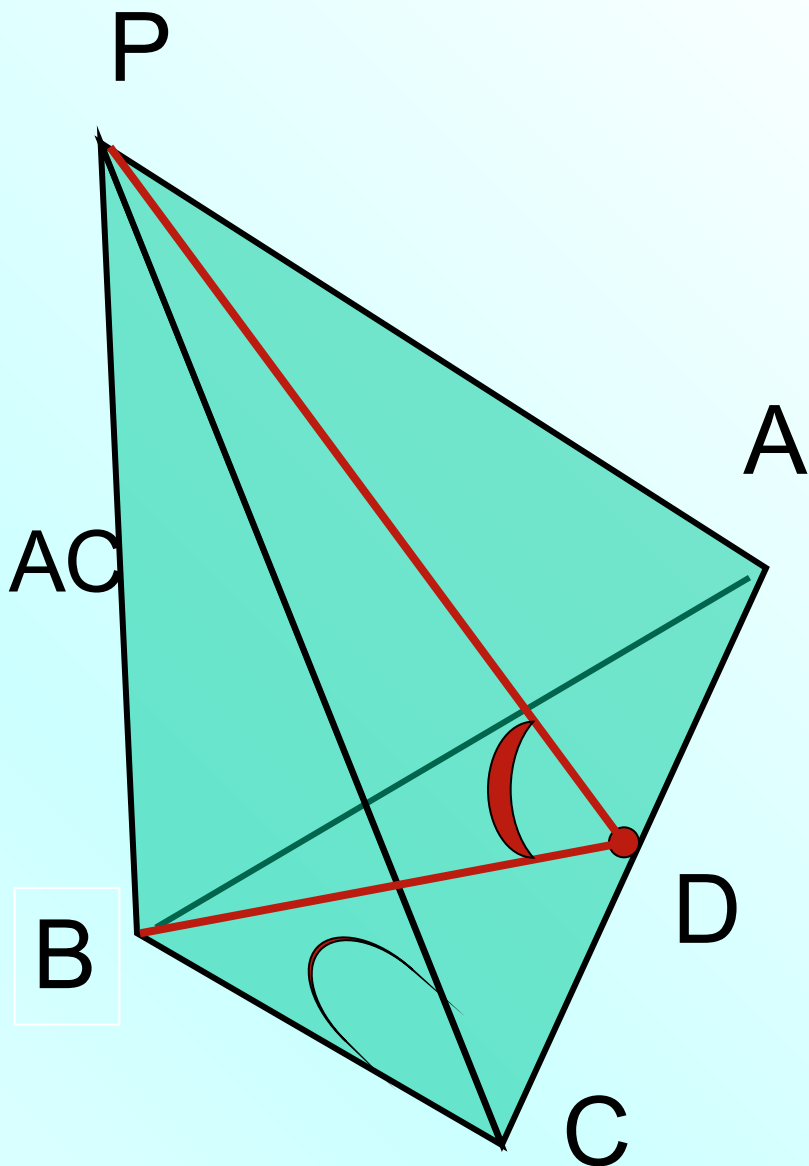
а) $PABC$ - пирамида;
 основание - правильный $\triangle ABC$
 Треугольник;
 Какой из отмеченных
 углов является
 линейным
 углом двугранного
 угла с ребром AC , если:
 D – середина AC ,
 $(PB) \perp (ABC)$.



в) $PABC$ - пирамида;
основание - правильный
треугольник;
Какой из отмеченных
углов является
линейным
углом двугранного
угла с ребром AC , если:
 M – середина AC ,
 $ON \parallel BM$, $(PO) \perp (ABC)$.



с) $PABC$ - пирамида;
D- середина AC;
 $(PB) \perp (ABC)$;
Каким должен быть
треугольник ABC,
чтобы линейным углом
двугранного угла с ребром AC
являлся угол PDB?



3. Задачи на построение
линейного угла для данного двугранного.



а) Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AC,
если в пирамиде PABC:
 $AB=BC$, $(PB) \perp (ABC)$;

$\angle PACB$ -

?

$$AB=BC \Rightarrow$$

$$BH \perp AC$$

$$PB \perp ABC$$

$$PH \perp AC$$

P

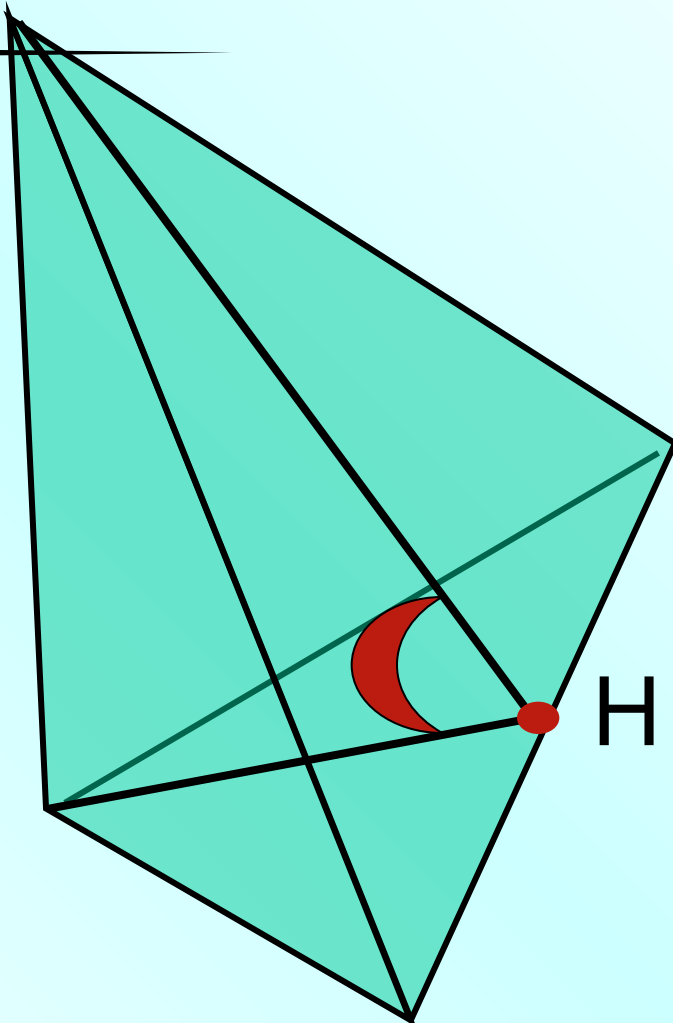
A

H

B

C

$$\angle PACB = \angle PHB$$



в) Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AC,
если в пирамиде PABC:
грань ABC – правильный треугольник,
O – точка пересечения медиан
треугольника ABC, $(PO) \perp (ABC)$;

$\angle PACB$ -

?

ВК-медиана,

Р

$\triangle ABC$ -правильный

\Rightarrow ВК - высота

$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$

A

O

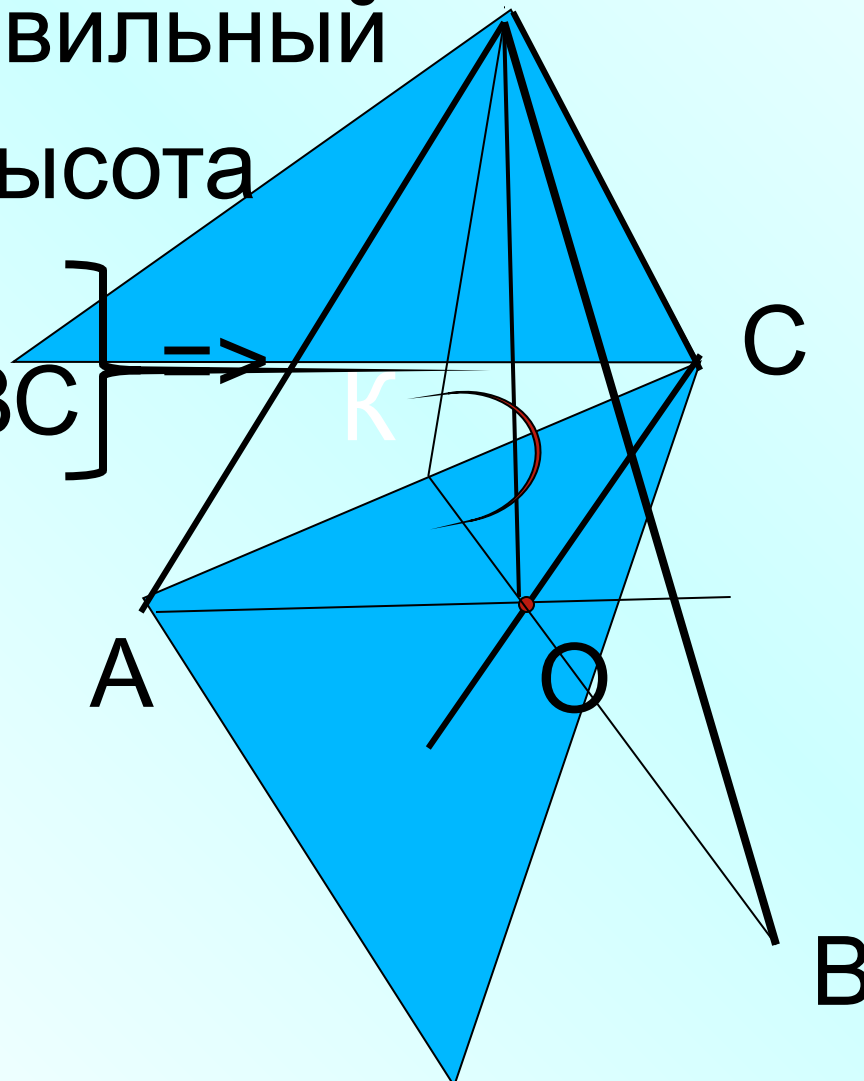
C

B

K

$\angle PACB$

$= \angle PKB$



с) Построить линейный
угол двугранного угла с
ребром AC , если в
пирамиде $PABC$:
грань ABC –
правильный треугольник,
 O – середина AB ,
 $(PO) \perp (ABC)$;

$\angle PACO$ -
?

$$AB=BC \Rightarrow BH \perp AC$$

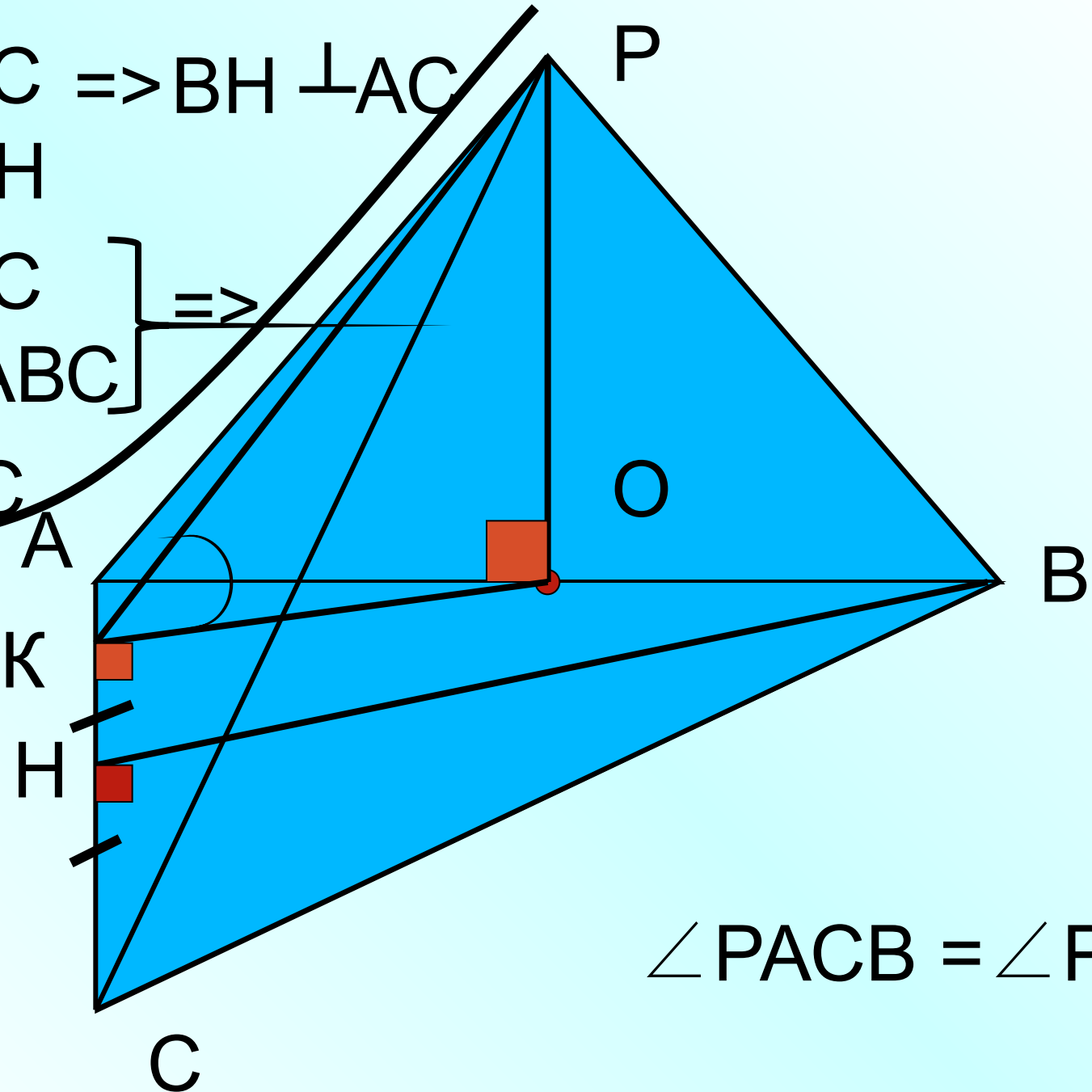
$$KO \parallel BH$$

$$KO \perp AC$$

$$PO \perp ABC$$

 \Rightarrow

$$KP \perp AC$$



$$\angle PACB = \angle PKO$$

D) Дан прямоугольник $ABCD$
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC , если:
 $(PB) \perp (ABC)$;

$\angle BCDP$ -
?

ABCD-прямоугольник

$$BC \perp CD$$

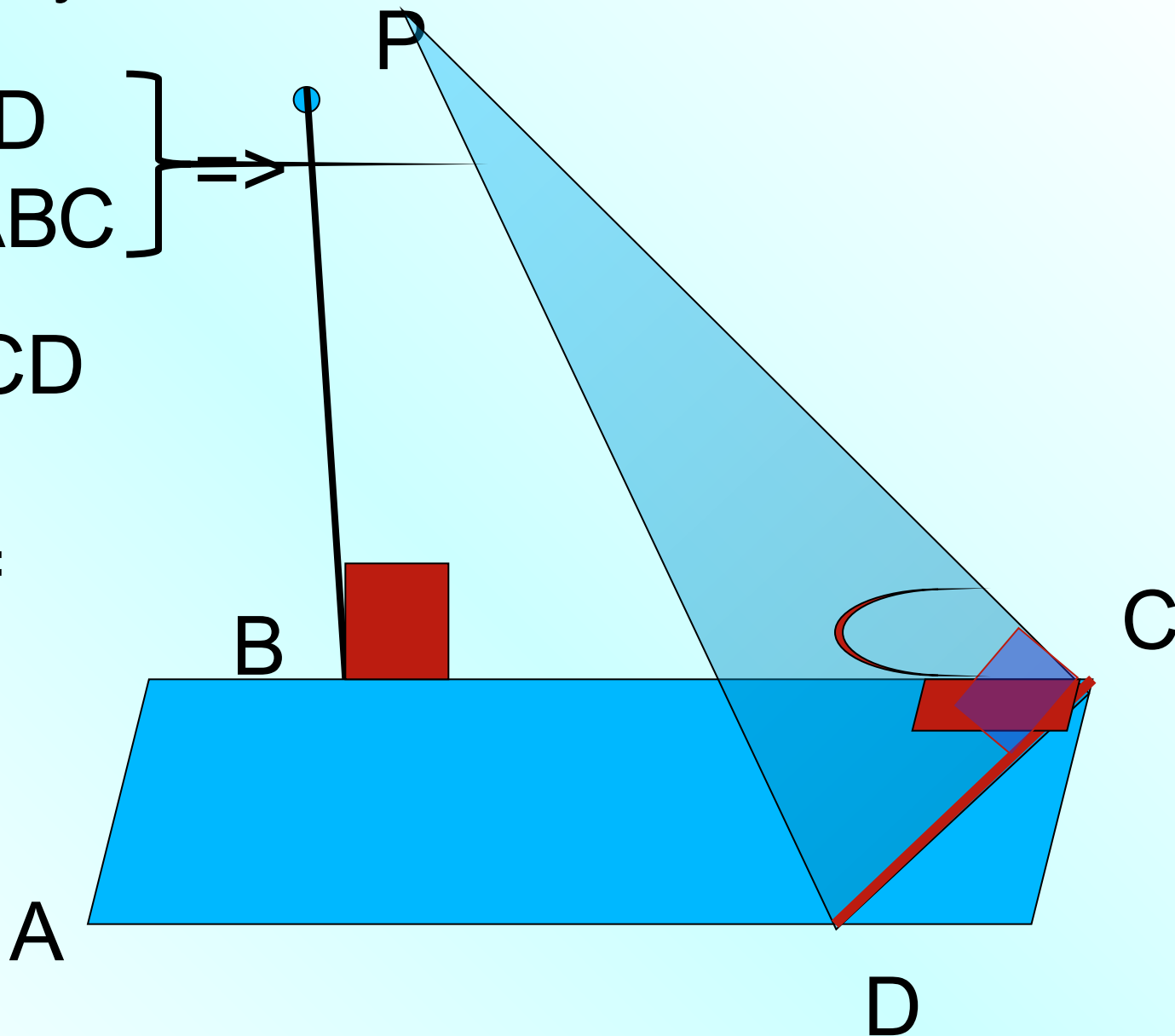
$$PB \perp ABC$$

$$PC \perp CD$$

Значит:

$$\angle BCDP =$$

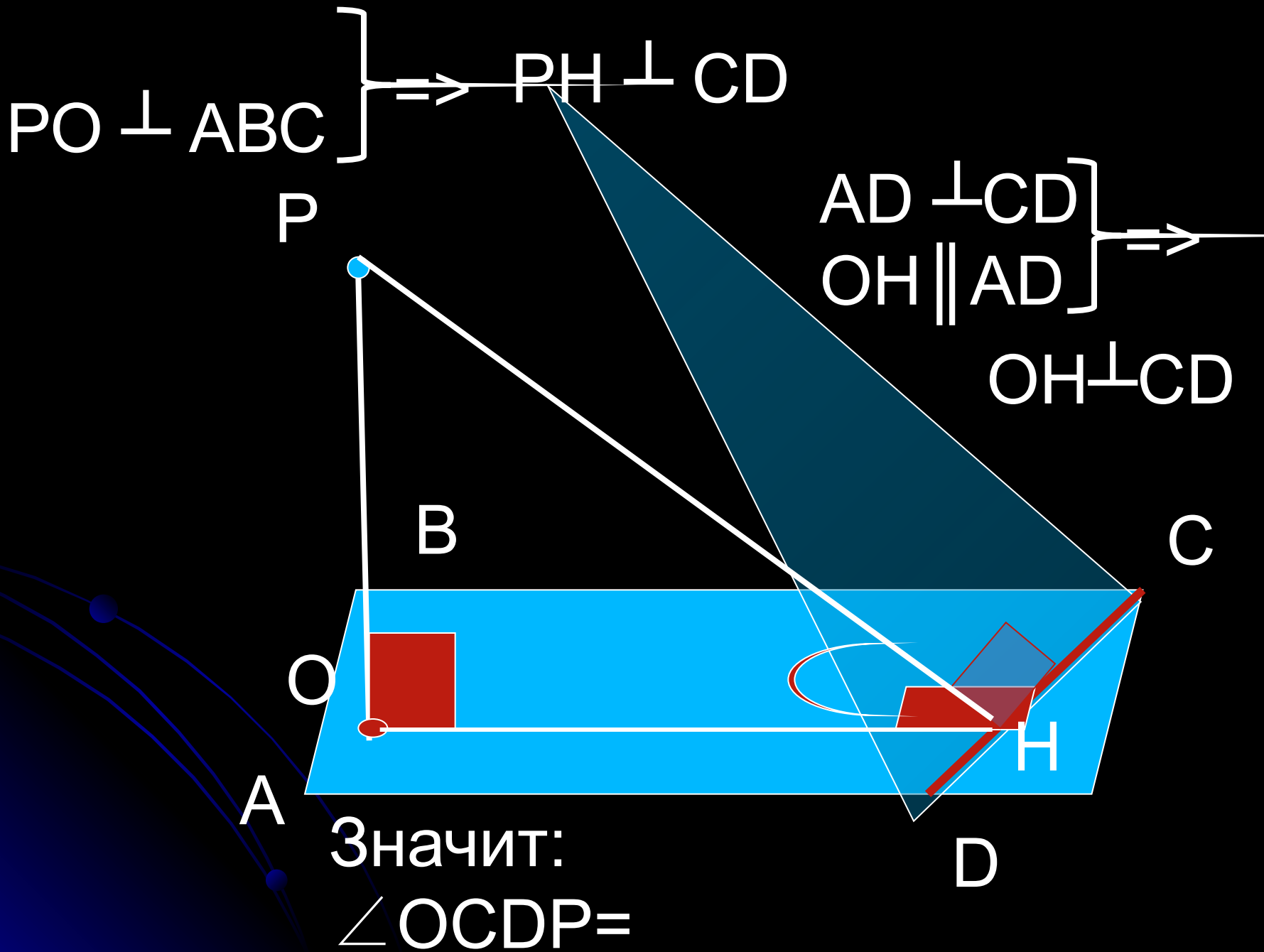
$$\angle BCP$$



е) Дан прямоугольник $ABCD$
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC , если:
 $OC \perp AB$; $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle OCDP$ - ?





