МНОЖЕСТВА

План

1. Основные понятия теории множеств.
2. Способы задания множеств
3. Алгебра множеств – операции.
4. Геометрическая интерпретация множеств
5. Теорема о количестве подмножеств конечного множества.
6. Формула включений и исключений.

1. Основные понятия теории множеств.

Множество - начальное, неопределяемое понятие в математике. Под множеством понимается объединение отдельных объектов (элементов множества) в единое целое.

Множество - совокупность элементов произвольной природы, объединенных каким - либо способом.

Элементами множества мы будем называть объекты, которые образуют данное множество, и обладают некоторыми свойствами и находятся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Элементы множества сами могут являться некоторыми множествами. Например, одна книга из множества книг в шкафу может рассматриваться как множество страниц. Множества обозначают заглавными, а элементы множеств - строчными латинскими буквами.

Примеры множеств.

Классы (множества) чисел: N – натуральные числа, Z – целые числа, Q- рациональные числа, R- действительные (вещественные) числа, C – комплексные числа.

Студенты одной группы – множество, элементы которого- студенты, общее свойство – обучение одной специальности.

Если x – элемент множества X, то говорят: x принадлежит X и пишут : $x \in X$. Если x не принадлежит X, то пишут $x \notin X$.

Множество A, все элементы которого принадлежат множеству B, называется подмножеством (частью) множества B.

Множество A, все элементы которого принадлежат множеству B, называется подмножеством (частью) множества B.

Обозначается подмножество символами $\subseteq$ (нестрогое подмножество или нестрогое включение) $A \subseteq B$ и (строгое подмножество или строгое включение) A $\subset$ B (A включено в B).

Конечные и бесконечные множества

Множества могут быть ***конечными*** (содержащими конечное число элементов) и ***бесконечными*** (содержащими неограниченное число элементов), ***пустыми, универсальными***.

Конечные и бесконечные множества в свою очередь подразделяются на ***неупорядоченные и упорядоченные***; ***неупорядоченные бесконечные – на счетные и несчетные.***

Совершенно очевидно, что множество цифр в десятичной системе счисления конечно: A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}, а множество точек окружности бесконечно.

2.Способы задания множеств

1) Множество можно задать простым перечислением его элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Но этот способ не пригоден для задания бесконечных множеств и даже в случае конечных множеств часто практически нереализуем. Ведь не пересчитаешь количество рыб в Тихом океане, хотя совершенно очевидно, что их множество конечно.

2) Один из способов задания множества состоит в описании элементов определяющим (характеристическим) свойством:

Множество $X = \{x | P(x) \}$,

где $P(x)$ - предикат, описывающий элементы x множества X. $P(x)$ - например, есть множество животных с хоботом - множество слонов.

Примеры:

А – множество чисел, являющихся делителями числа 20: А = {1, 2, 4, 5, 10, 20}.

В – список группы: В = {Архипов, Белов,…}.

$\{x \mid P(x)\}$ и читается так: множество всех x таких, что x обладает свойством P(x).

$\{x \mid x \in R,\ x^2 - 4 = 0\}$ - это конечное множество и его можно задать перечислением элементов: {2, -2}.

$\{x \mid x \in R,\ 2 < x < 5\}$ – бесконечное несчетное множество, а именно, числовой промежуток (2, 5).

$\{x \mid x \in R,\ 1 = \sin x\}$ – бесконечное счетное множество.

$\{x \mid x \in R,\ x^2 + 9 = 0\}$ – это пустое множество, т.к. ни одно вещественное число не удовлетворяет данному уравнению.

Пустое и универсальное множества

Пустым называется такое множество, которое не содержит никаких элементов.

Обычно пустое множество обозначают символом: $\varnothing$

Универсальным называется множество, которое содержит все возможные элементы, встречающиеся в данной задаче (U).

Например: имеется группа студентов. А - множество юношей группы, В - множество отличников. В данной задаче универсальным является множество студентов группы, а множества А и В являются его подмножествами: $A \subset U$, $B \subset U$.

Мощность множества. Упорядоченные множества

Число элементов в конечном множестве М называется мощностью М и обозначается |М|.

