

**Решение квадратных
уравнений содержащих
параметры в 9 классе.**

- При решении задач с параметрами приходится всё время производить несложные, но последовательные рассуждения, составлять для себя логическую схему решаемой задачи. Поэтому такие задачи – незаменимое средство для тренировки логического мышления. Их решение позволяет намного лучше понять обычные, без параметров, задачи. А привычка к математическим рассуждениям очень полезна при изучении высшей математики и использовании полученных знаний впоследствии.

● Для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

выделяем три случая:

1. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то действительных решений у квадратного уравнения нет.

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то решение квадратного уравнения принимает вид $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня и для этих корней x_1, x_2 справедливо соотношение

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- 1. Важную роль при решении задач с параметром для квадратных уравнений играет *теорема Виета*. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где x_1, x_2 - корни уравнения (случай $D \geq 0$), выполнено равенство

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Отсюда вывод теоремы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- 2. Второе важное замечание состоит в том, что при решении задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений, нужно помнить о геометрической интерпретации квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = a(x - x_B)^2 + y_B$, где $(x_B; y_B)$ – координаты вершины параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, причем абсцисса вершины параболы является точкой минимума. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, причем абсцисса вершины параболы является точкой максимума.

● **Пример 1.** (ЕГЭ, 2005, В₆). При каких значениях a функция $y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x = 4$?

Решение. Исходную функцию представим в виде

$$y = 2^{-x^2+ax+7}.$$

Поскольку $2 > 1$, то данная функция монотонно возрастает и максимум данная функция достигает в той точке, что и у квадратичной функции

$f(x) = -x^2 + ax + 7$. У этой параболы ветви направлены вниз, следовательно, максимум достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_{\text{в}} = \frac{a}{2}$. Согласно условию $x_{\text{в}} = 4$, следовательно $a = 8$. **Ответ: $a = 8$.**

● **Пример 2.** Решите уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Решение. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент перед x^2 обращается в нуль и уравнение становится линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по разным алгоритмам.

Итак нам надо рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

- Пусть $a = 1$, тогда уравнение принимает вид:
 $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это уравнение, получаем: $x = -\frac{7}{6}$.

Частичный ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$.

- Пусть $a \neq 1$. Мы имеем квадратное уравнение $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0$.

Найдем его дискриминант: $D = (2(2a + 1))^2 - 4(a - 1)(4a + 3) = 20a + 16$.

Итак, $D = 20a + 16$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня.

Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам предстоит теперь рассмотреть.

● Пусть $a < -\frac{4}{5}$, тогда дискриминант меньше нуля и квадратное уравнение не имеет корней.

Частичный ответ: при $a < -\frac{4}{5}$, корней нет.

Пусть $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним $a \neq 1$). В этом случае дискриминант больше нуля и квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдем по формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Частичный ответ: при $a > -\frac{4}{5}$ ($a \neq 1$) $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

● Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$.

Используя формулу корней квадратного уравнения, получаем $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

Частичный ответ: при $a = -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

если $a > -\frac{4}{5}$ ($a \neq 1$), то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$; если

$a < -\frac{4}{5}$, корней нет.

● **Пример 3.** При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ меньше 1?

Решение.

Если $a = 0$, то уравнение примет вид $2x - 2 = 0$.
Корень этого уравнения будет $x = -1$. Этот корень удовлетворяет условию $x < 1$.

Частичный ответ: при $a = 0$, $x = -1$.

● Если $a \neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=2ax^2-2x-3a-2$ является парабола с ветвями вверх, если $2a > 0$, и ветвями вниз, если $2a < 0$. Поскольку корни этого уравнения, по условию, должны быть меньше 1, то парабола на координатной плоскости должна располагаться как показано на рис. 1 (для $2a > 0$) или на рис. 2 (для $2a < 0$).