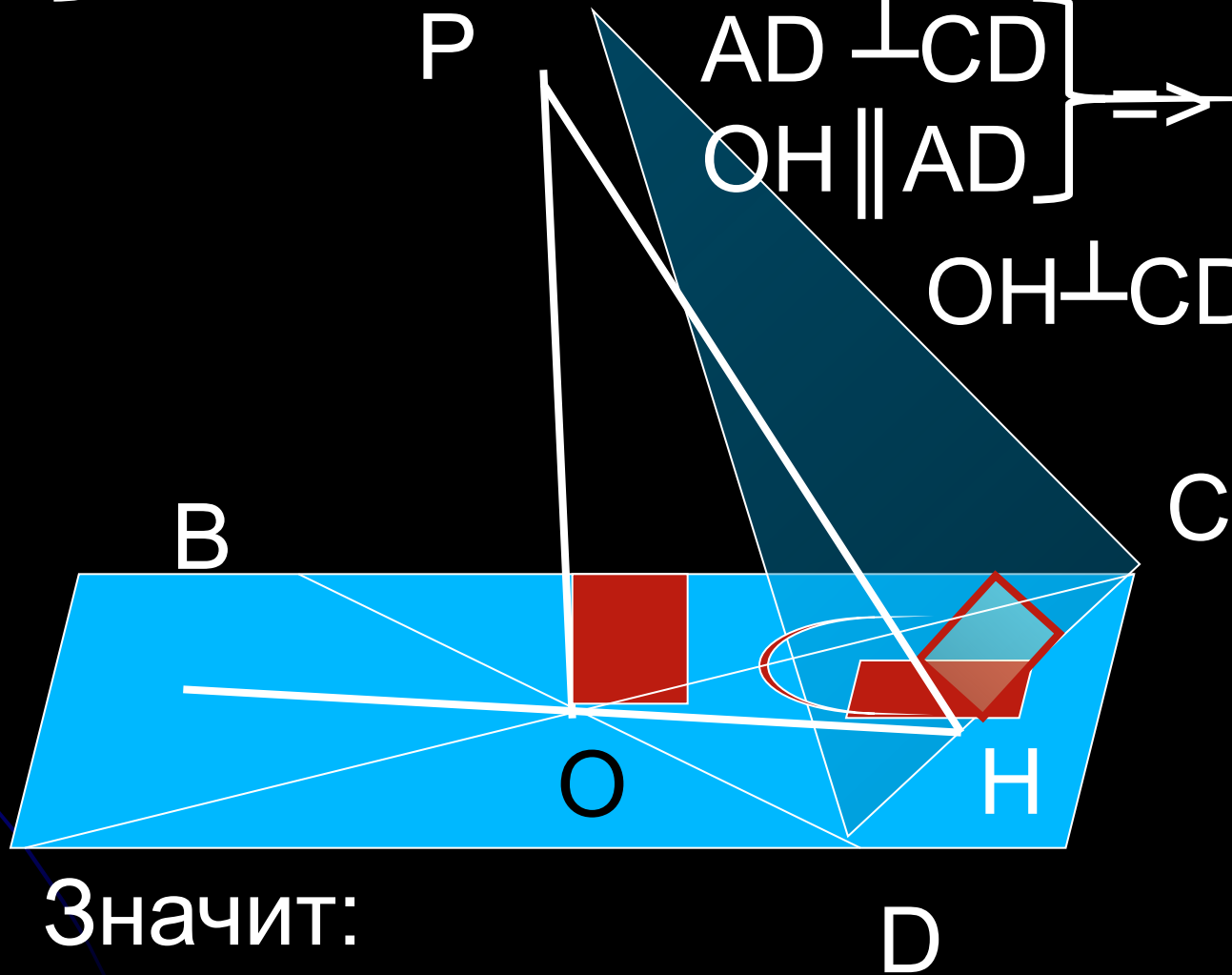
f) Дан прямоугольник $ABCD$
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC , если:
 O – точка пересечения
диагоналей $ABCD$,
 $(PO) \perp (ABC)$.



$\angle OCDP - ?$

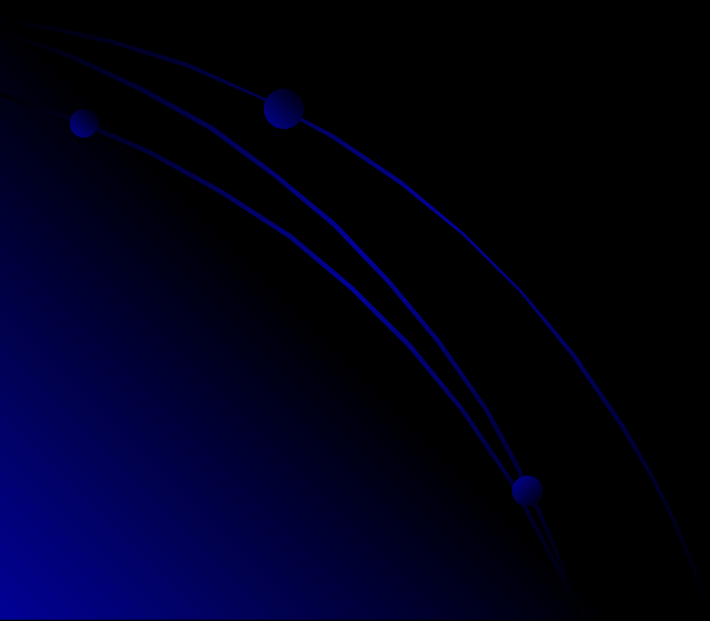
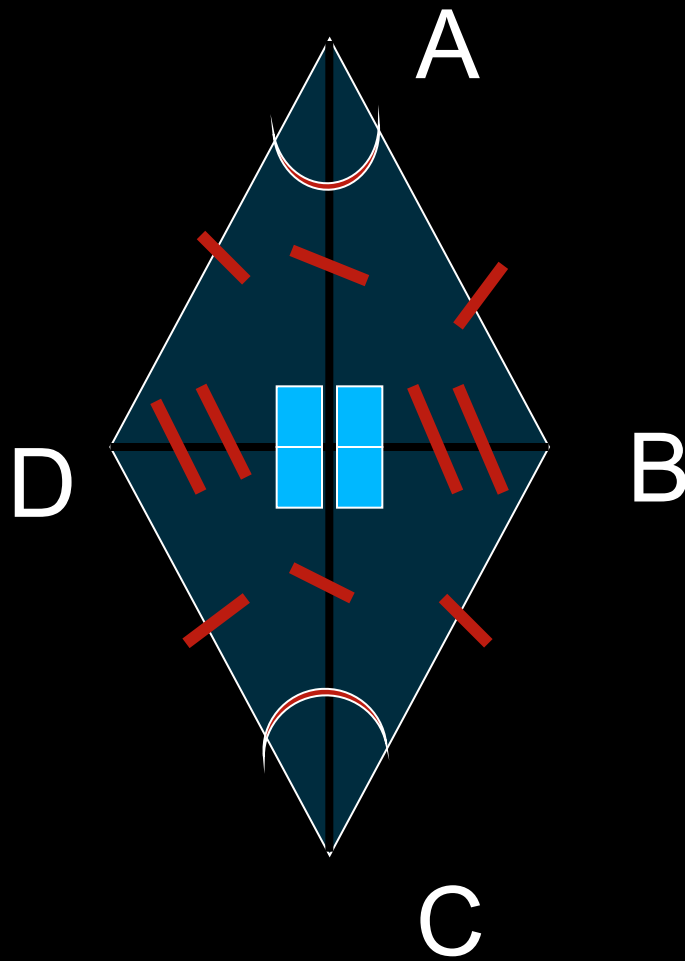
$PO \perp ABC \} \Rightarrow PH \perp CD$

$\left. \begin{array}{l} AD \perp CD \\ OH \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp CD$

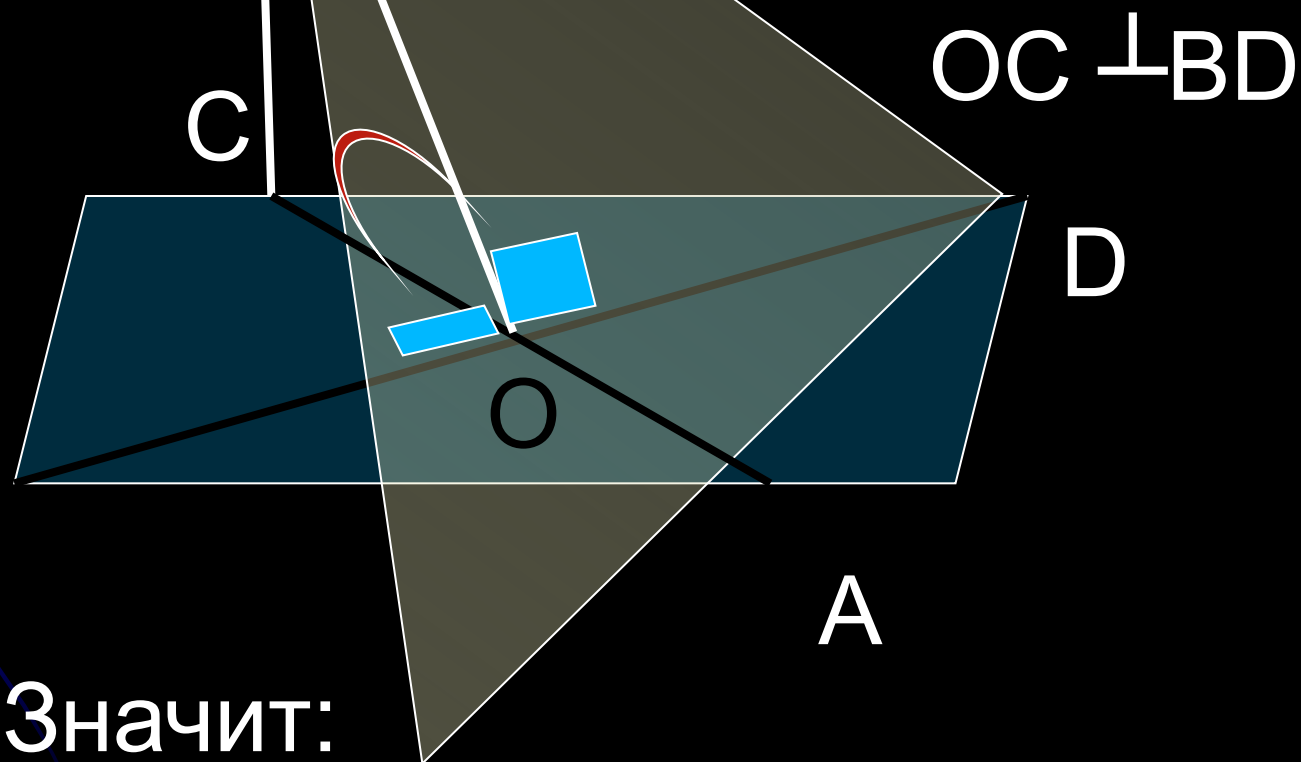


Значит:
 $\angle OCP =$

г) Дан ромб $ABCD$; $(PC) \perp (ABC)$.



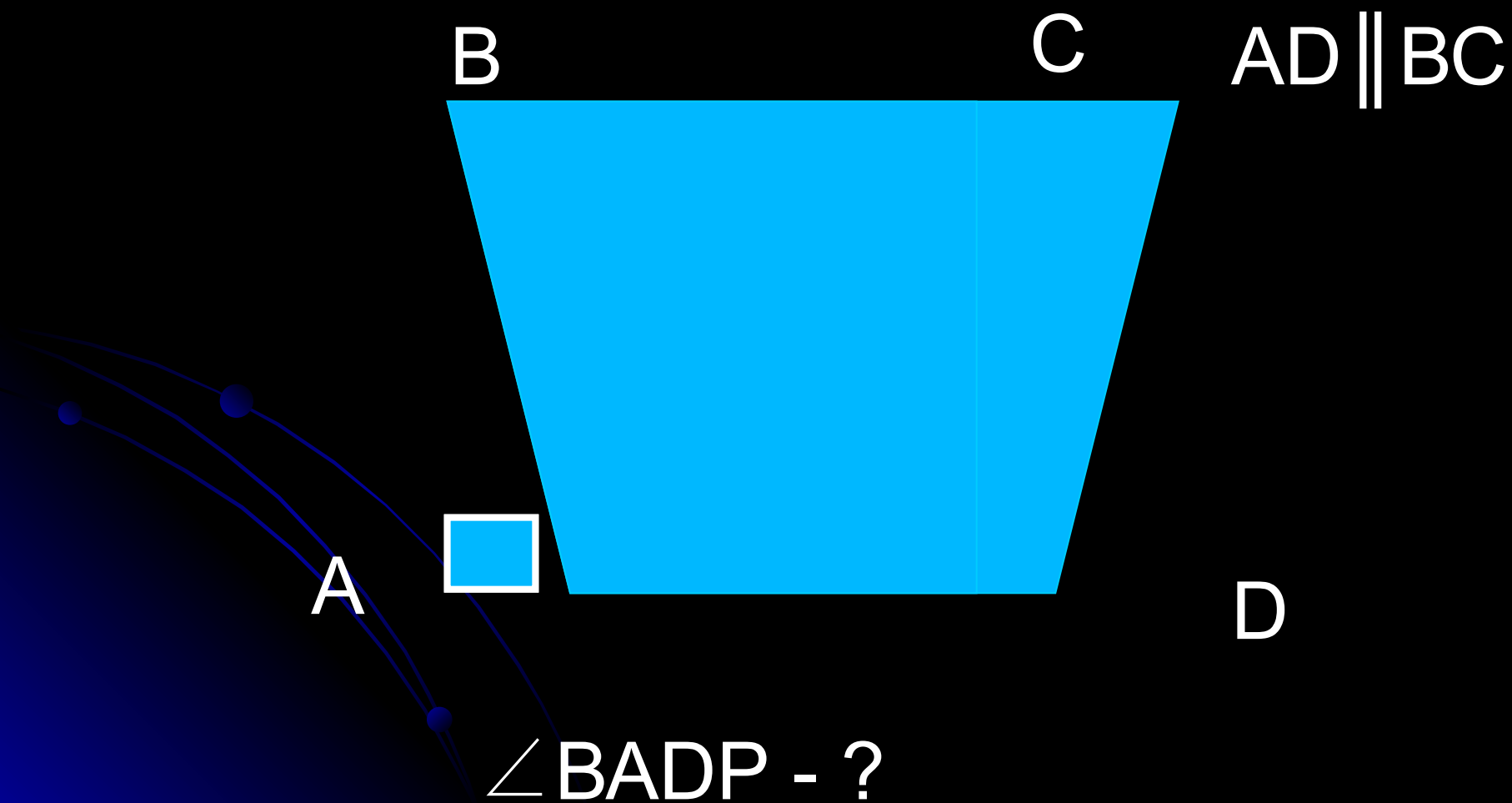
$PC \perp ABC$ } \Rightarrow $PO \perp BD$ $ABCD$ - ромб
 $\Rightarrow CA \perp BD,$
 $CA \cap BD = O \Rightarrow$



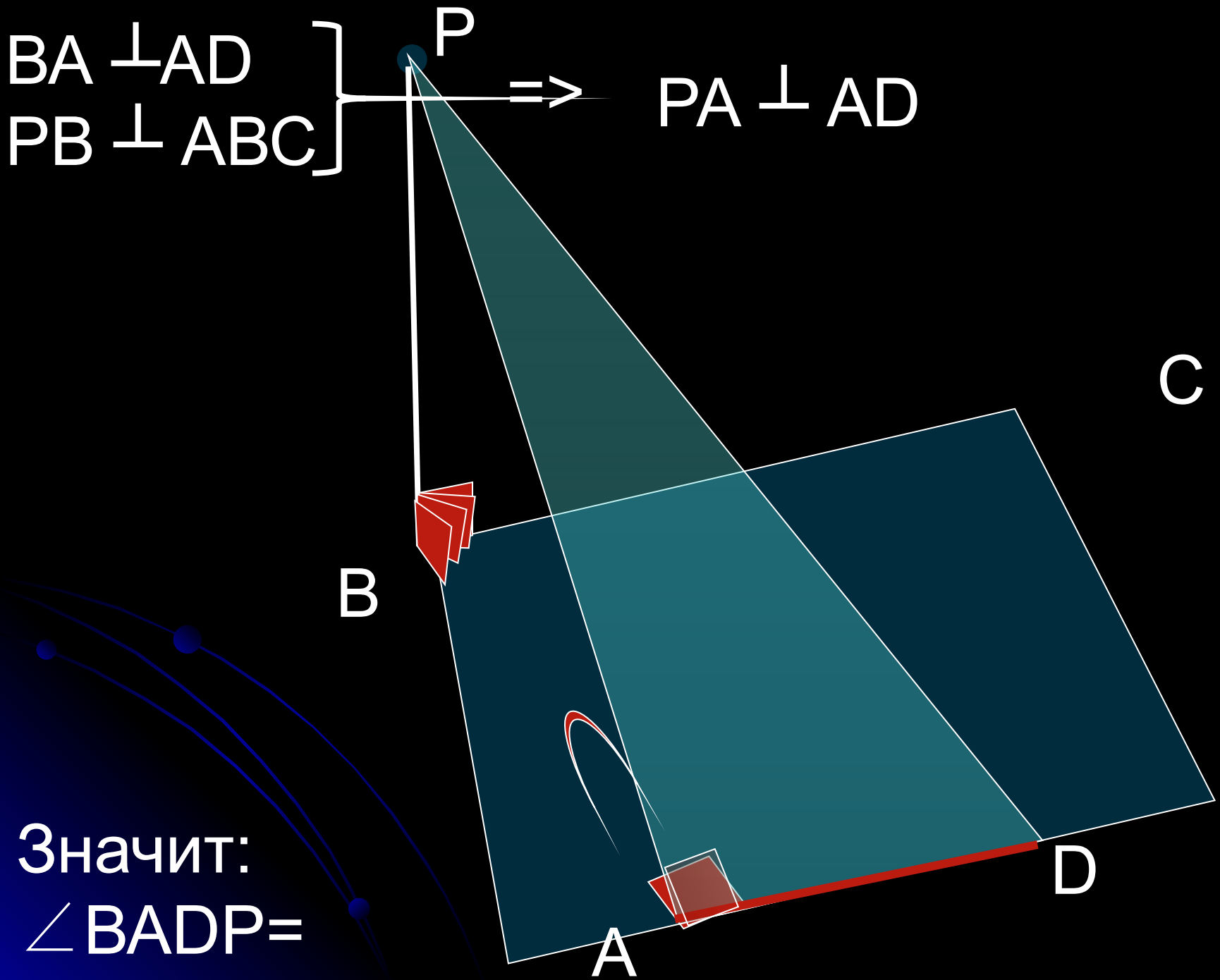
$OC \perp BD$

Значит:
 $\angle PBD =$

i) Дана трапеция $ABCD$; $\angle \underline{BAD} = 90^\circ$;
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если: $(PB) \perp (ABC)$.