Упорядоченным называется такое множество, в котором важны не только его элементы, но и порядок их следования в множестве. В таком множестве каждый элемент имеет свой порядковый номер. Обозначают упорядоченное множество, как правило, либо круглыми, либо треугольными скобками.

$A=\langle 1,2,3\rangle$, в более общем случае: $A=\langle a1,a2,..,an\rangle$, $n=1,n$

В=(а,в,с)

3. Алгебра множеств – операции.

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество, которое содержит все элементы, входящие либо в A, либо в B, либо в A и B одновременно.

A={a, b, m}; B={n, c, p}; $A \cup B$={a, b, c, m, n, p}

Например множество всех учеников в классе является суммой трех следующих множеств:

A - множества успевающих учеников,

B - множества девочек,

C - множества неуспевающих мальчиков.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество, содержащее только элементы, входящие в A и B одновременно.

A = {1, 2, ..., 59}; B = {2, 4, ..., 80}; $A \cap B$ = {2, 4, ..., 58}

Пересечением множеств A и B предыдущего примера будет множество успевающих девочек.

Разность A\B есть множество, содержащее все элементы A, не входящие в B.

A = {a, b, ..., p}; B = {a, b, ..., k}; A \ B = {l, m, n, o}

3. Алгебра множеств – операции.

Разностью A\B в нашем примере будет множество успевающих мальчиков.

Дополнение (**отрицание**) A есть множество U\A. Обозначается

или -A.

Читается “не A”

Дополнением множества B (множества девочек) будет множество мальчиков.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое AΔB и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат A\B или B\A.

Краткая запись: $A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A\}$.

4. Геометрическая интерпретация множеств

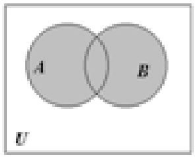


Рис. 1.

Определение. ***Объединением*** *множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В (рис. 1):*

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$

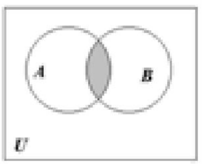


Рис. 2.

Определение. **Пересечением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В (рис. 2):

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$

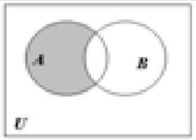


Рис. 3.

Определение. ***Разностью*** *множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис. 3):*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

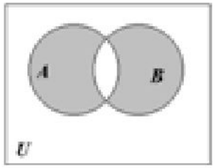


Рис. 4.

Определение. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B (рис. 4):*

$$A + B = \{x \mid \text{либо } x \in A, \text{ либо } x \in B\}.$$

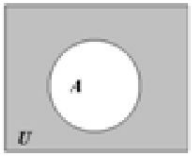


Рис. 5.

Определение. ***Абсолютным дополнением*** *множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству*

Приоритет операций в алгебре множеств.

1. отрицание А

2. $A \cap B$

3. $A \cup B$

4. $A \setminus B$

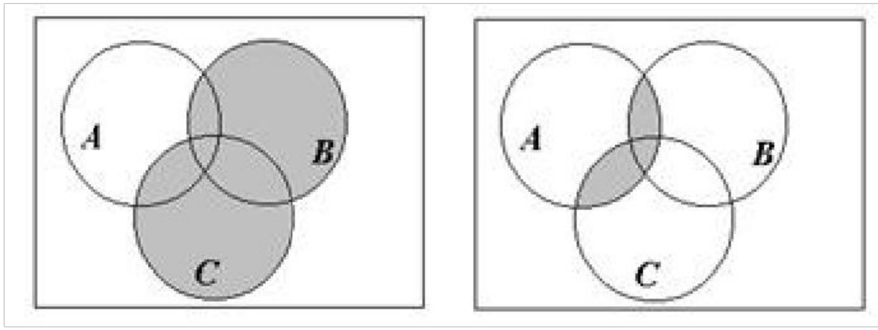
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Законы и тождества алгебры множеств.