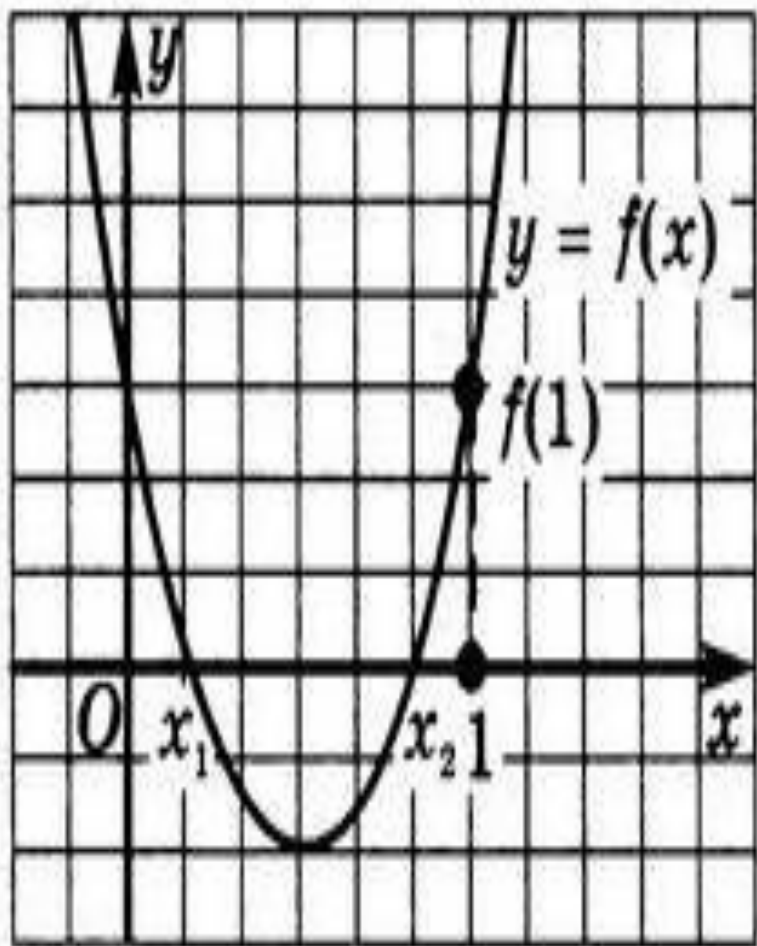


Рис. 1

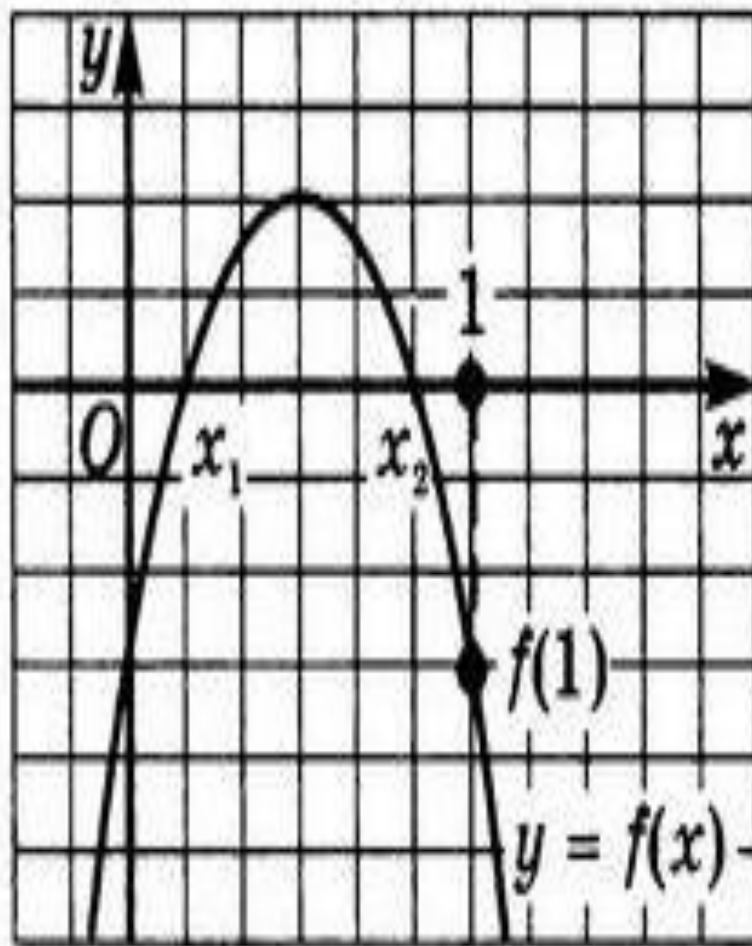


Рис. 2

● Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рис.1. Во-первых, напомним, при $2a > 0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью Ox (в крайнем случае касается её), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит дискриминант не отрицателен. В-третьих, в точке $x=1$ имеем $f(1) > 0$. В четвертых, $x_B < 1$.

- Итак получаем систему неравенств – аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис.1.

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ D \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ x_B < 1. \end{cases}$$

● Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств – аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 2:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ D \geq 0, \\ f(1) < 0, \\ x_B < 1. \end{cases}$$

● Решим первую систему неравенств.

Найдем дискриминант. $D=4-4\cdot 2a\cdot(-3a-2)=24a^2+16a+4$.

Найдем $f(1)$. $f(1)=2a\cdot 1^2-2\cdot 1-3a-2=-a-4$.

Найдем x_B , $x_B=\frac{2}{4a}$. Так как $x_B < 1$, получаем: $a < 0$ и
 $a > 0,5$

Таким образом, первая система неравенств имеет следующий

$$\text{ВИД: } \begin{cases} 2a > 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geq 0, \\ -a - 4 > 0, \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > 0,5 \end{cases} \end{cases}$$

- Эта система не имеет решений, поскольку из первого её неравенства получаем $a > 0$, а из третьего получаем $a < -4$, что не может одновременно выполняться ни при каких значениях a .

Вторая система неравенств имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a < 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geq 0, \\ -a - 4 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 0,5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Сразу обратим внимание на то, что квадратный трехчлен $24a^2 + 16a + 4$ имеет отрицательный дискриминант ($D=16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$) и положительный старший коэффициент. Значит при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2 + 16a + 4 > 0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем:
$$\begin{cases} a < 0, \\ a > -4, \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 0,5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Решением данной системы является $-4 < a < 0$.

Итак, мы нашли все интересующие нас значения параметра a : $a=0$; $-4 < a < 0$.


Ответ: $-4 < a \leq 0$

● **Пример 4.** Какие значения может принимать сумма квадратов действительных, различных корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 - 2 - 12 = 0$?

Решение. Квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, когда дискриминант больше нуля. Решим неравенство $D > 0$. $(2a)^2 - 4 \cdot (2a^2 - 2 - 12) > 0$, получаем $a \in (-3; 4)$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2a$; $x_1 \cdot x_2 = 2a^2 - a - 12$.

Следовательно, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2a + 24$. Т.к. $a \in (-3; 4)$, то $2a + 24 \in (18; 32)$. **Ответ:** $(18; 32)$.



Вывод: основой для усвоения материала является здравый смысл ученика, а не только и не столько его предварительные знания.

Спасибо за внимание.