$BA \perp AD$
 $PB \perp ABC$ } $\Rightarrow PA \perp AD$



Значит:
 $\angle BADP =$
 $\angle BAD$

к) Дана трапеция ABCD;

$$\angle BAD = 90^\circ;$$

Построить линейный угол

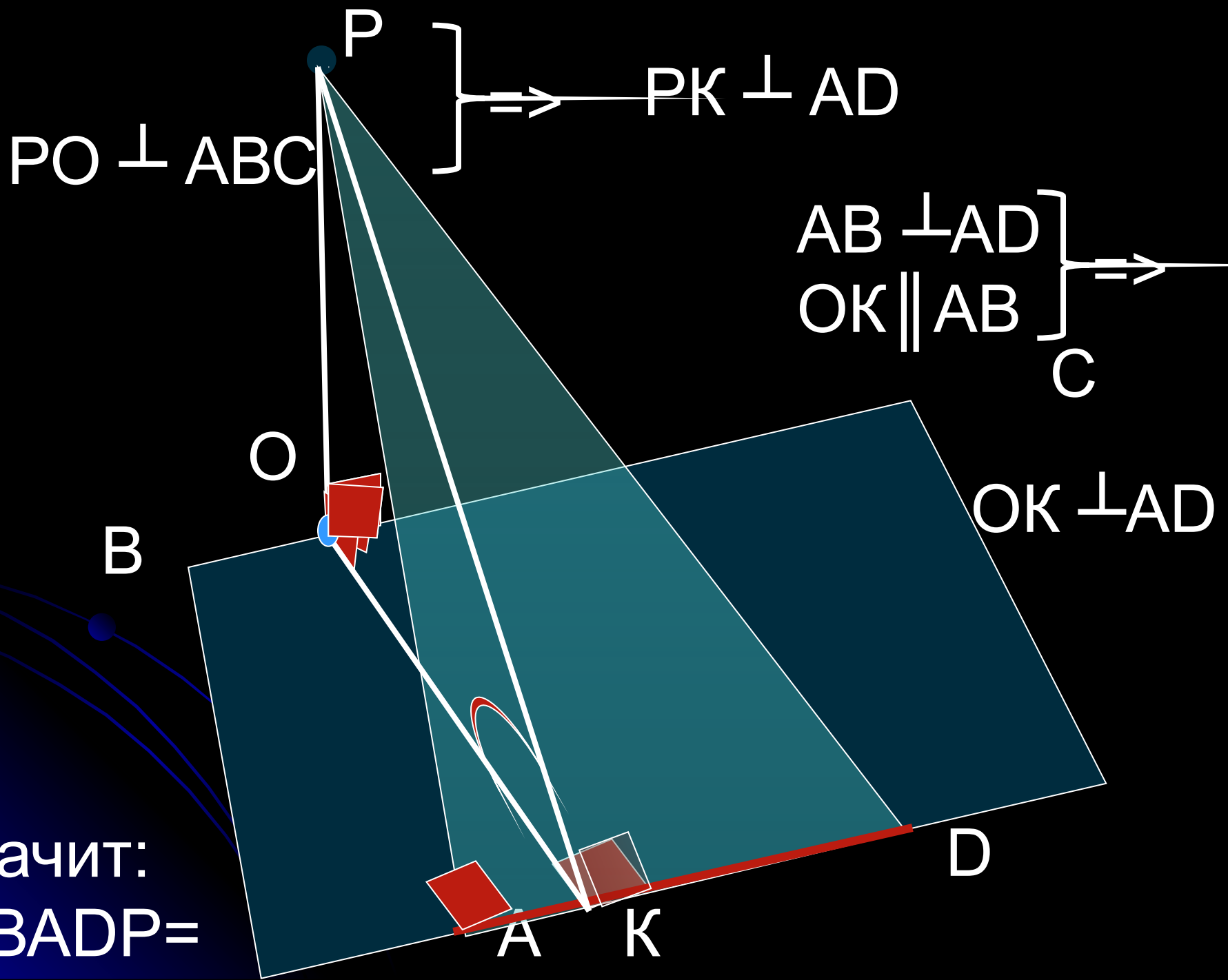
двугранного угла с

ребром AD, если:

$$O \in BC; (PO) \perp (ABC).$$

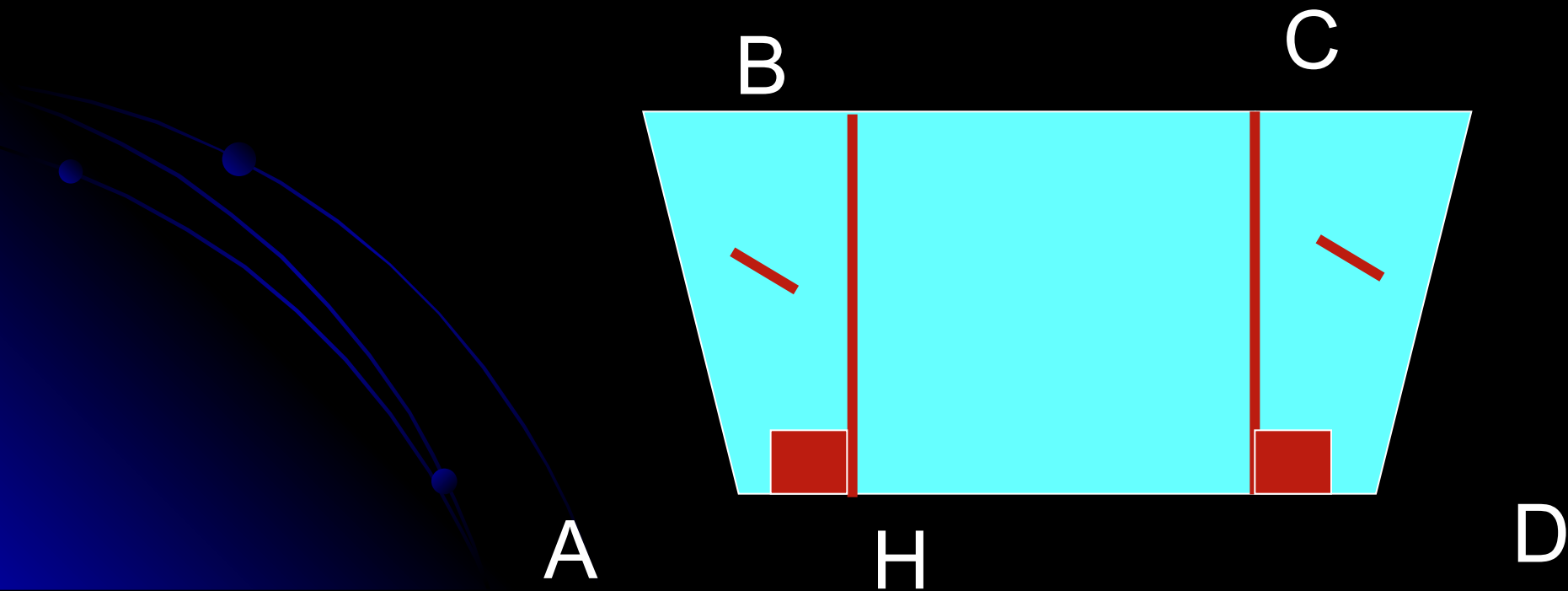


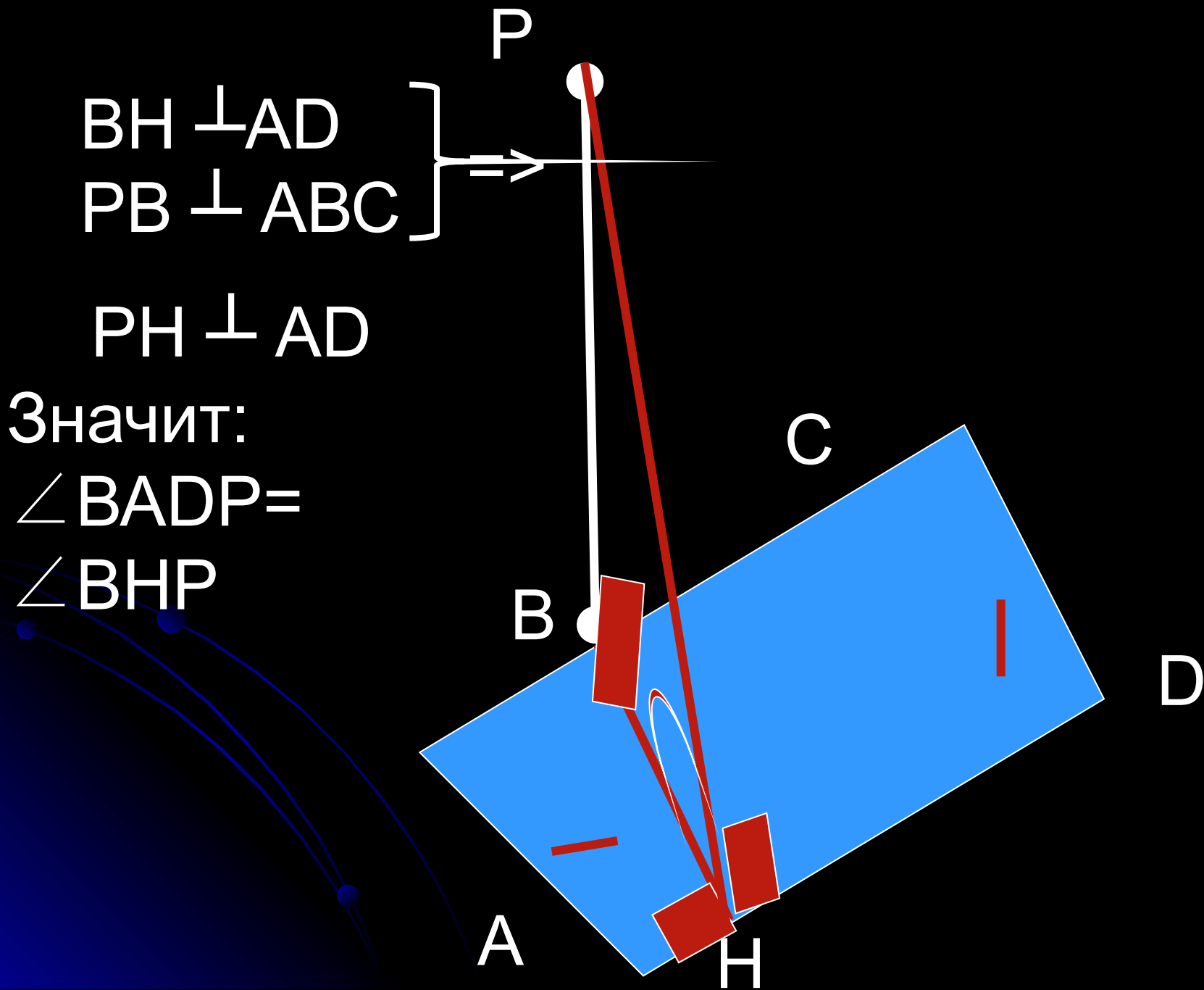
$\angle BAP - ?$



Значит:
 $\angle BADP =$

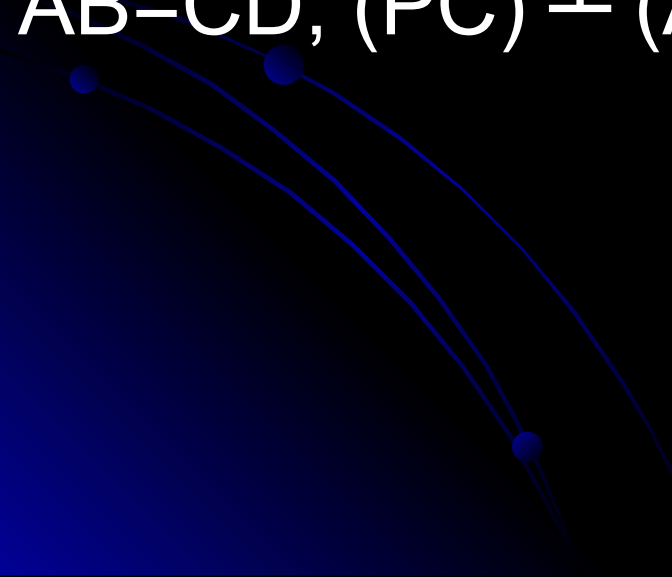
I) Дана трапеция ABCD.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если: $AB=CD$,
 $(PB) \perp (ABC)$.

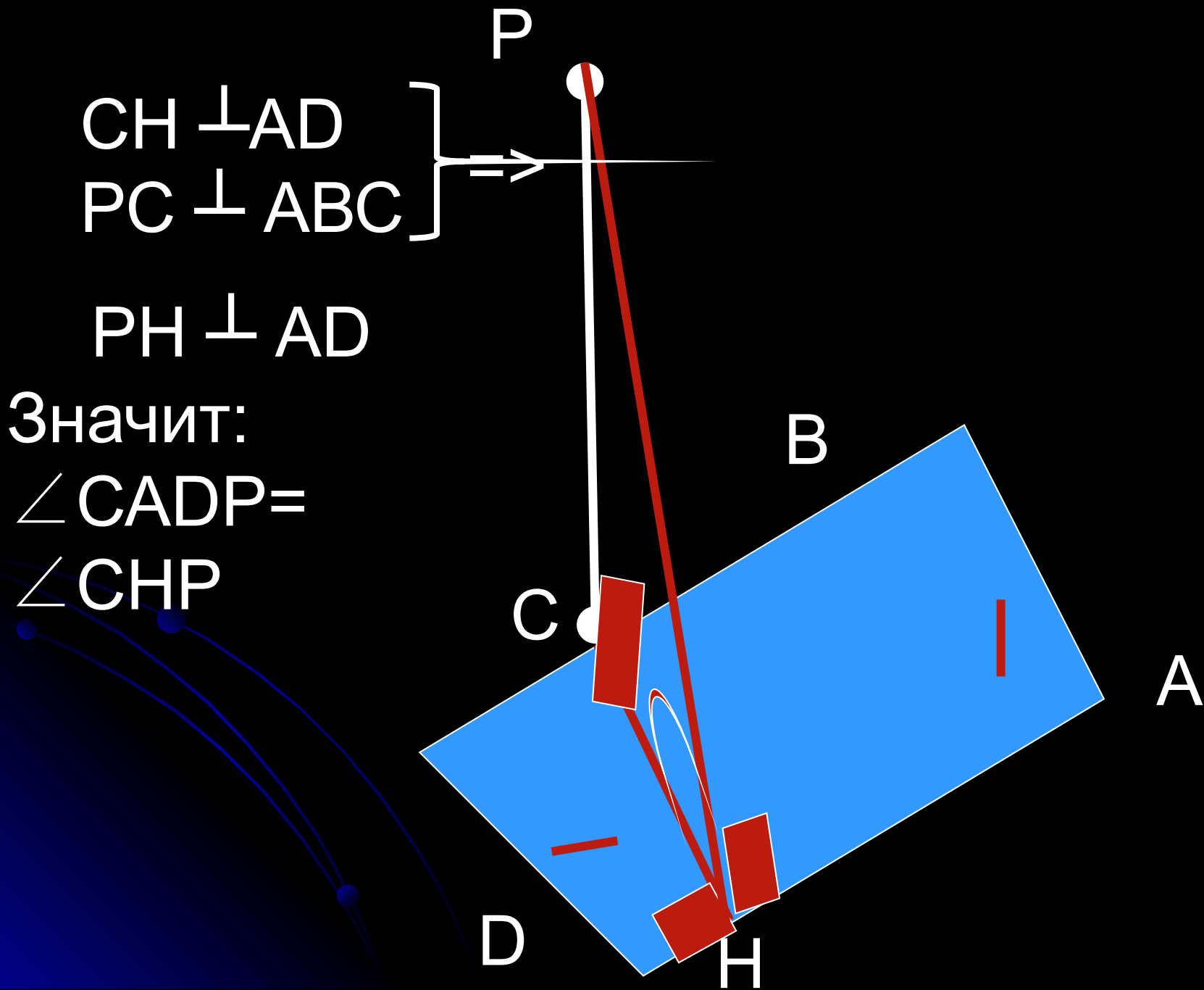




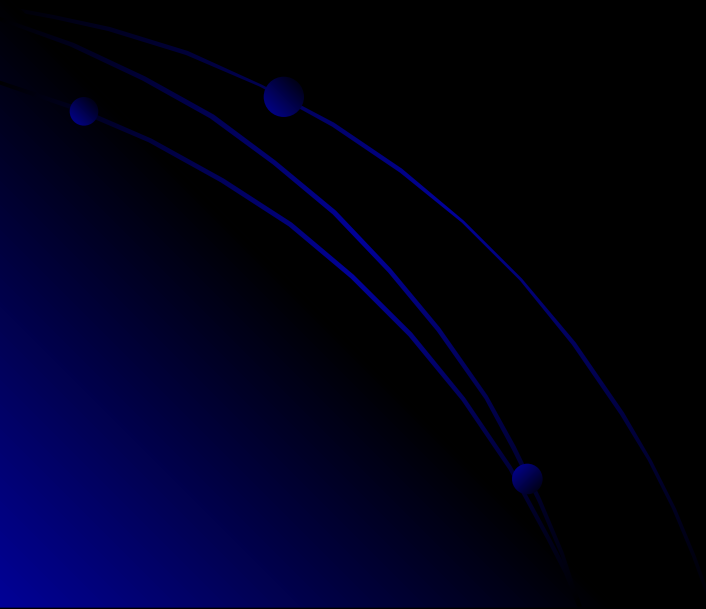
m) Дана трапеция ABCD.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если:

ABCD — равнобокая трапеция;
 $AB=CD$, $(PC) \perp (ABC)$;





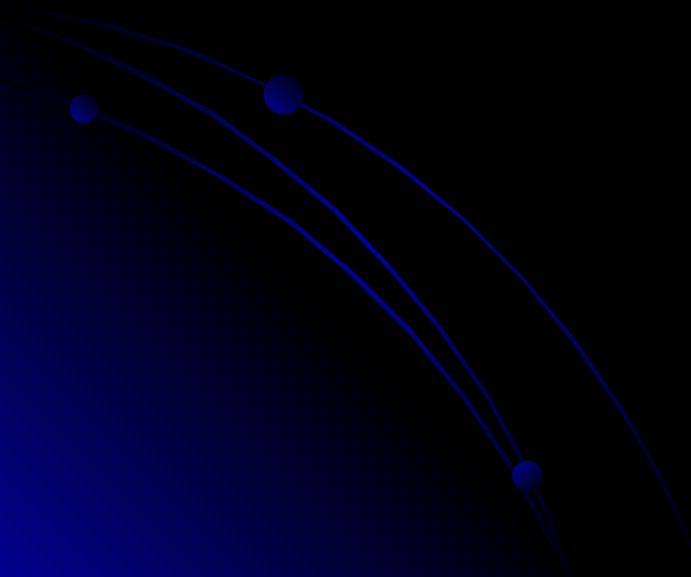
Вычислительные задачи



а) $PABC$ — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$$(PB) \perp (ABC); \angle ACB = 90^\circ;$$

$$BC = PB = 4$$



1)

$AC \perp BC$
 $PB \perp ABC$

$PC \perp AC$

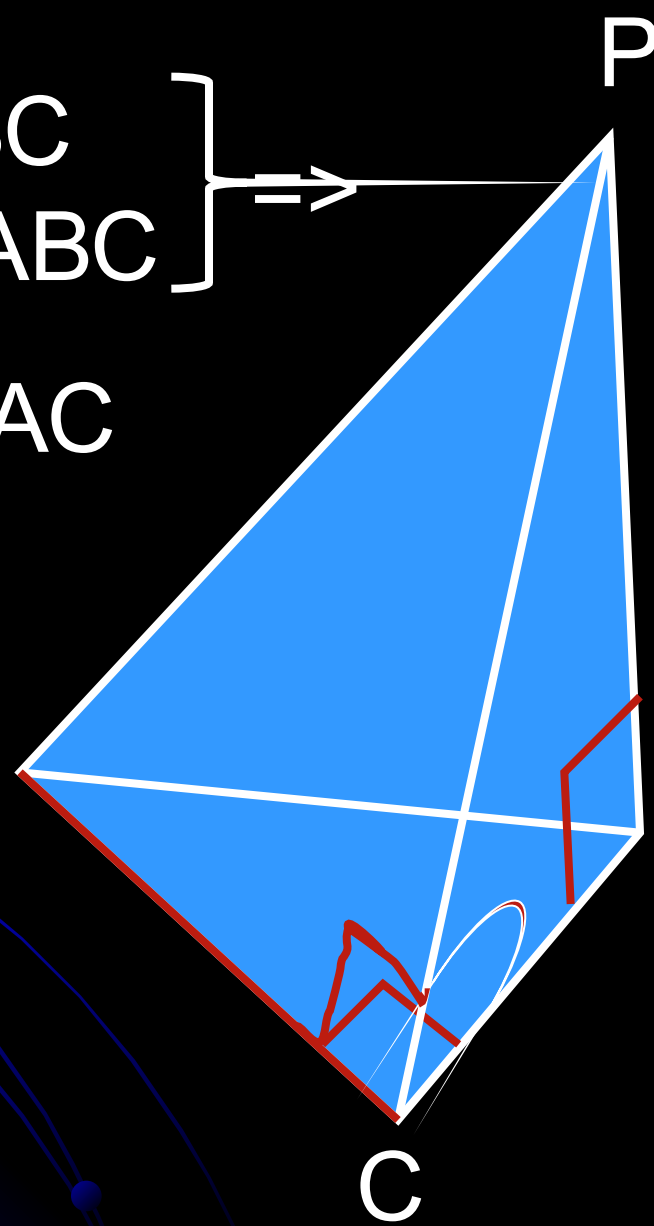
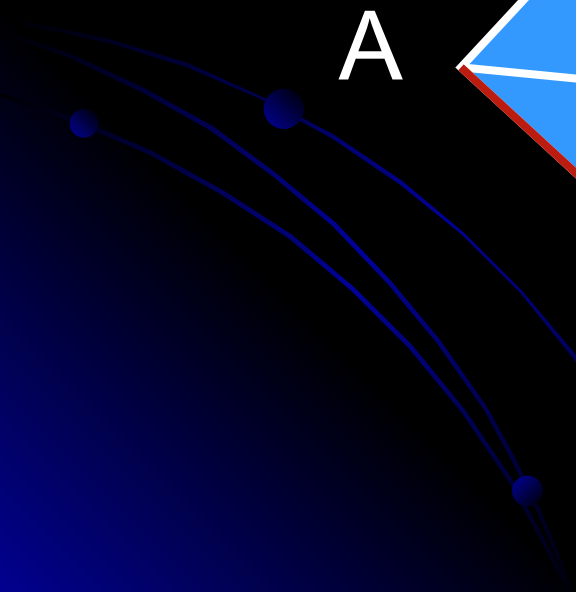
Значит:
 $\angle BACP =$
 $\angle BCP$