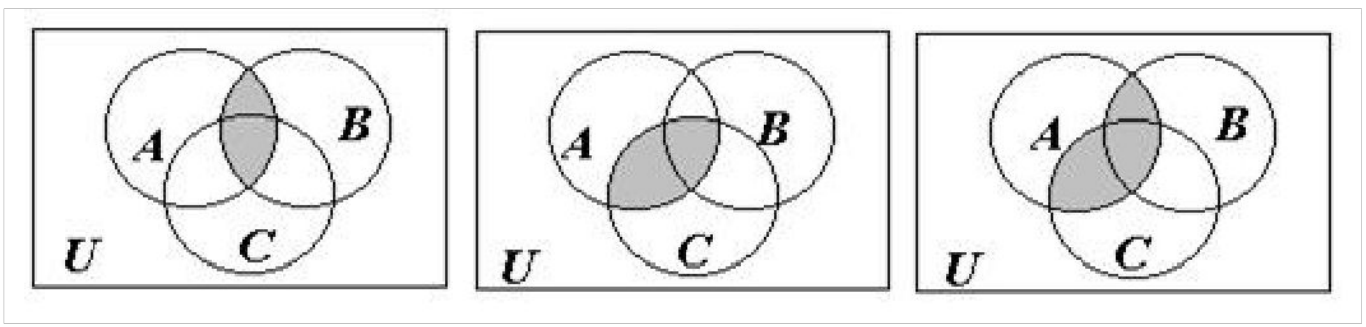
1. Коммутативность объединения $A\cup B=B\cup A$	1'. Коммутативность пересечения $A\cap B=B\cap A$
2. Ассоциативность объединения $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	2'. Ассоциативность пересечения $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A\cup\varnothing=A$ $A\cup\overline{A}=U$ $A\cup U=U$	4'. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A\cap U=A$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$ $A\cap\varnothing=\varnothing$

5. Закон идемпотентности объединения $A \cup A = A$	5'. Закон идемпотентности пересечения $A \cap A = A$
6. Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	6'. Закон де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7. Закон поглощения (элиминации) $A \cup (A \cap B) = A$	7'. Закон поглощения (элиминации) $A \cap (A \cup B) = A$
8. Закон склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$	8'. Закон склеивания $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$
9. Закон Порецкого $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	9'. Закон Порецкого $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
10. Закон двойного дополнения (закон противоречия, закон двойного отрицания) $\overline{\overline{A}} = A$ $\neg\neg A \to A$	

Пример 5. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (рис. 6).



$B \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$ $\qquad$ $A \cap C$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.Теорема о количестве подмножеств конечного множества.

Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3\}$, где $|A| = 3$, и множество $B = \{5, 6, 7, 8\}$, где $|B| = 4$.

Составим всевозможные подмножества множества A:

$A, \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Всего получили 8 подмножеств.

Составим всевозможные подмножества множества B:

$B, \varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}, \{5,6,7\}, \{5,7,8\}, \{6,7,8\}, \{5,6,8\}$.

Получили 16 подмножеств.

Теорема: Если для конечного множества A его мощность равна m, то количество всех подмножеств данного множества, обозначаемое $P(A)$, равно 2^m.

Пример: Вычислить количество подмножеств множества М – делителей числа 20.

Составим множество М и найдем его мощность:

$M = \{1,2,4,5,10,20\}$. Мощность $|M| = 6$, тогда количество подмножеств равно $P(M) = 2^6 = 64$.

6.Формула включений и исключений.

Пример: В группе 30 студентов, 16 из них занимаются музыкой, 17 увлекаются теннисом, а 10 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в группе студенты, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?

Решение: Если сложить число студентов, интересующихся музыкой, с числом студентов, занимающихся теннисом, т. е. 16+17=33, то студенты, интересующиеся и музыкой, и теннисом, окажутся учтенными дважды. Поэтому, чтобы определить число студентов, интересующихся музыкой или теннисом, нужно из суммы 16+17 вычесть число студентов, учтенных дважды, т. е. тех, кто интересуется и музыкой, и теннисом. По условию их 10. Таким образом, число интересующихся теннисом или музыкой равно: 16+17—10=23 студента. А так как в классе всего 30 студентов, то 30—23 =7 студентов равнодушны и к музыке, и к теннису.