A

B

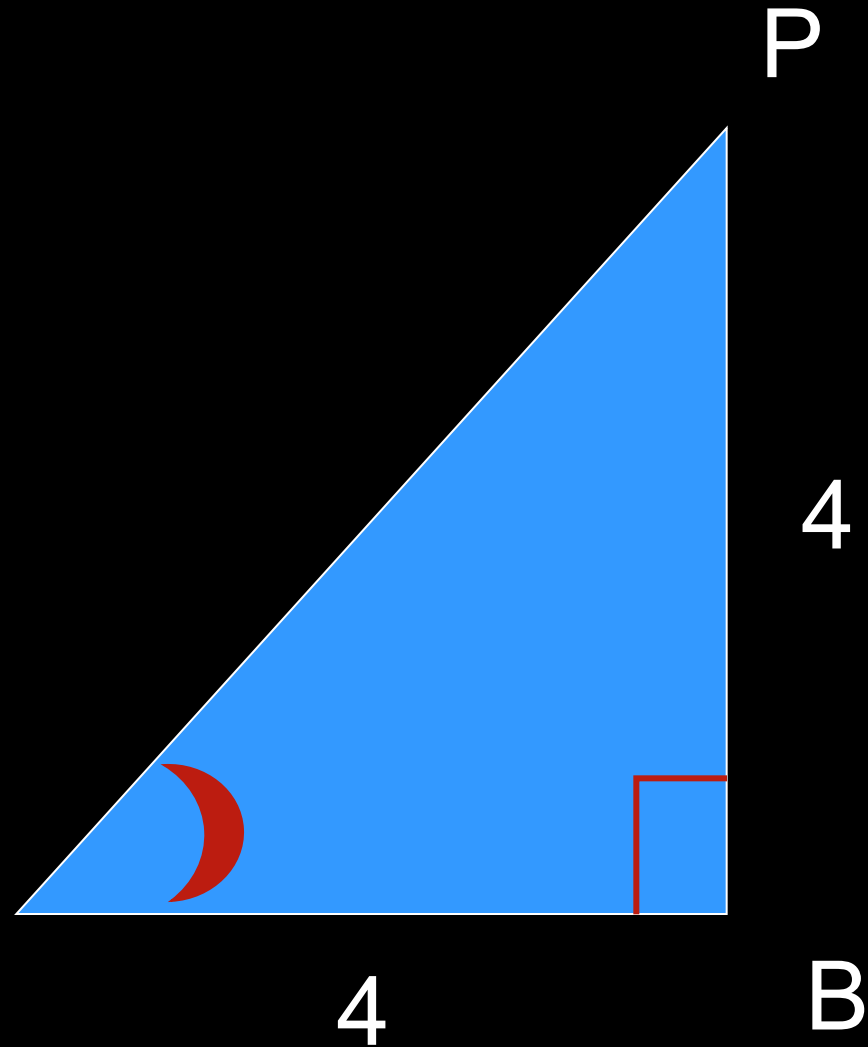
C

P



2) $BP=BC \Rightarrow \triangle CBP$ - равнобедренный,

$$\angle C = \angle P = 45^\circ$$



Ответ: $\angle BCP = 45^\circ$

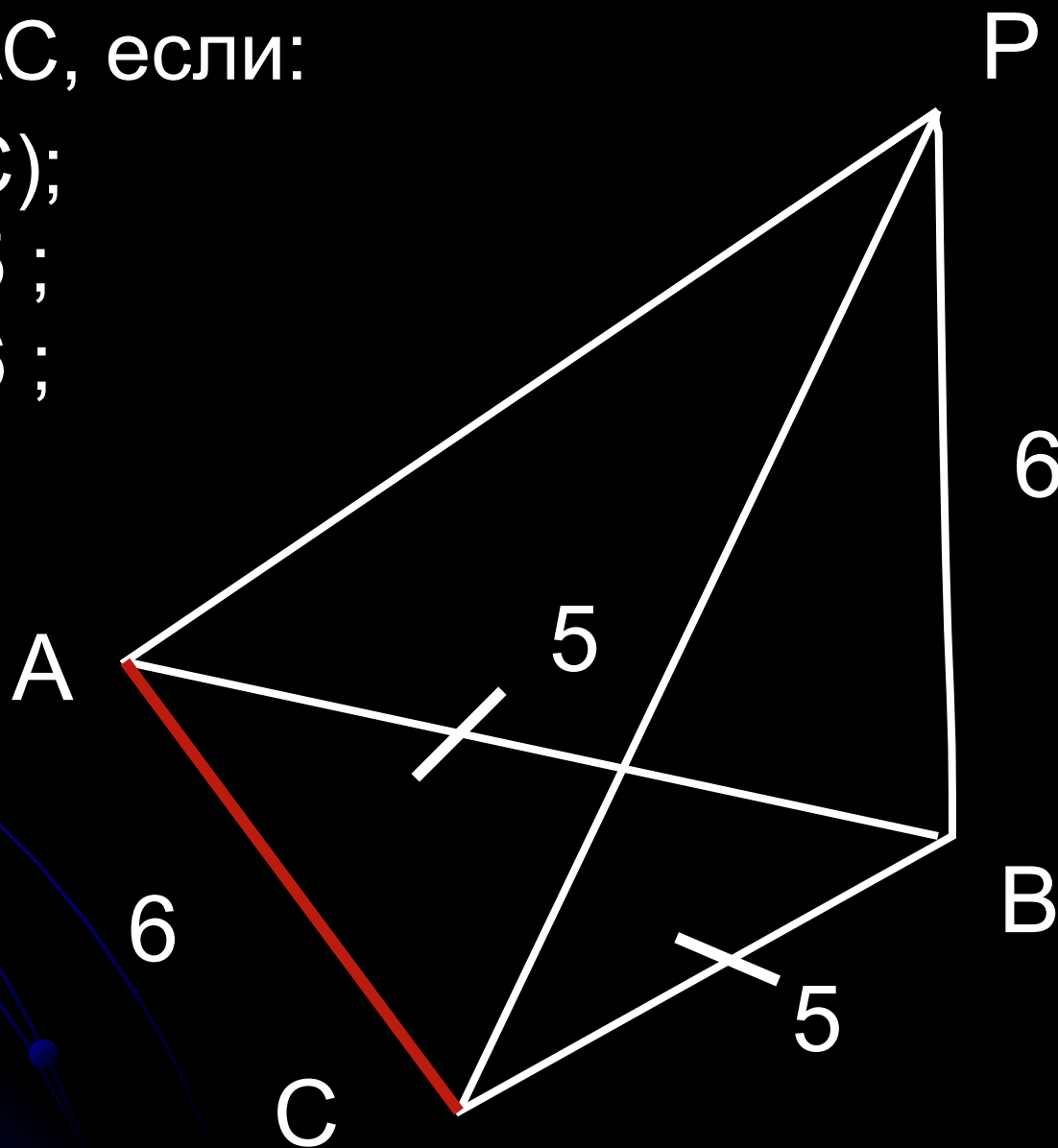
в) $PAVC$ — пирамида;

найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$(PB) \perp (ABC)$;

$AB = BC = 5$;

$BP = AC = 6$;



$\angle PACB =$

?

1)

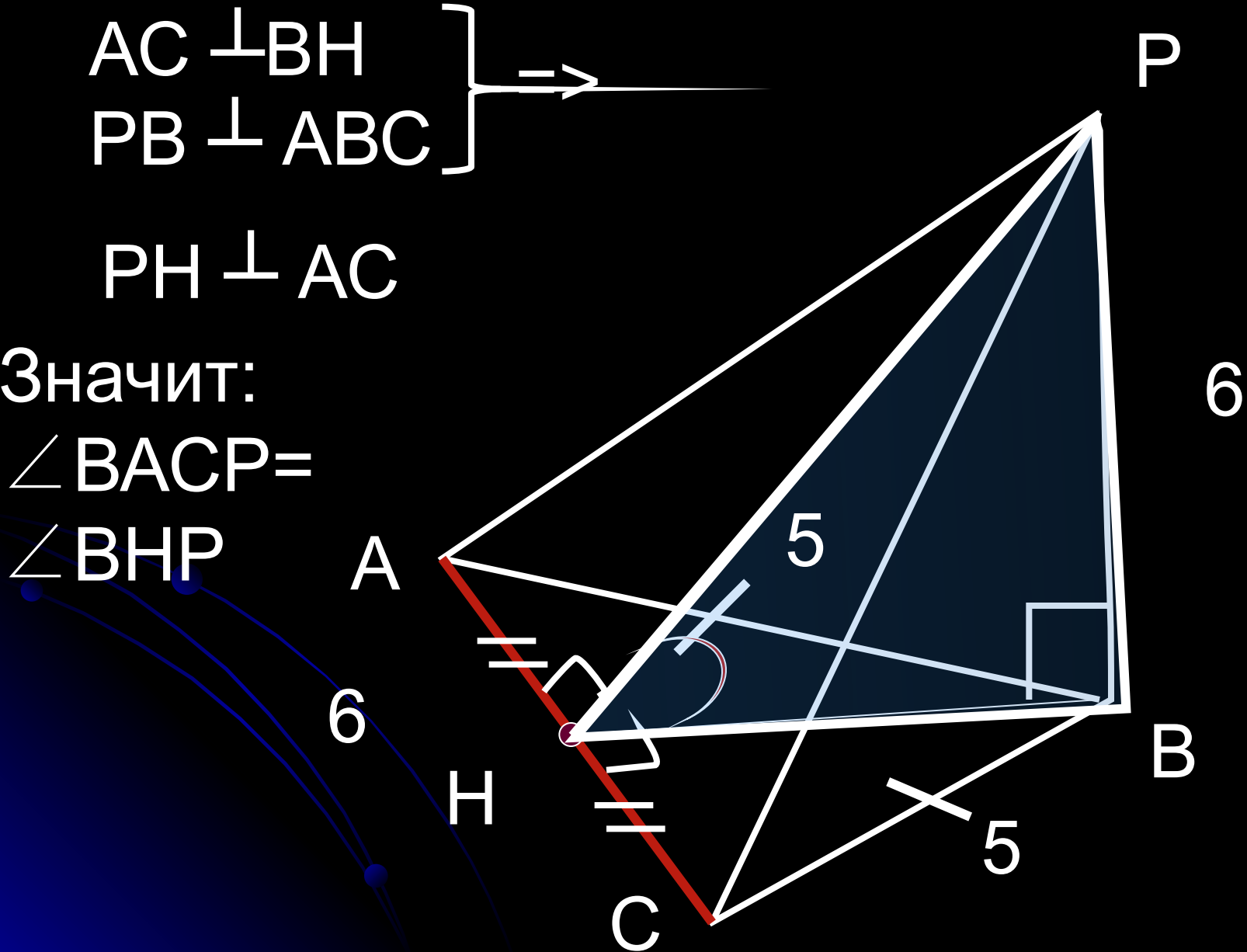
$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BH \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$PH \perp AC$$

Значит:

$$\angle BACP =$$

$$\angle BHP$$



2)

$\triangle ABC$ - равнобедренный,

BH - высота,

значит: BH - медиана,

$AH = HC = 3$,

$\triangle BHC$ - прямоугольный,

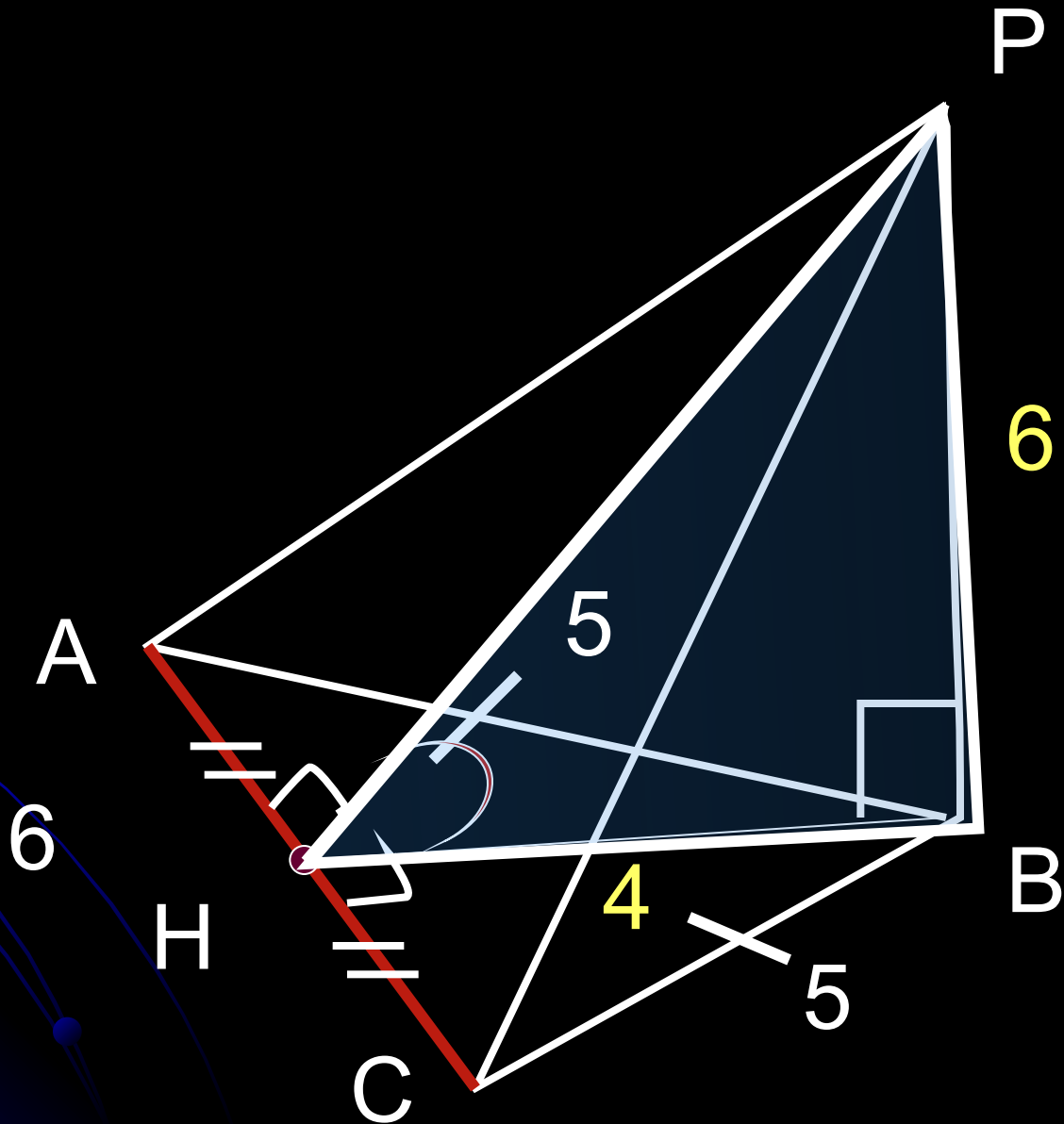
$BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH = 4$



1)

Значит:
 $\angle BACP =$
 $\angle BHP$



3) $\triangle PBN$ - прямоугольный,

$$\operatorname{tg} \angle N = PB / BN,$$

$$\operatorname{tg} \angle N = 6/4 = 1,5$$

Ответ:

$$\angle PNB = \operatorname{arctg}$$

1,5

Н

4

В

Р

6



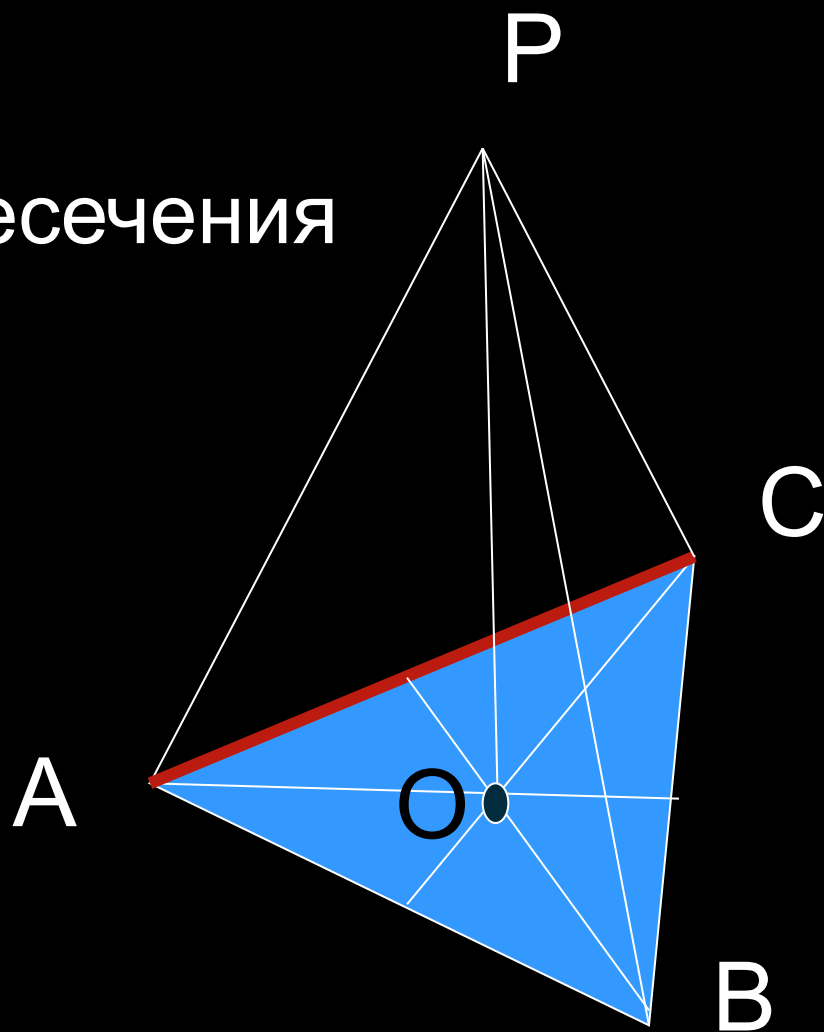
с) $PAVC$ — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$\triangle ABC$ — правильный
треугольник;

$AB = 6$; O — точка пересечения
медиан ABC ;

$(PO) \perp (ABC)$;

$$PO = \sqrt{3}$$



$\angle PACB =$

?

1) BK - медиана, P

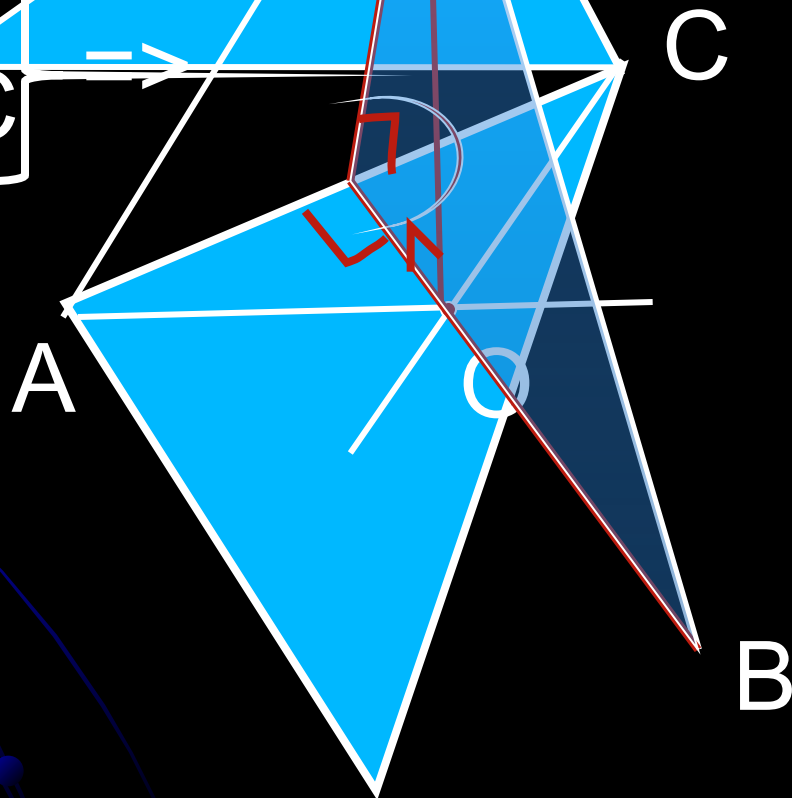
$\triangle ABC$ - правильный

\Rightarrow BK - высота

$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$$PO = \sqrt{3}$$

KO - ?

$\angle PACB$

$= \angle PKB$

2) $\triangle ABC$ - правильный,
O - точка пересечения
медиан, значит:
 $OB = 2OK$.

Найдем BK.

$\triangle BKC$:

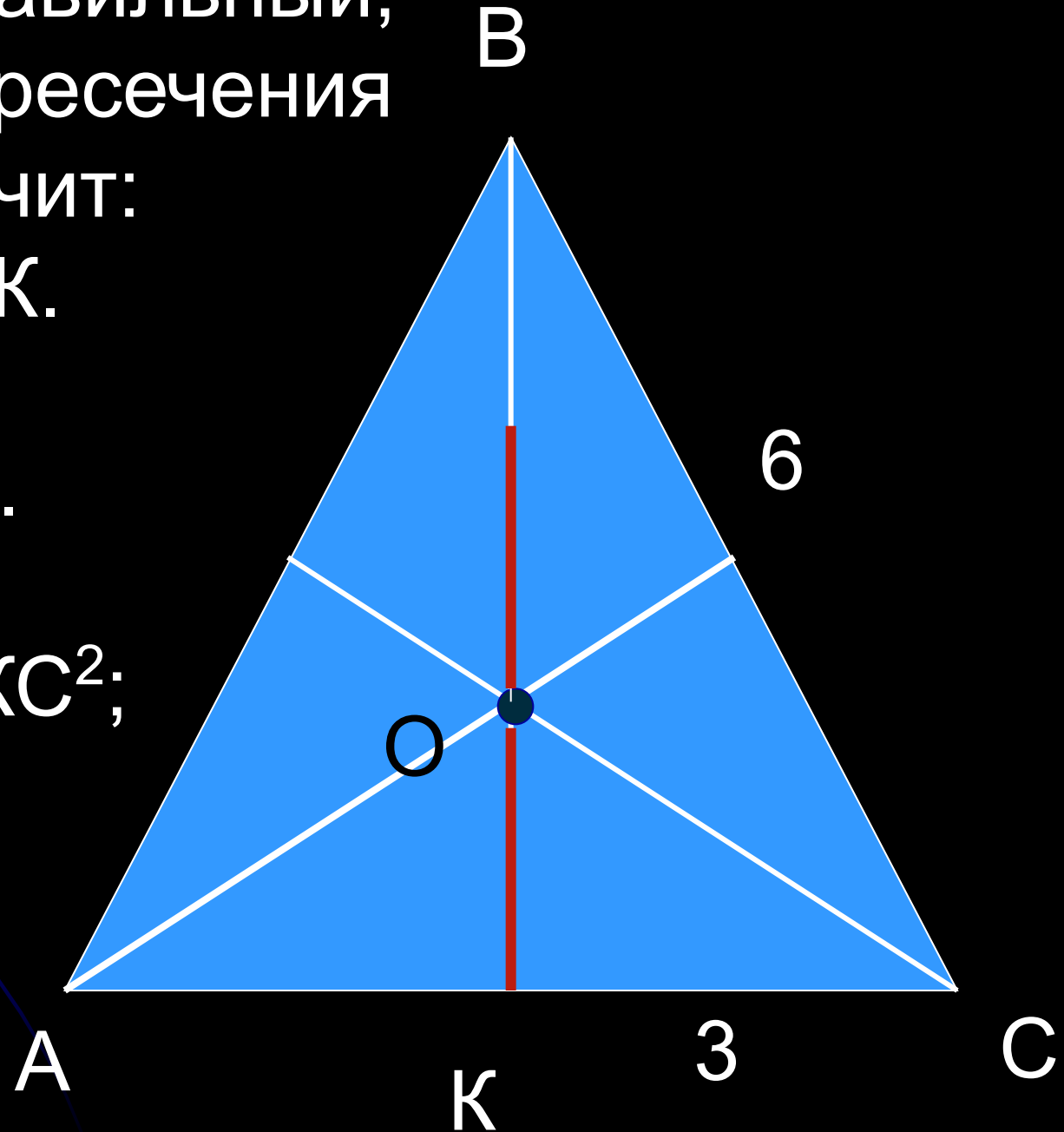
$$BK^2 = BC^2 - KC^2;$$

$$BK^2 = 27;$$

$$BK = 3\sqrt{3}$$

$$BK = 3OK,$$

$$OK = \sqrt{3}$$



1) ВК - медиана, р

$\triangle ABC$ - правильный

\Rightarrow ВК - высота

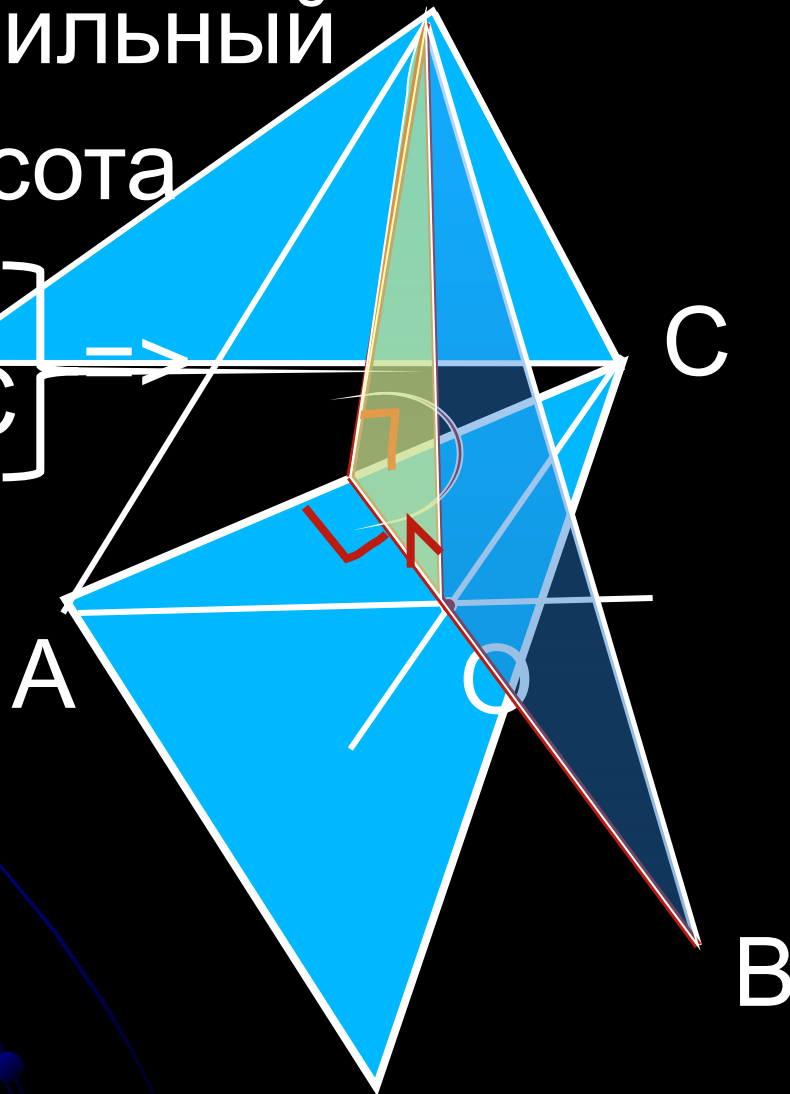
$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$

$$PO = \sqrt{3}$$

$$KO = \sqrt{3}$$



$\angle PACB$

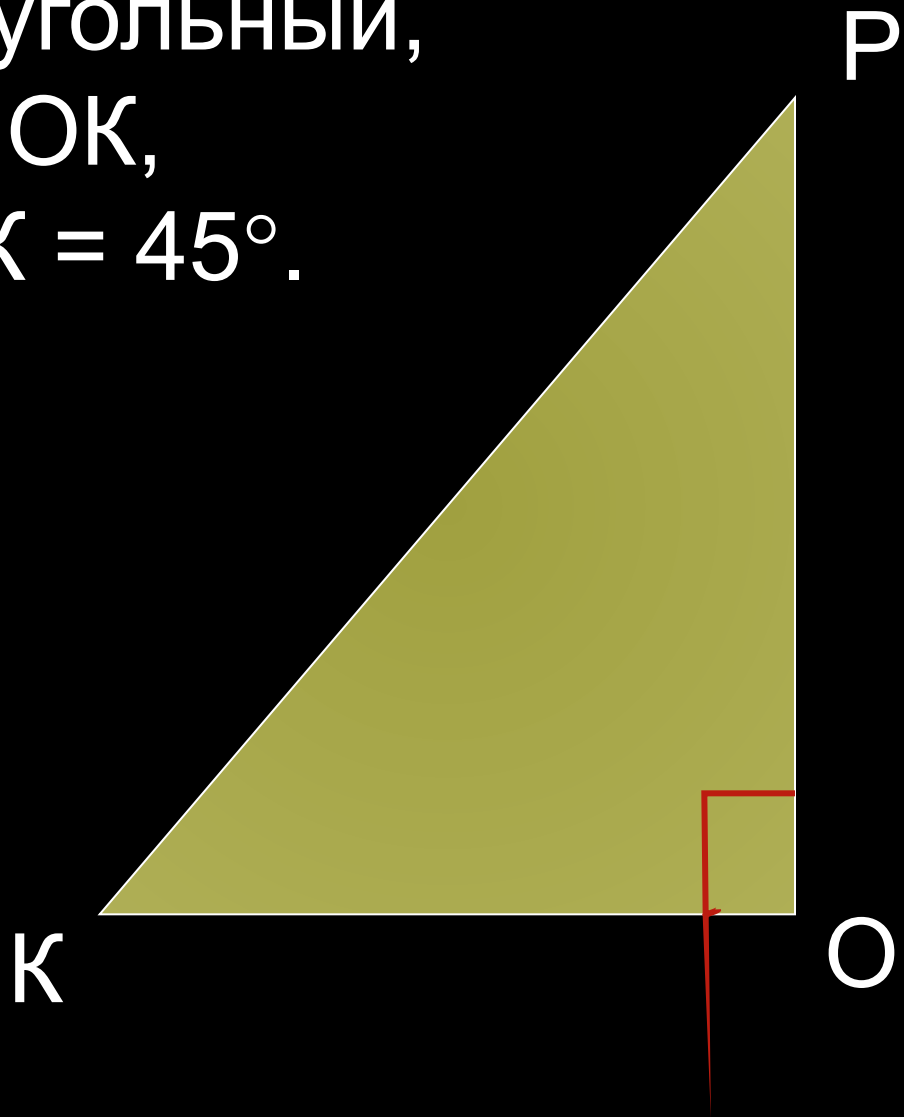
$= \angle PKP$

3) $\triangle POK$ - прямоугольный,
 $\angle O = 90^\circ$, $PO = OK$,
значит $\angle P = \angle K = 45^\circ$.

Ответ:

$\angle PACB =$

45°



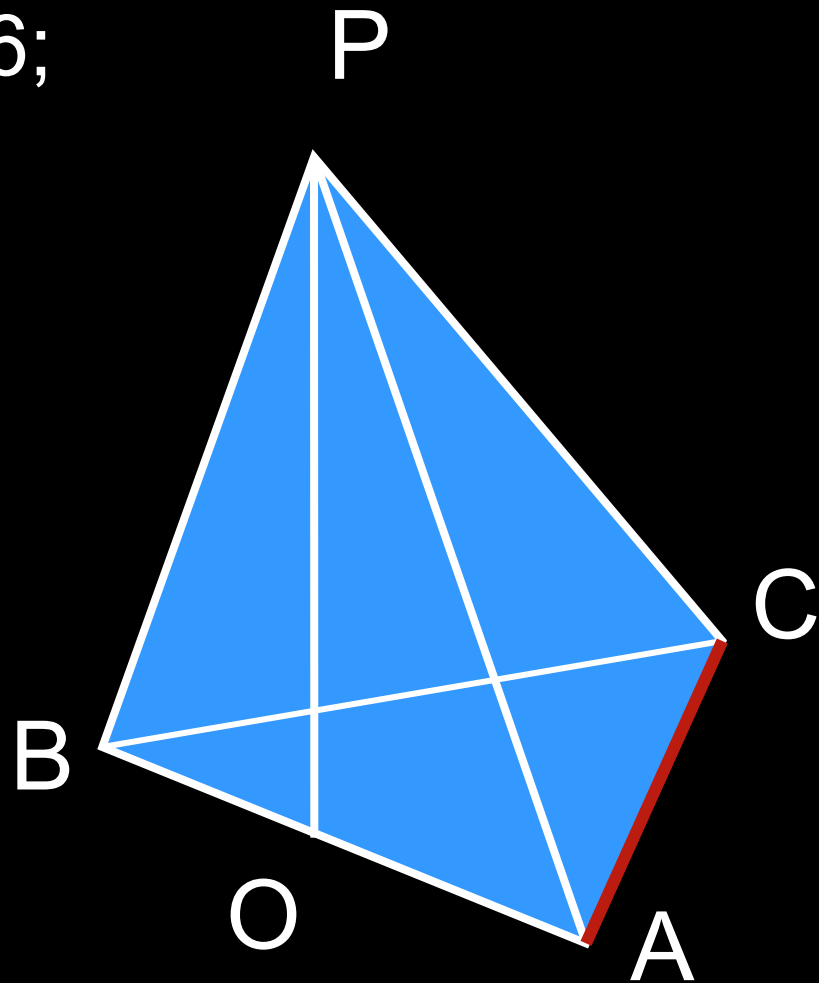
D) PABC — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC, если:

ABC — правильный треугольник;

O — середина AB; $AB = 6$;

$(PO) \perp (ABC)$;

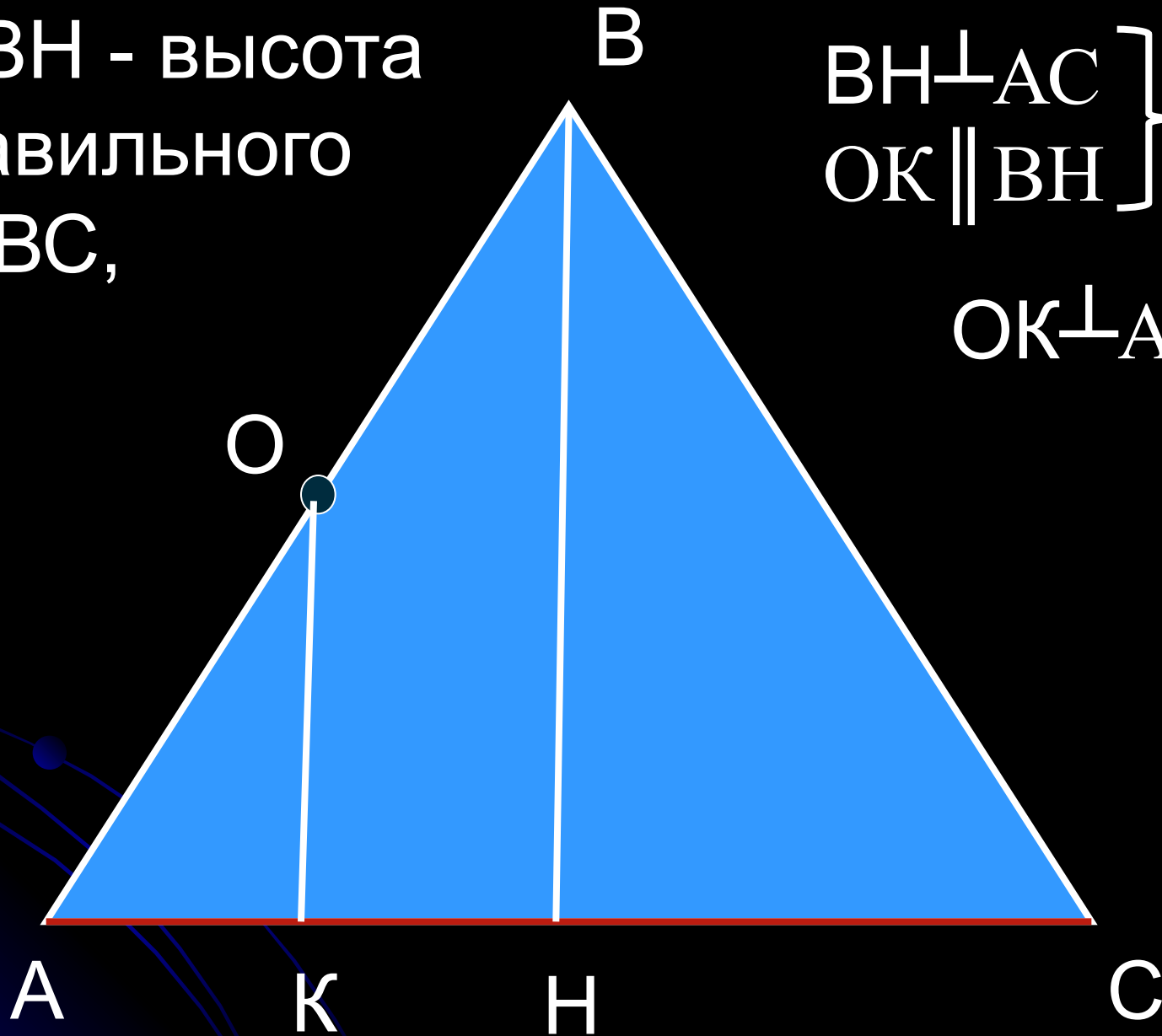
$PO = 4$;



$\angle PACB =$

?

1) BH - высота
правильного
 $\triangle ABC$,



$BH \perp AC$
 $OK \parallel BH$ } \Rightarrow

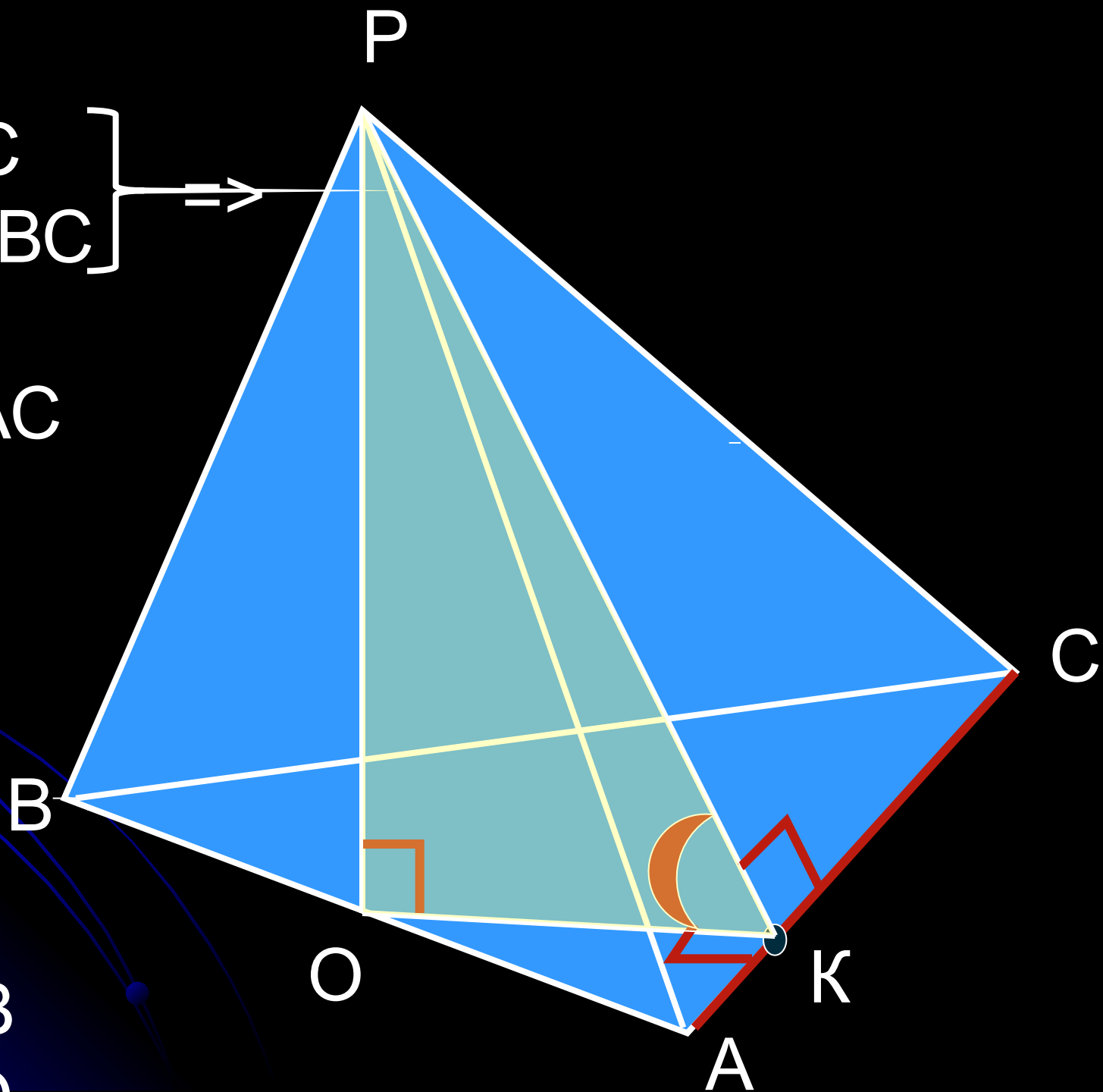
$OK \perp AC$

2)