Задача решена по следующему алгоритму: пусть имеется два конечных множества А и В. Тогда:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

В нашем случае А — множество студентов, интересующихся музыкой, и $n(A) = 16$, *В*—множество студентов, интересующихся теннисом, и $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 10$, и тогда по полученной формуле $n(AUB)=16+17-10=23$.

Усложним задачу: пусть к тем, кто интересуется в классе музыкой — множеству A, и к тем, кто увлекается теннисом — множеству *B,* добавляются еще и те, кто интересуется театром— множество C. Сколько студентов увлекается или музыкой, или теннисом, или театром, т. е. чему равно число $n\{A \cup B \cup C)$?

Если множества А, B и С пересекаются лишь попарно, Т. е. $A\cap B\cap C=\varnothing$, то подсчет можно вести, как и прежде: сначала сложить $n(A)+n(B)+n(C)$, а затем вычесть число тех элементов, которые подсчитаны дважды, т.е. вычесть число $n\{A\cap B\}+n(A\cap C)+n(B\cap C)$. Если же множество $A\cap B\cap C\neq\varnothing$,, то его элементы оказались неучтенными: сначала их трижды учли, когда складывали $n(A\}+n\ (B)+n(C)$, а затем трижды отнимали их, вычитая $n\{A\cap B\}+n(A\cap C)+n(B\cap C)$. Таким образом, число $n(A)+n(B)+n(C)-(n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C))$ меньше истинного результата ровно на число элементов в пересечении множеств $A\cap B\cap C$, которое и следует добавить для получения верного результата:

$$n(A)+n(B)+n(C\ )-\ (n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C))+n(A\cap B\cap C)\ (2)$$

Аналогичная формула может быть получена для любого числа множеств.

В формулах (1) и (2) подсчитывается, сколько раз каждый элемент включается и исключается, поэтому их называют **формулами включений и исключений.**

Примеры решения задач

Пример1: На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Решение. Пусть U — множество всех абитуриентов, A —. множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию $n(U) = 1000$, $n(A) = 800$, $n(B)=700$, $n(C)=600$, $n(A\cap B)= 600$, $n(A\cap C) = 500$, $n(B\cap C) = 400$, $n(A\cap B\cap C) = 300$. В множество $A\cap B\cap C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле (2) имеем:

$$n(A \cup B \cup C) = 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900.$$

Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили

$$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 1000 - 900 = 100 \text{ (абитуриентов)}.$$

Социологи опросили 45 учащихся девятых классов, среди которых 25 юношей. При этом выяснилось: 30 человек имеют за полугодие оценки 4 и 5, из них 16 юношей, спортом занимаются 28 учеников, среди них 18 юношей, и 17 учеников, успевающих только на хорошо и отлично, 15 юношей учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом. Первый математик класса взглянул на результаты и заявил, что там есть ошибки. Как это ему удалось выяснить?

<u>Решение:</u> Обозначим через A множество юношей, B — множество успевающих на 4 и 5, C — множество спортсменов. По условию задачи $n(A)=25$, $n(B)=30$, $n(C)=28$, $n(A \cap B)=16$, $n(A \cap C)=18$, $n(B \cap C)=17$, $n(A \cap B \cap C)=15$. Найдем общее число учащихся, которые или являются юношами, или занимаются спортом, или успевают на 4 и 5. По формуле (2) получаем:

$n\ (A\ UBUC)=25+30+28-\ 16-\ 18-\ 17+15=47$. Этого быть не может, так как обследовалось всего 45 учеников! Следовательно, в данных сведениях есть ошибки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Опишите множество M точек на плоскости: а) $\{M|\ OM = R\}$;
   б) $\{M|\ OM \le R\}$; в) $\{M|\ AM = MB\}$.
2. Доказать с помощью диаграмм Эйлера – Венна справедливость закона поглощения.
3. В отделе института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык, причем: 6 знают немецкий, 6 – английский, 7 – французский, 4 – английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 – все три языка. Сколько всего человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский?
4. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 – не посещают кружки. Сколько учеников посещают математический и физический кружки одновременно, сколько – только математический?