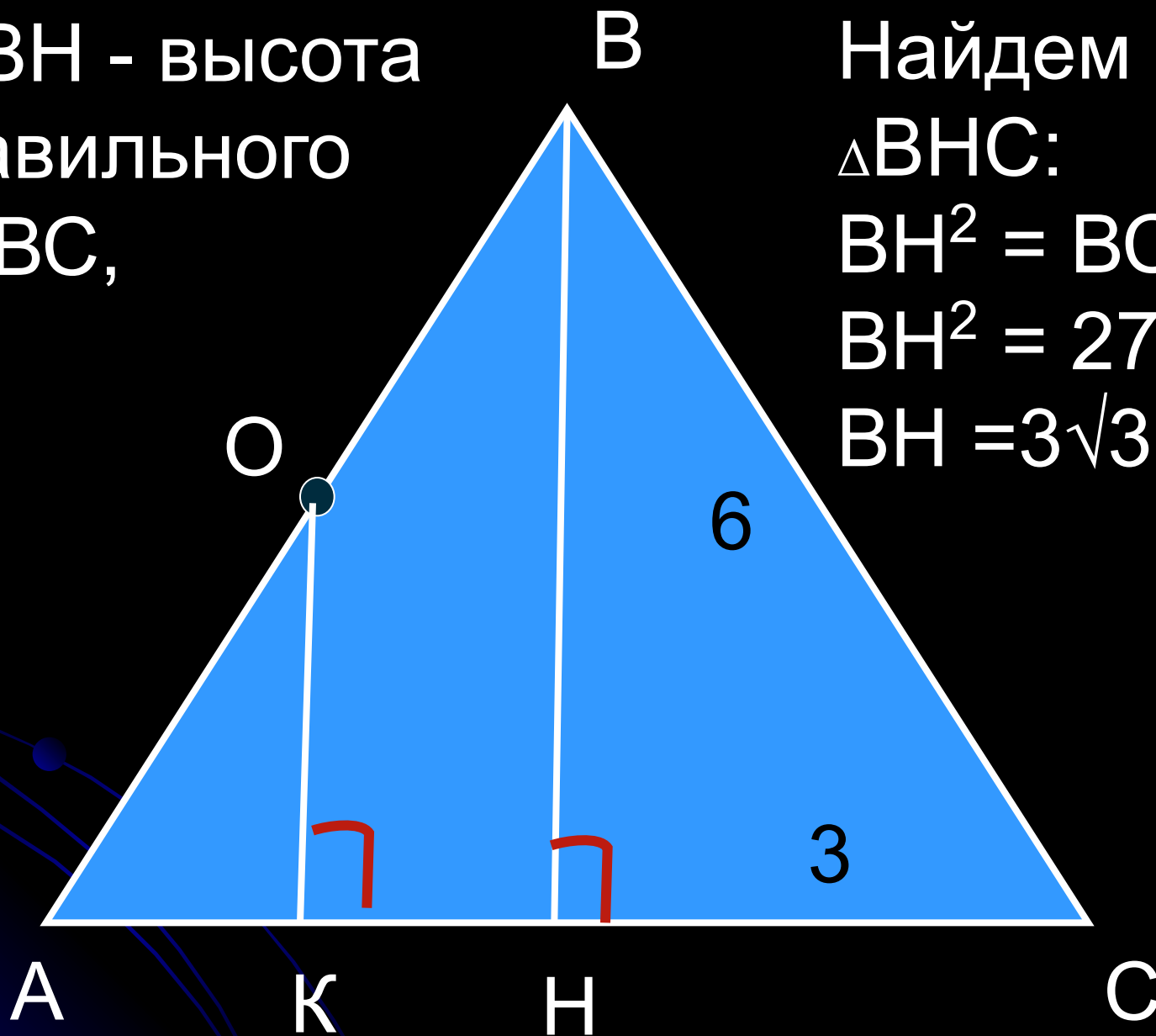
$OK \perp AC$
 $PO \perp ABC$

$PK \perp AC$

$\angle PACB$
 $= \angle PKO$



3) ВН - высота
правильного
 $\triangle ABC$,



Найдем BH .

$\triangle BHC$:

$$BH^2 = BC^2 - HC^2;$$

$$BH^2 = 27;$$

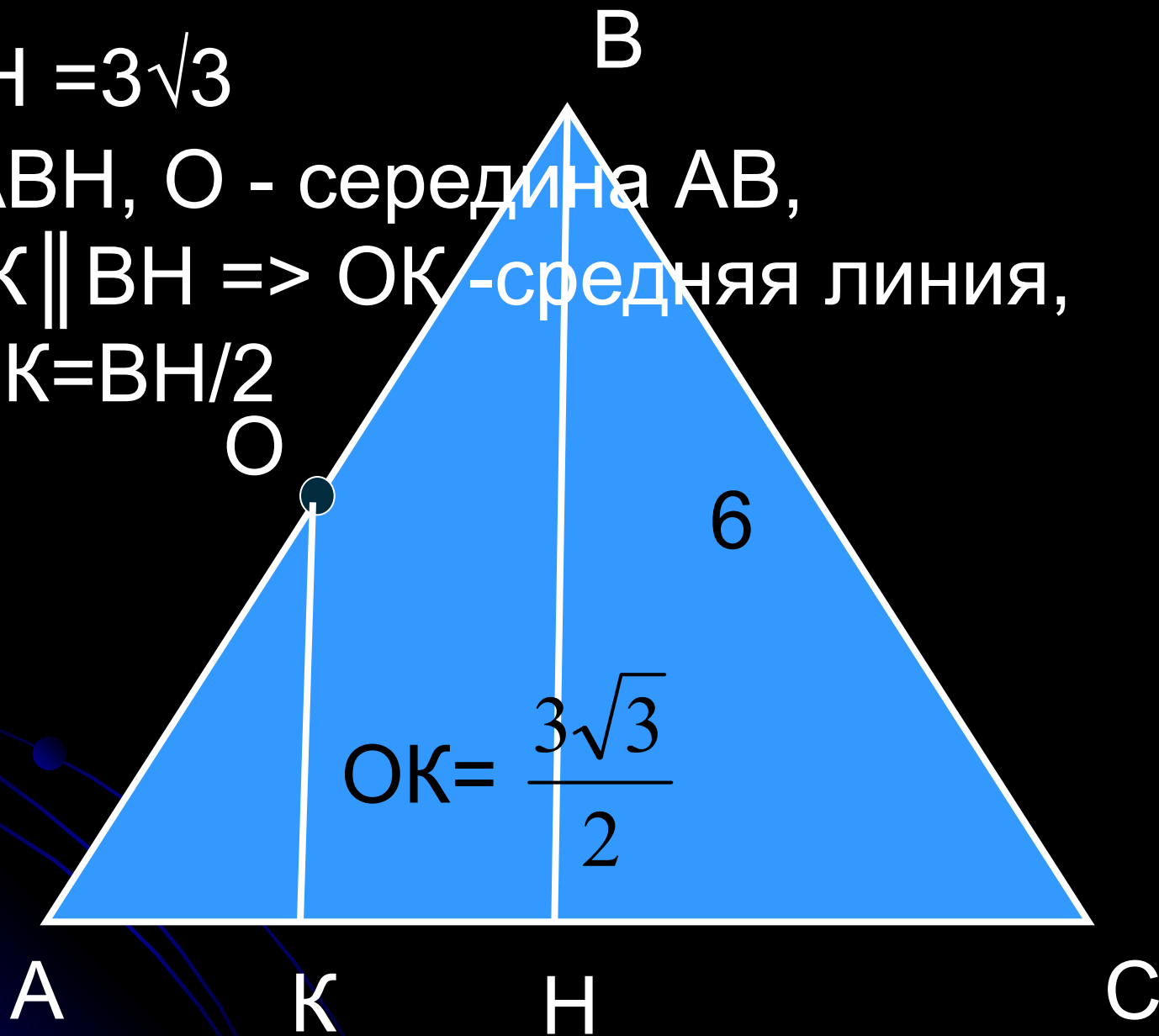
$$BH = 3\sqrt{3}$$

$$BH = 3\sqrt{3}$$

$\triangle ABH$, O - середина AB ,

$OK \parallel BH \Rightarrow OK$ - средняя линия,

$$OK = BH/2$$



4) $\triangle POK$; $\angle C = 90^\circ$

$\text{tg } \angle K = PO/OK,$

$\text{tg } \angle K = 4/\sqrt{3}$

6

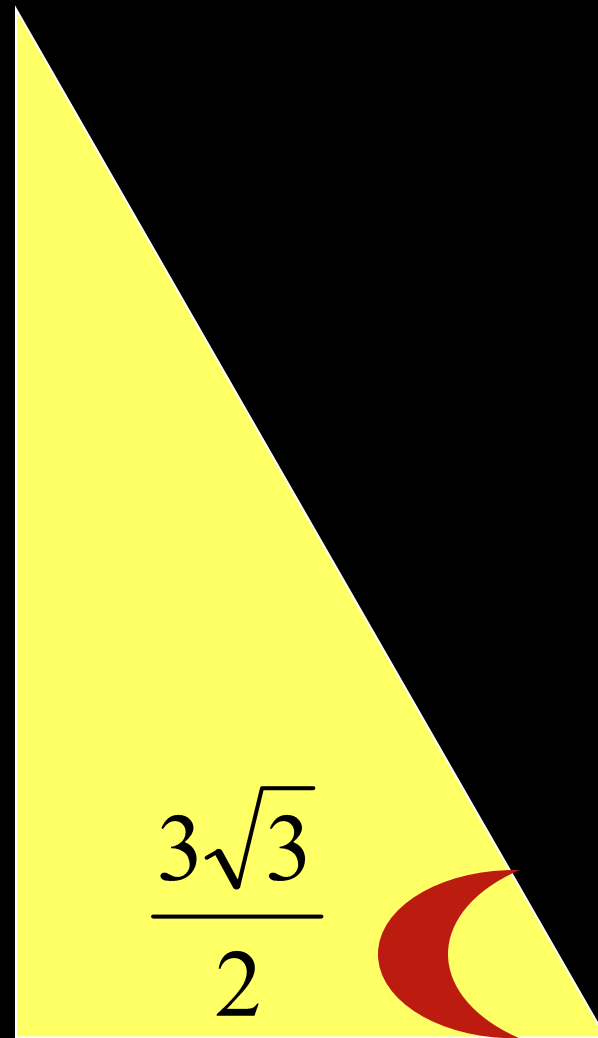
Ответ:

$\angle PACB = \text{arctg } 4/\sqrt{3}$

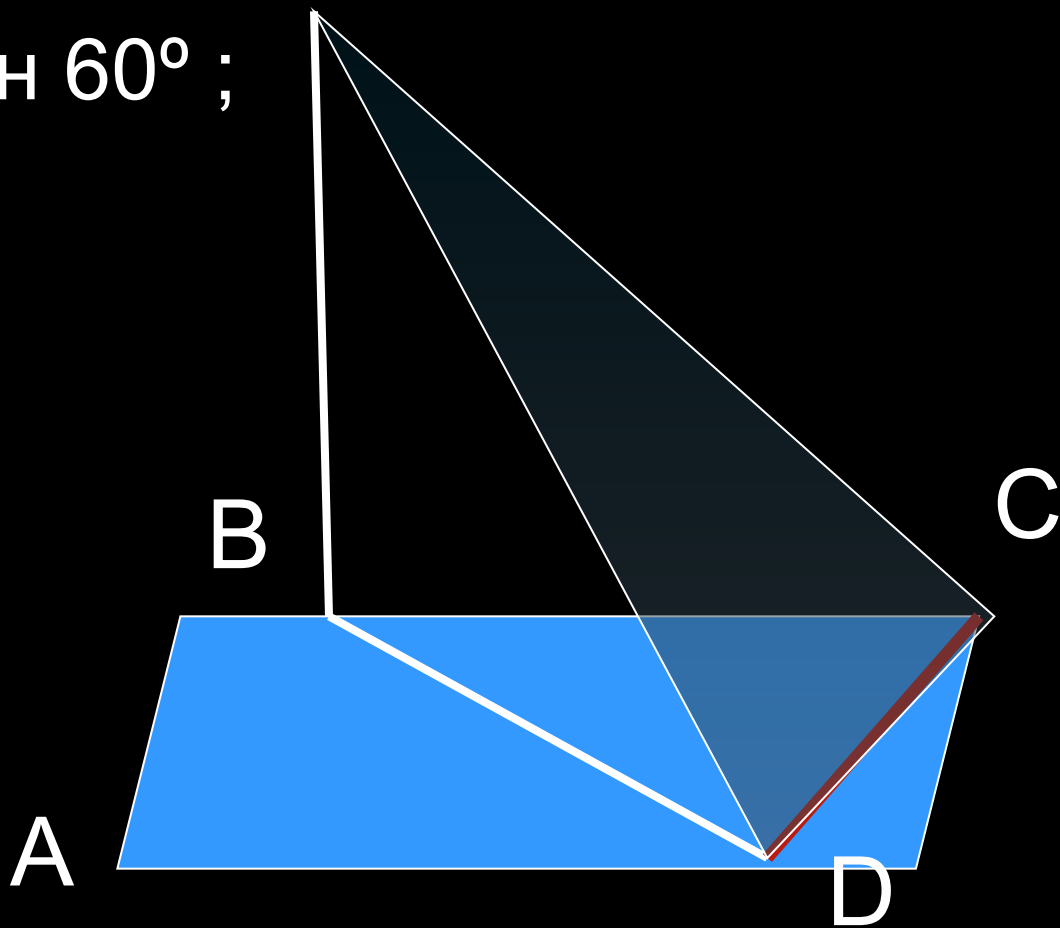
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

O

K



е) ABCD —
прямоугольник;
 $BD = 4\sqrt{3}$;
 $(PB) \perp (ABC)$; $PB = 6$; P
Двугранный угол
с ребром DC равен 60° ;
Найти стороны
прямоугольника.



1)

$$\left. \begin{array}{l} \angle PDCB = 60^\circ \\ BC \perp CD \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

P

$$BD = 4\sqrt{3};$$

$$PB = 6;$$

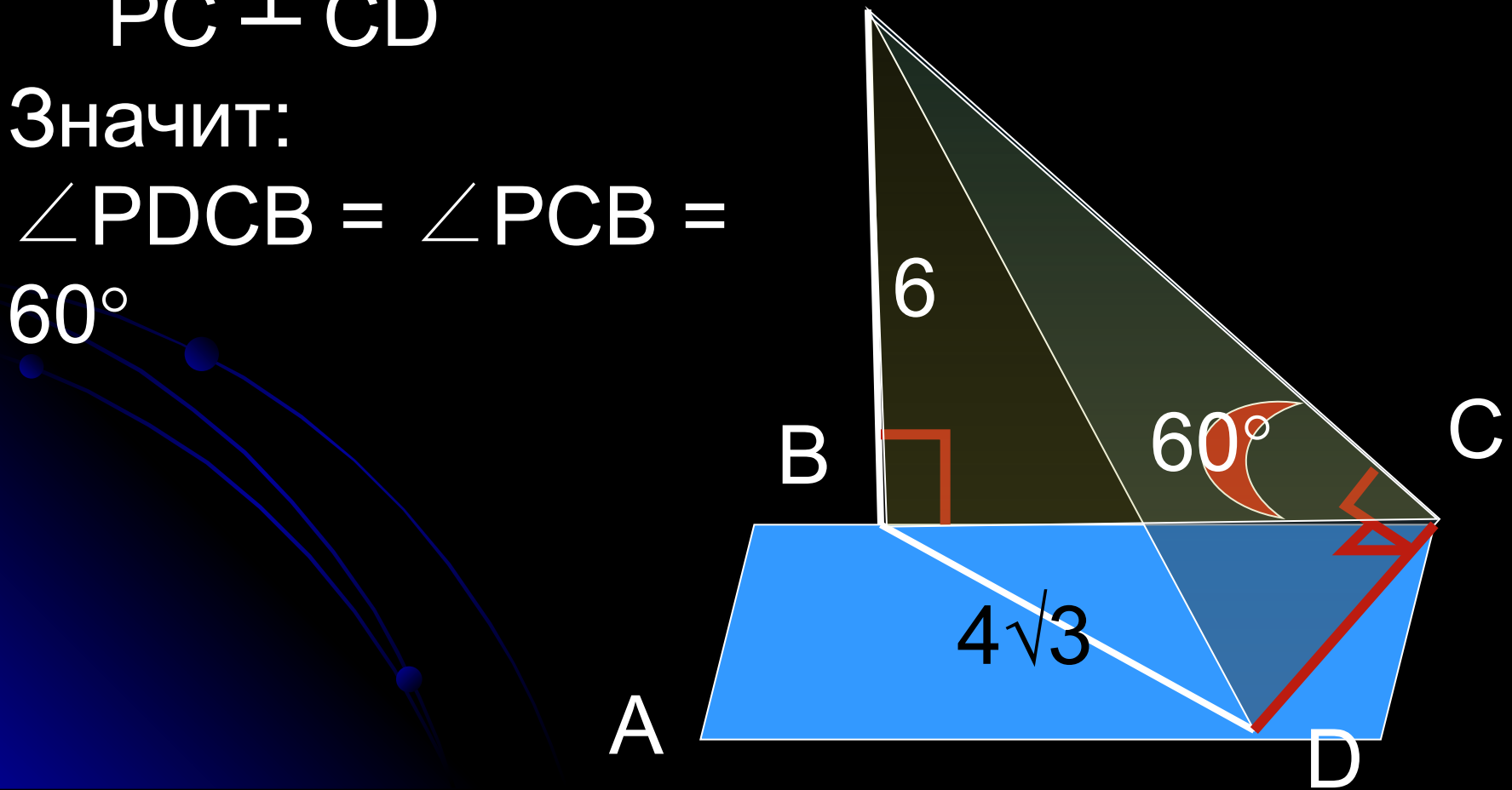
$$\angle PCB = 60^\circ$$

$$PC \perp CD$$

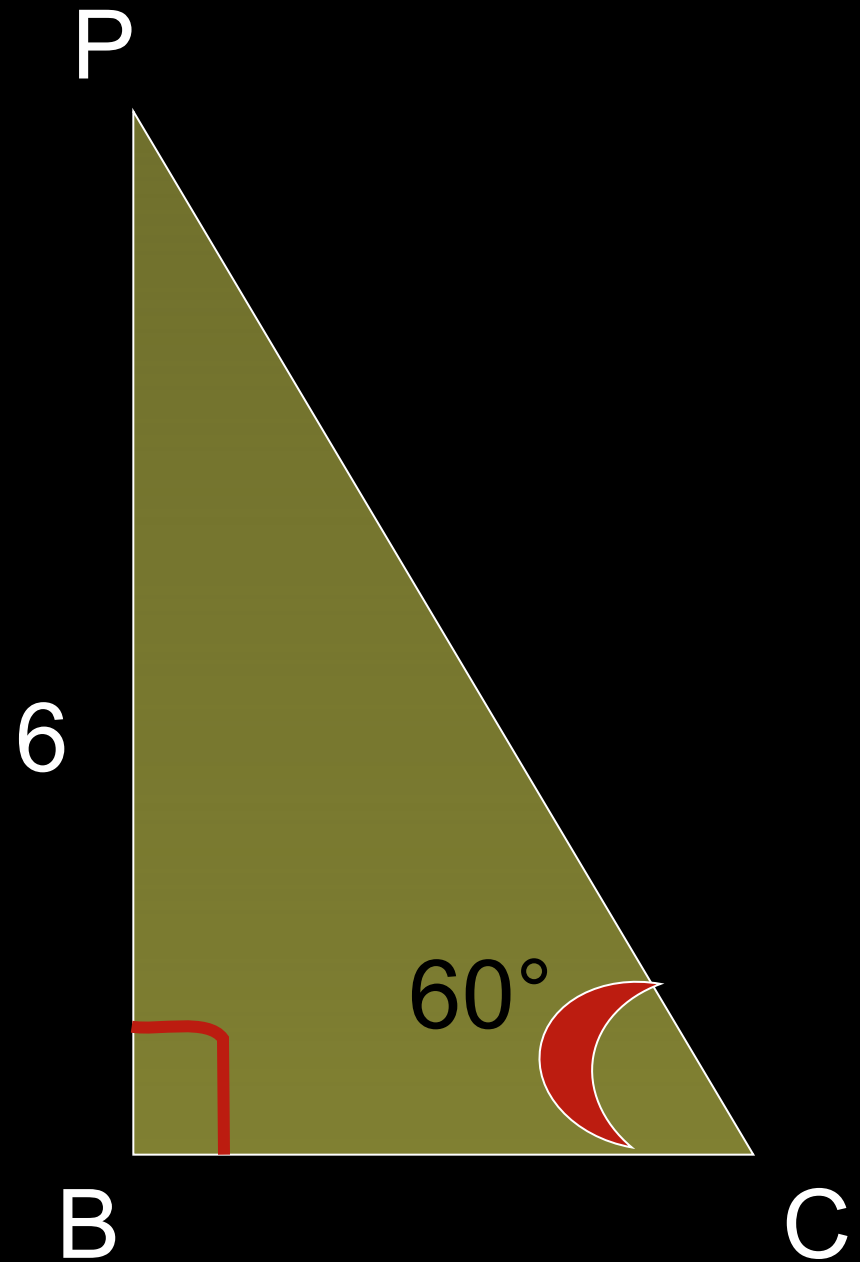
Значит:

$$\angle PDCB = \angle PCB =$$

$$60^\circ$$



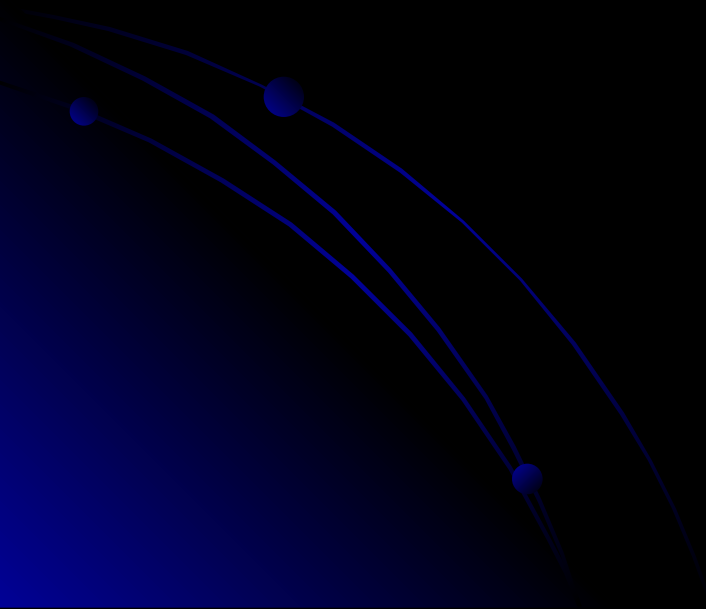
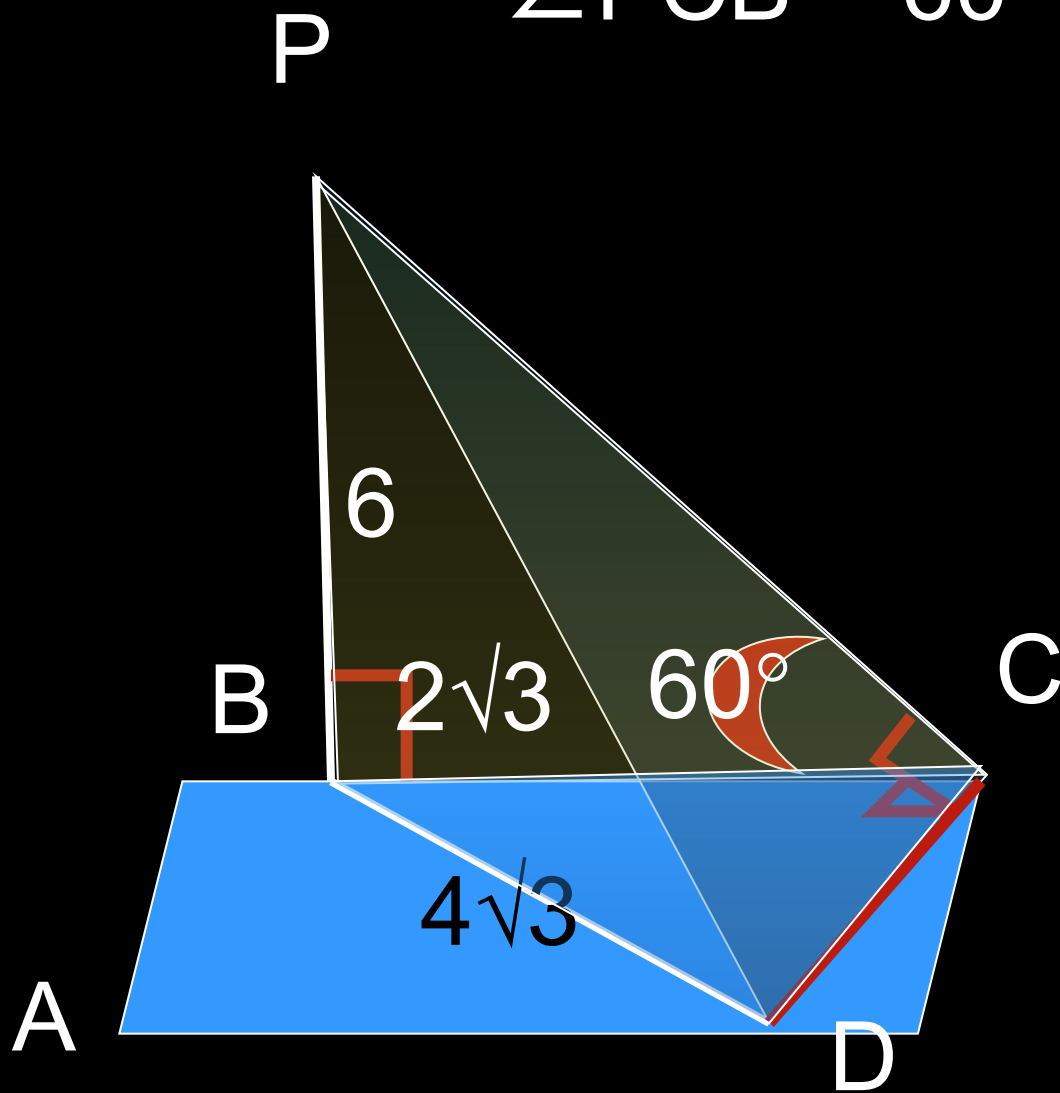
2) $\triangle PBC$, $\angle B = 90^\circ$,
 $\operatorname{tg} \angle C = PB/BC$,
 $\sqrt{3} = 6/BC$,
 $BC = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$



$$BD = 4\sqrt{3} ;$$

$$PB = 6 ;$$

$$\angle PCB = 60^\circ$$



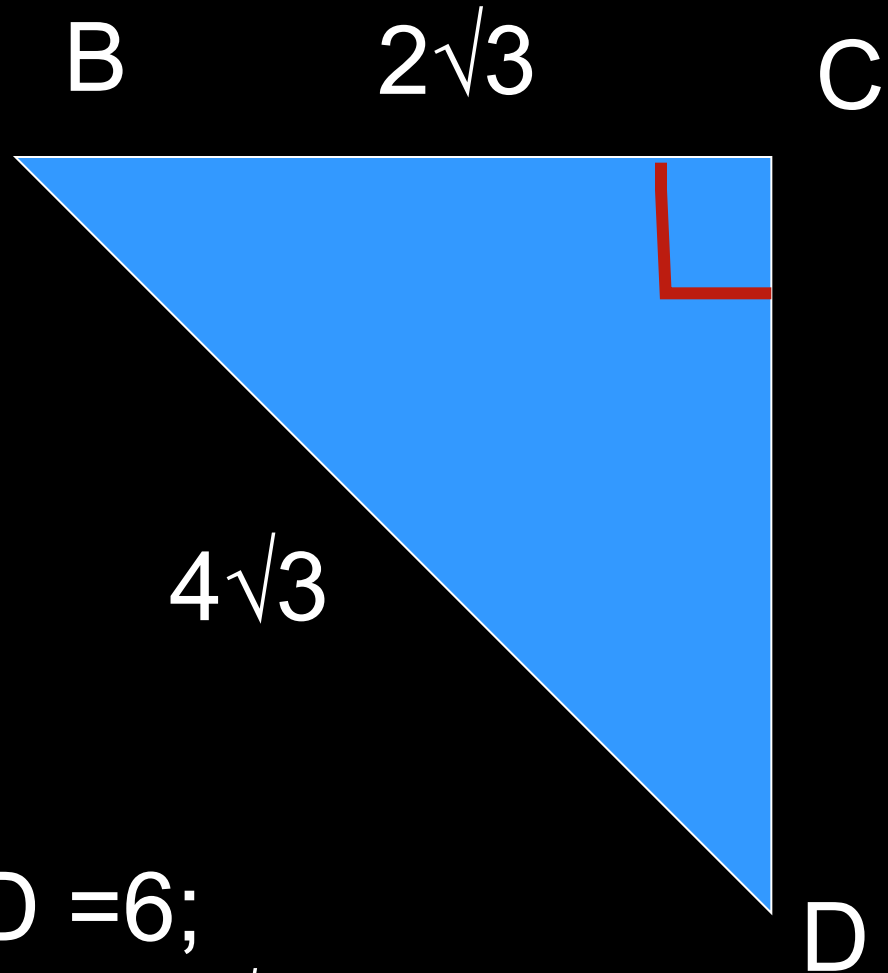
3) $\triangle BCD$; $\angle C =$

90° ,

$$CD^2 = BD^2 - BC^2;$$

$$CD^2 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 3;$$

$$CD^2 = 36; CD = 6$$



Ответ: $AB = CD = 6$;

$BC = AD = 2\sqrt{3}$.

f) ABCD — прямоугольник;

площадь ABCD равна 48 ;

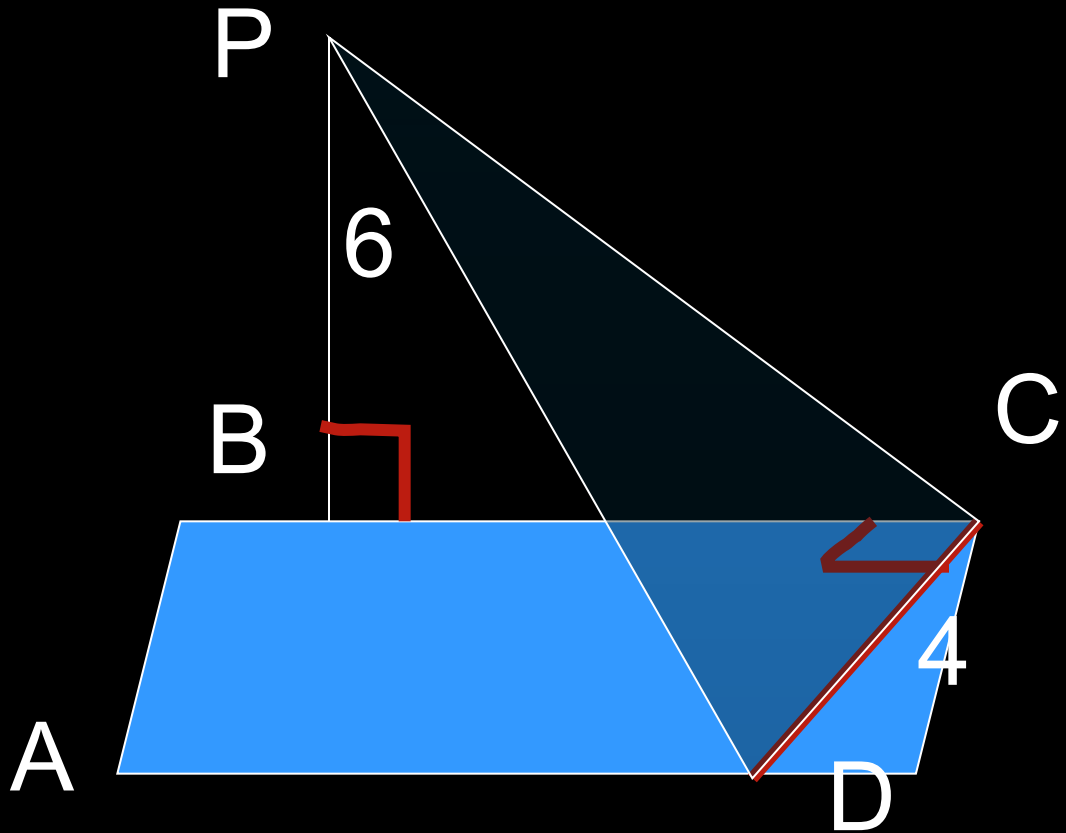
$(PB) \perp (ABC)$; $PB = 6$;

$DC = 4$;

Найти величину двугранного
угла с ребром DC.

$\angle PDCB -$

?



1)

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp CD \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

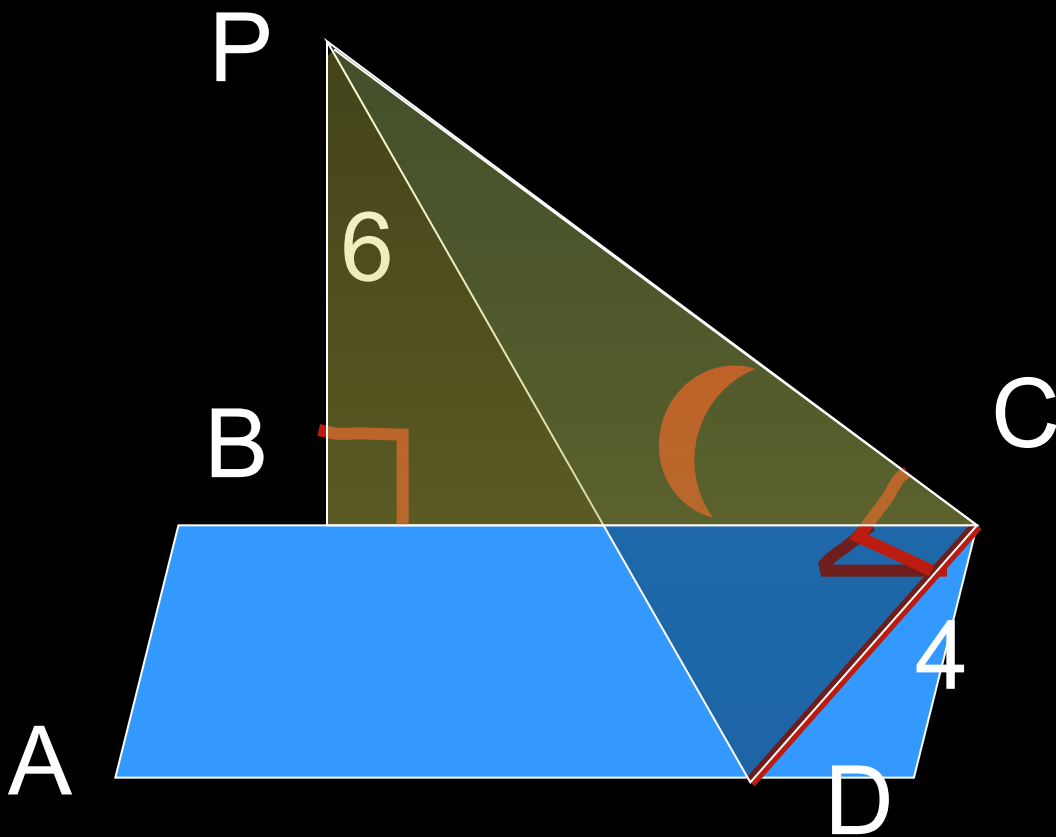
$$PC \perp CD$$

$$\begin{array}{l} S(ABCD)=48, \\ PB = 6, \\ CD = 4. \end{array}$$

Значит:

$$\angle PDCB =$$

$$\angle PCB$$

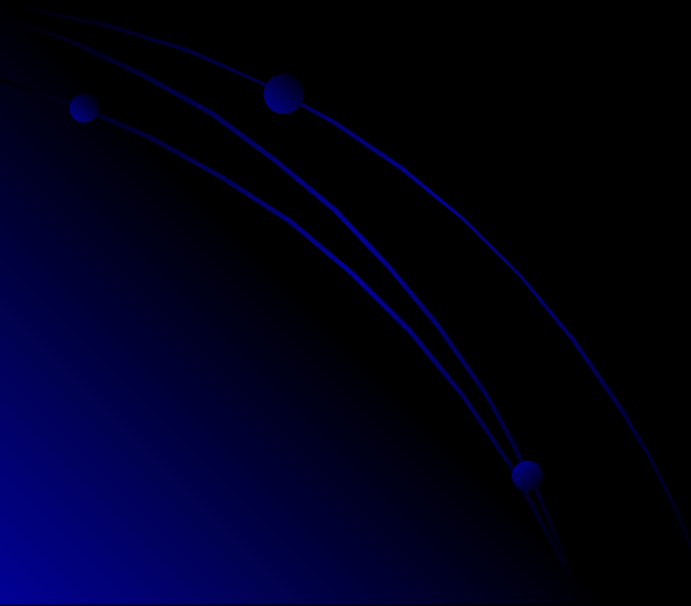


2) ABCD - прямоугольник

$$S(ABCD) = AB \cdot BC = 48,$$

$$AB = CD = 4,$$

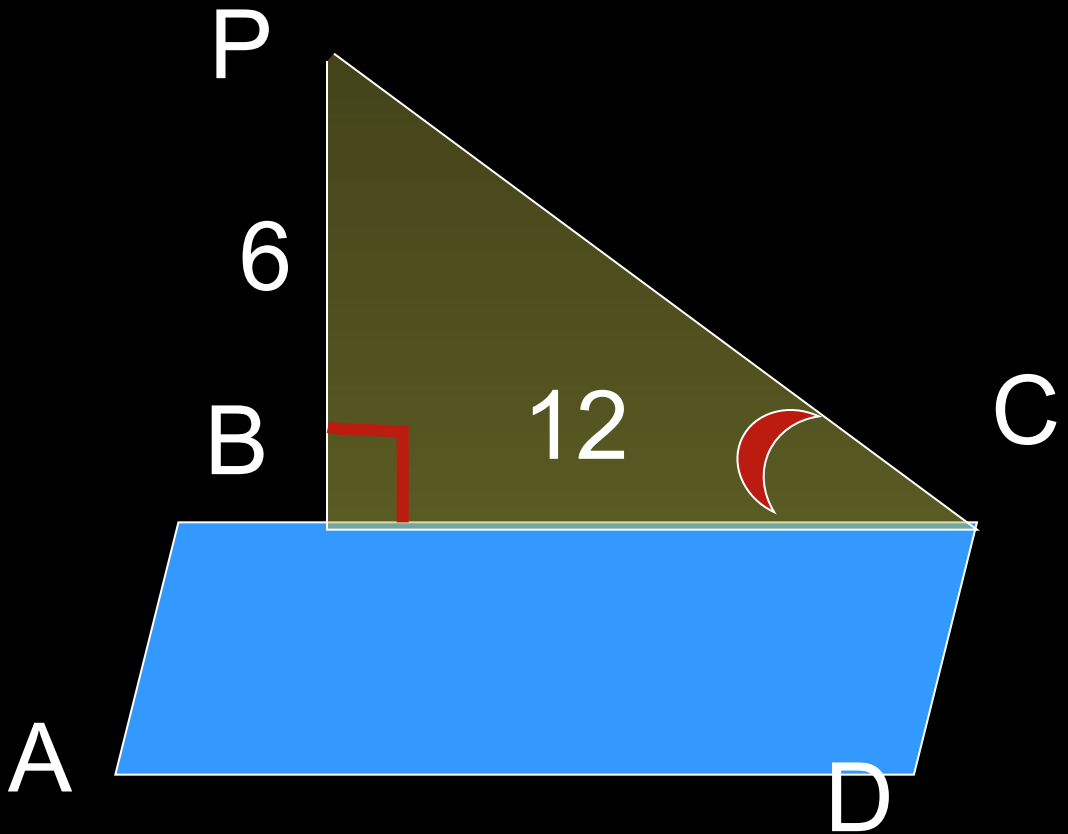
$$4 \cdot BC = 48, BC = 12.$$



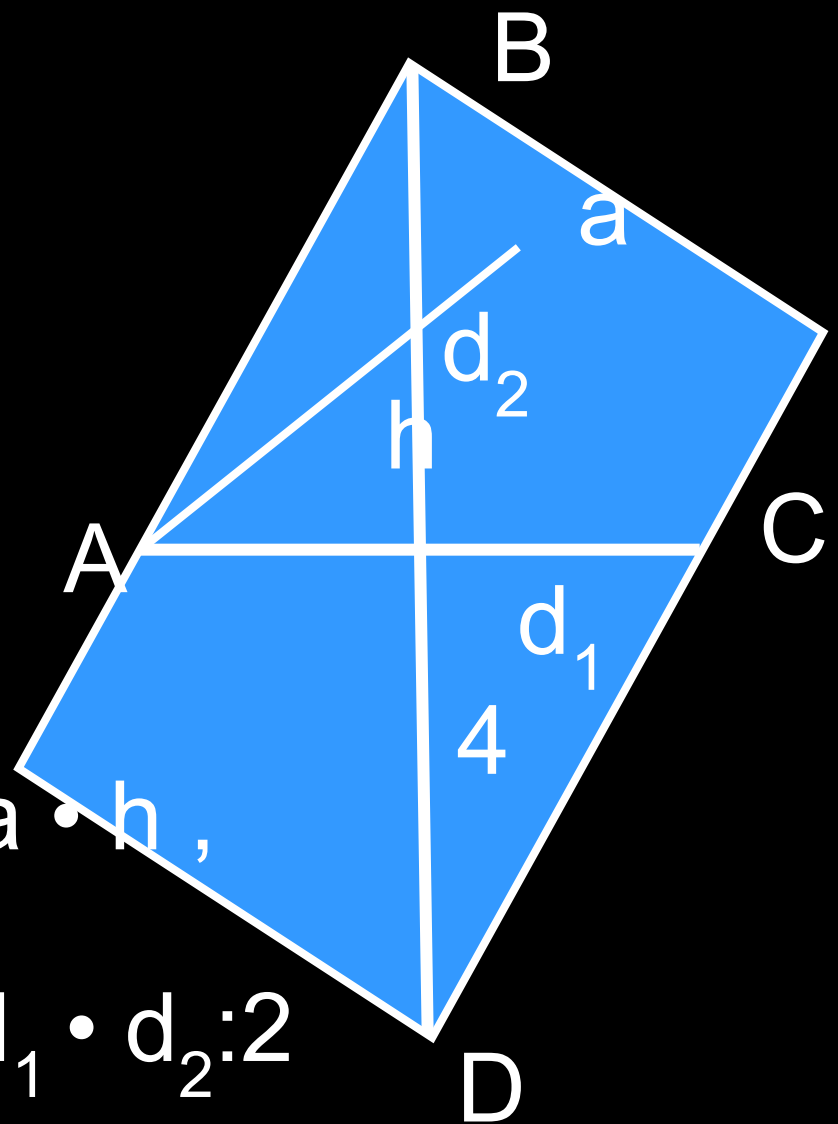
3) $\triangle PBC$; $\angle B = 90^\circ$,
 $\operatorname{tg} \angle C = PB/BC$,
 $\operatorname{tg} \angle C = 0,5$

Ответ:

$\angle PDCB = \operatorname{arctg} 0,5$



g) ABCD — ромб;
 $BD = 4$;
 $(PC) \perp (ABC)$; $PC = 8$;
Двугранный угол с
ребром BD равен 45° ;
Найти площадь ромба



$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h,$$

$$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp BD \\ PC \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

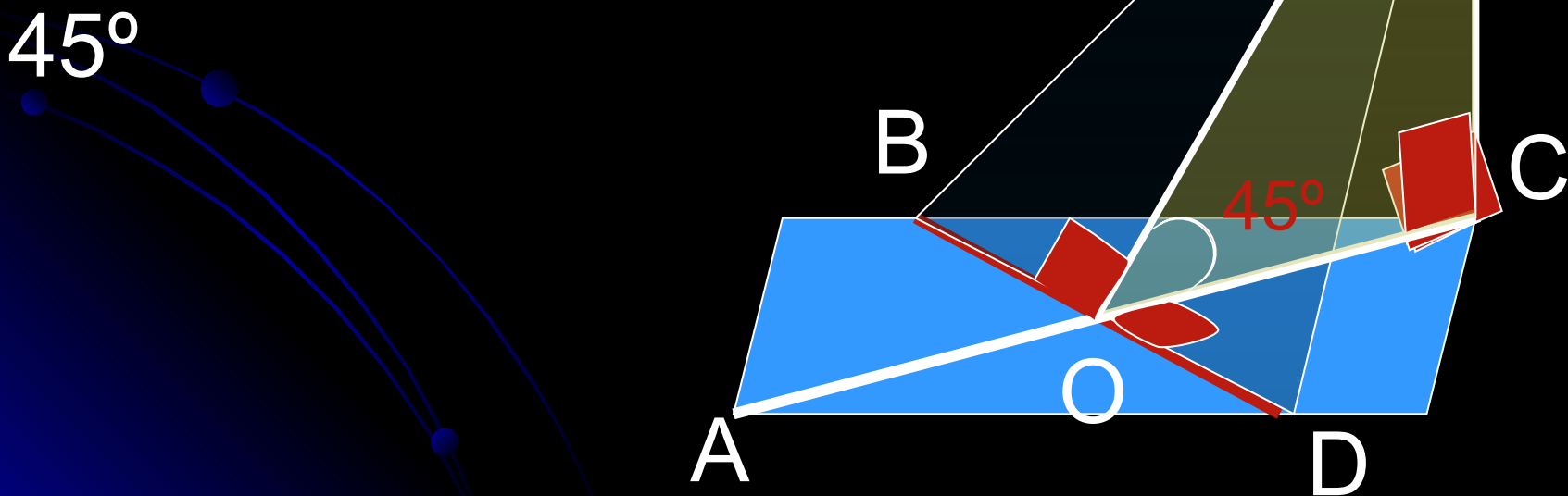
$(PC) \perp (ABC); PC = 8;$
Двугранный угол с
ребром BD равен $45^\circ;$

$$PO \perp CD$$

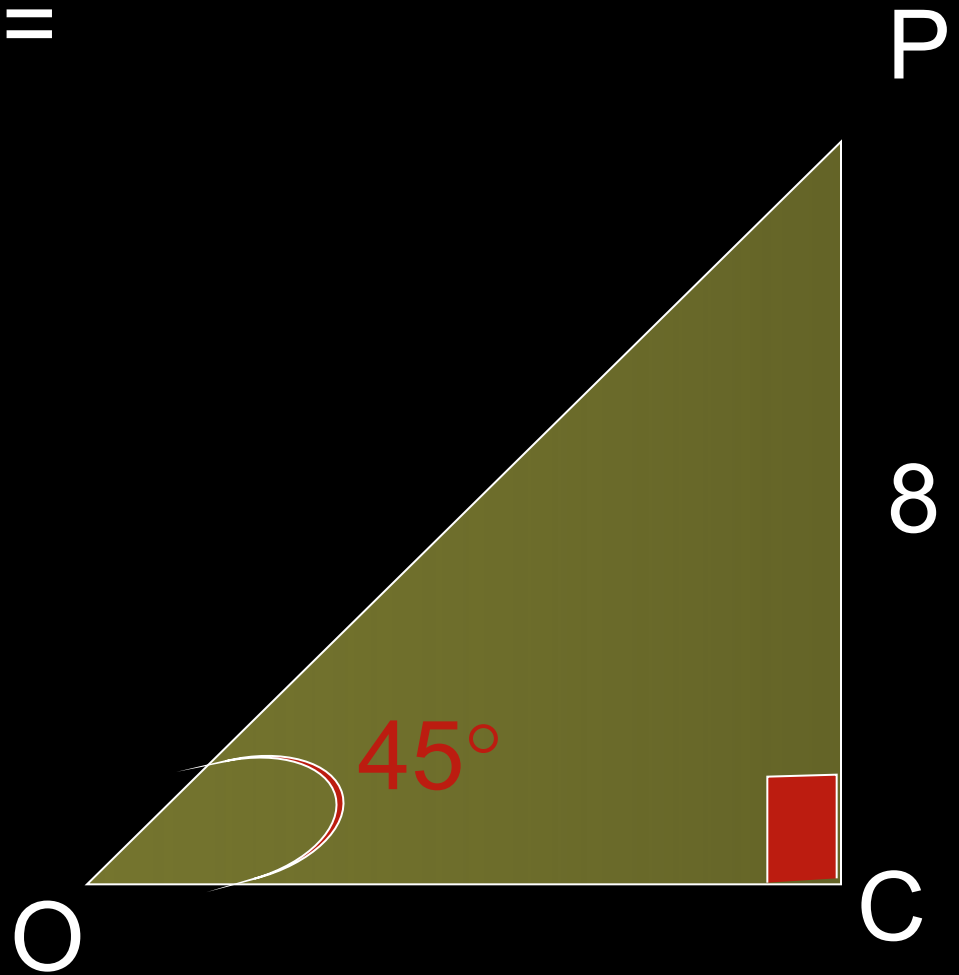
Значит:

$$\angle PBDC = \angle POC =$$

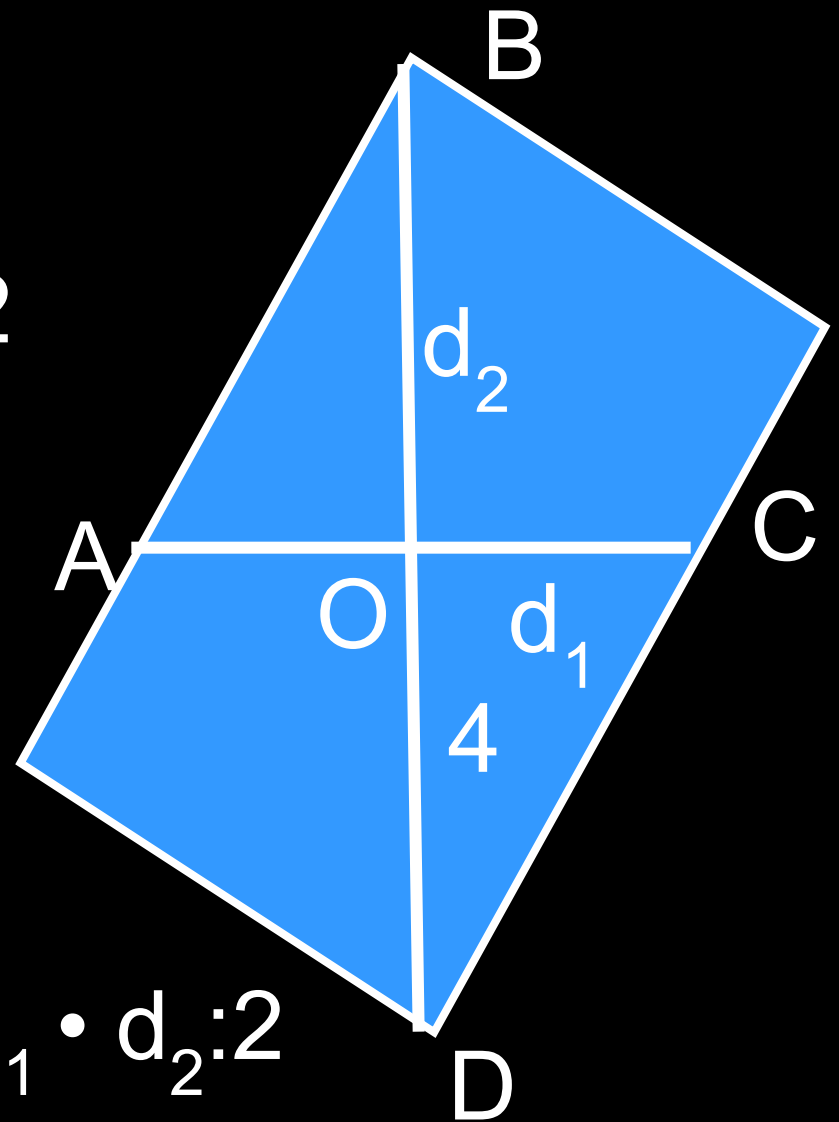
45°



3) $\triangle PCO$; $\angle C = 90^\circ$,
 $\angle O = 45^\circ \Rightarrow \angle P =$
 45° ,
 $OC = PC = 8$.



4) $d_1 = 2OC = 16,$
 $d_2 = 4,$
 $S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$
 $S = 32$



Ответ: 32

$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$

к) ABCD- параллелограмм;

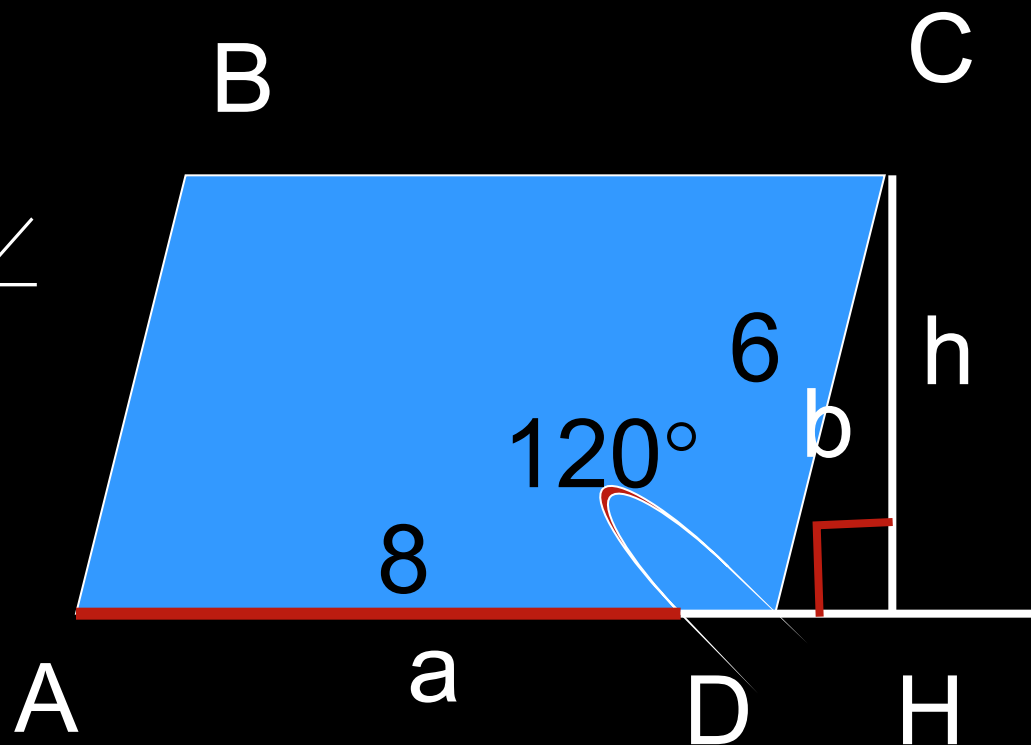
$\angle ADC = 120^\circ$; $AD = 8$;

$DC = 6$; $(PC) \perp (ABC)$;

$PC = 9$;

Найти величину двугранного
угла с ребром AD и
площадь ABCD .

$$S_{\text{парал-ма}}(a, b) = a \cdot b \cdot \sin \angle$$
$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$



$$1) S_{\text{парал-ма}} = a \cdot b \cdot \sin \angle$$

(a,b)

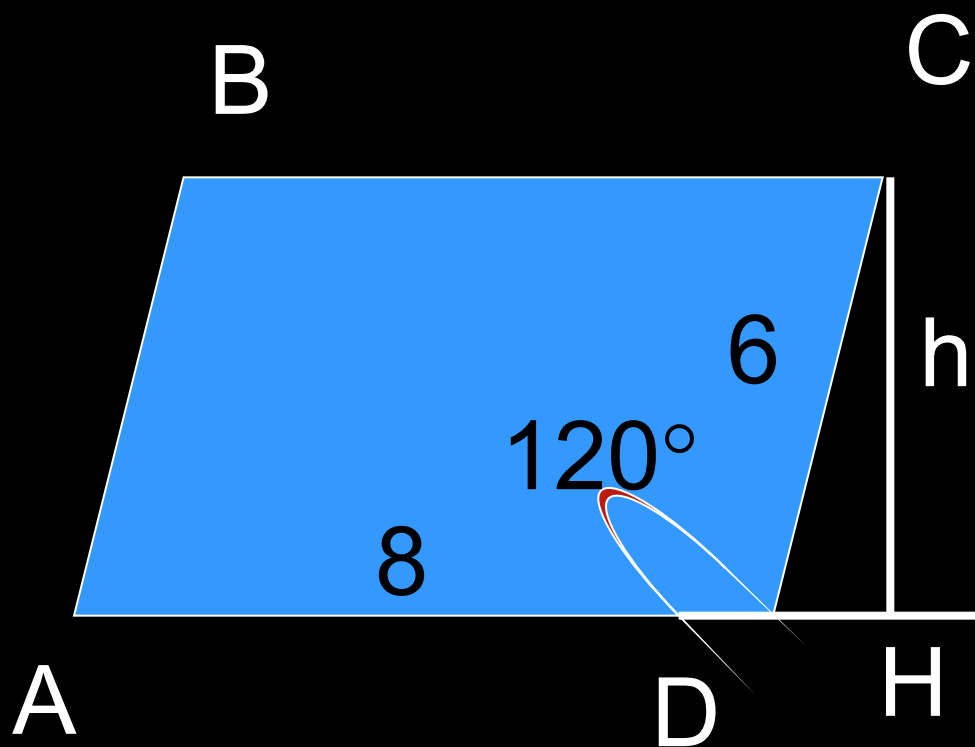
$$S(ABCD) = 8 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 24\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$

$$h = S_{\text{парал-ма}} / a$$

$$h = 24\sqrt{3} / 8$$

$$h = 3\sqrt{3}$$



2)

$(PC) \perp (ABC); PC = 9$;

Найти величину двугранного
угла с ребром AD

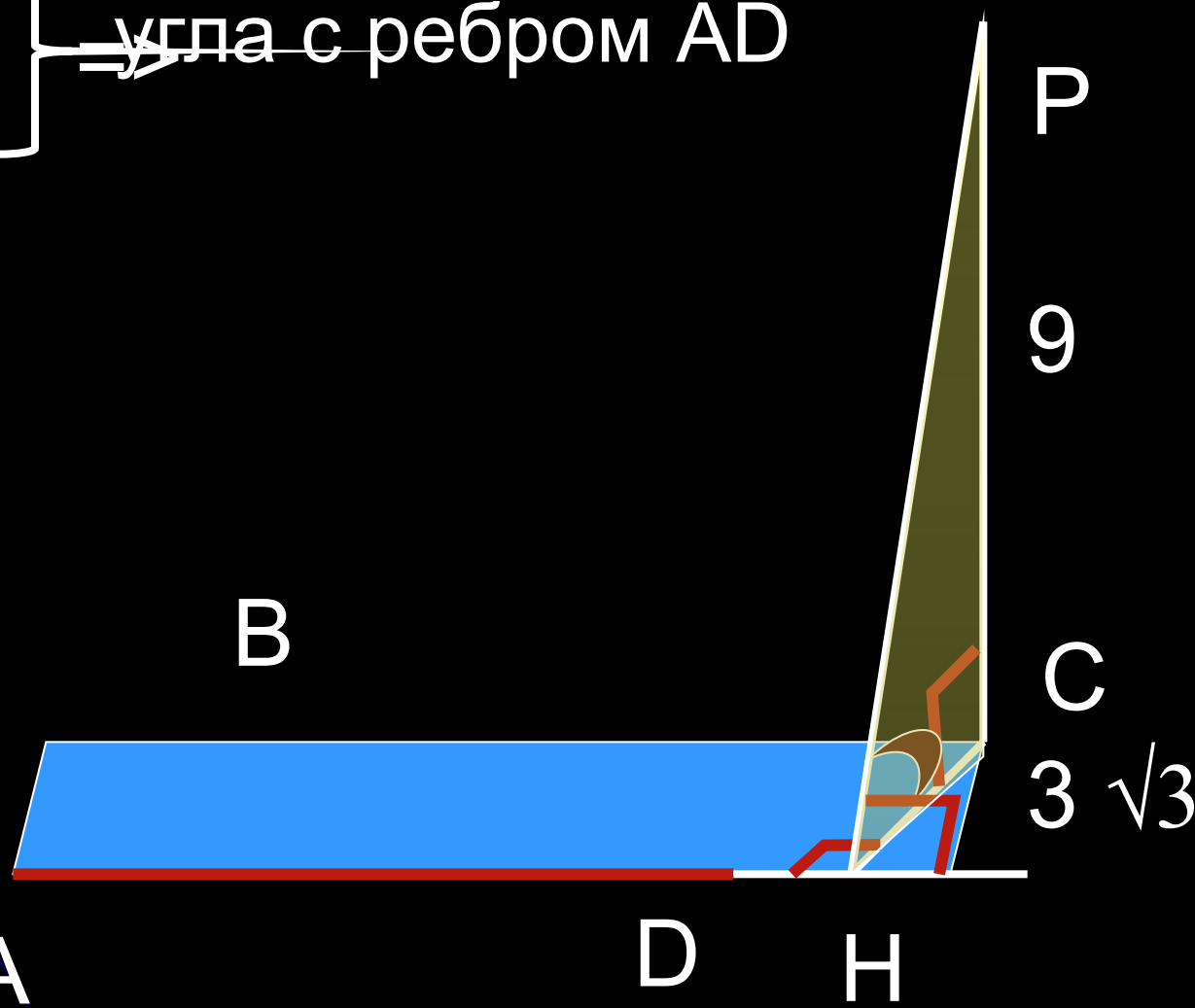
$CH \perp AD$
 $PC \perp ABC$

$PH \perp CD$

Значит:

$\angle PADC =$

$\angle PHC$



3) $\triangle PCH$; $\angle C = 90^\circ$,

$\operatorname{tg} \angle H = PC/HC$,

$\operatorname{tg} \angle H = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\angle H = 60^\circ$

Ответ:

$\angle PADC = 60^\circ$,

$S(ABCD) = 24\sqrt{3}$.

