Кривые второго порядка

- Общее уравнение кривой второго порядка
- Окружность
- Эллипс
- Гипербола
- Парабола

Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: ***эллипс***, частным случаем которого является ***окружность***, ***гипербола*** и ***парабола***.

Они задаются уравнением второй степени относительно x и y:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

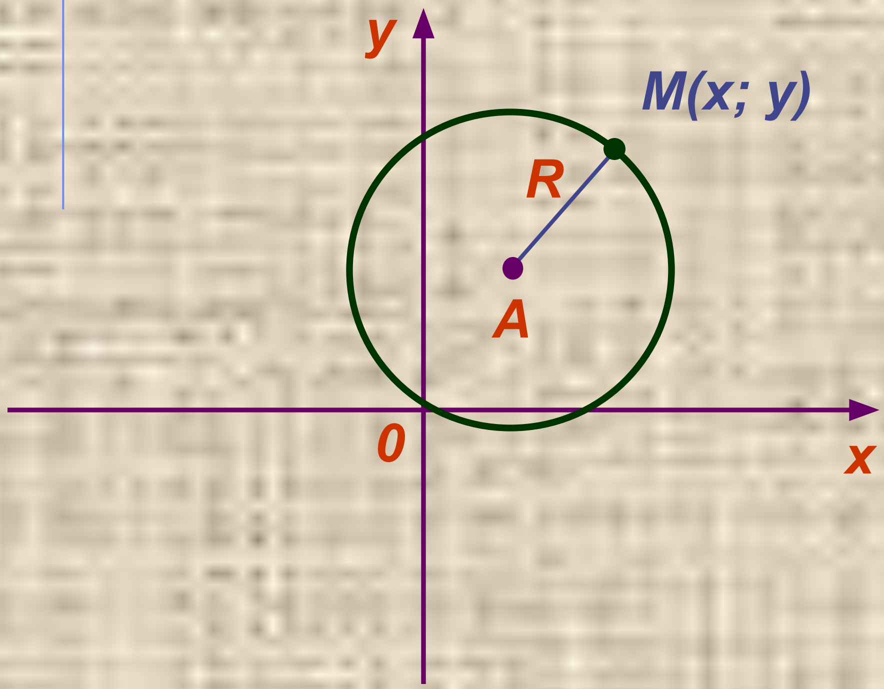
Общее уравнение кривой второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от точки ***A(a; b)*** на расстояние ***R***.

Для любой точки ***M*** справедливо:



$$\left|\overline{AM}\right| = R \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \quad \Rightarrow$$

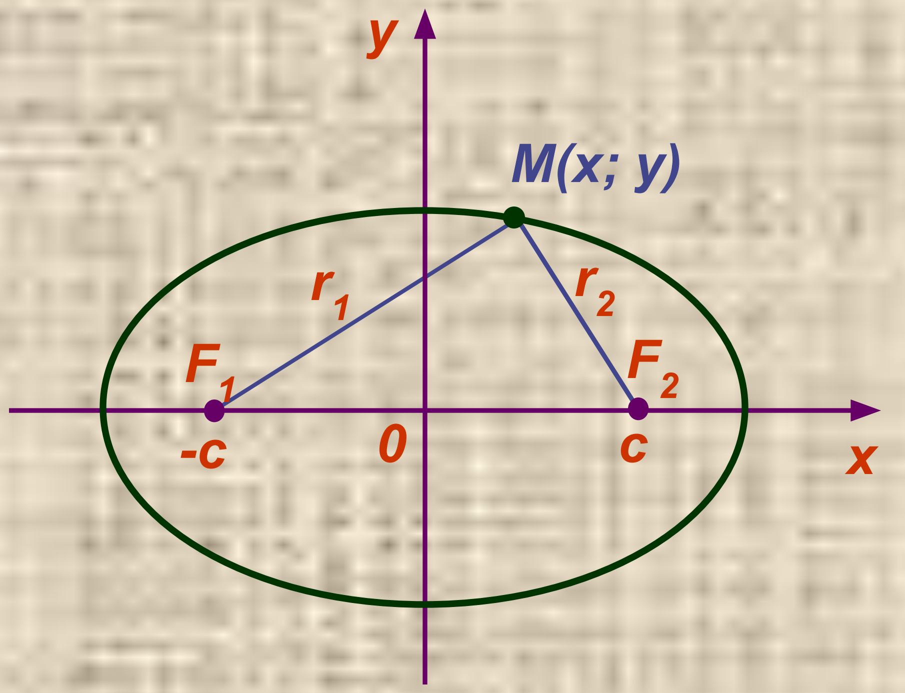
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Каноническое уравнение окружности

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная **2a.**

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1 F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c;0); \quad F_2(c;0)$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2} \quad \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}-\cancel{x^2}-2xc-\cancel{c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2 \quad :4 \quad \Rightarrow$$

$$a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2=a^4-\cancel{2a^2xc}+x^2c^2 \quad \Rightarrow$$

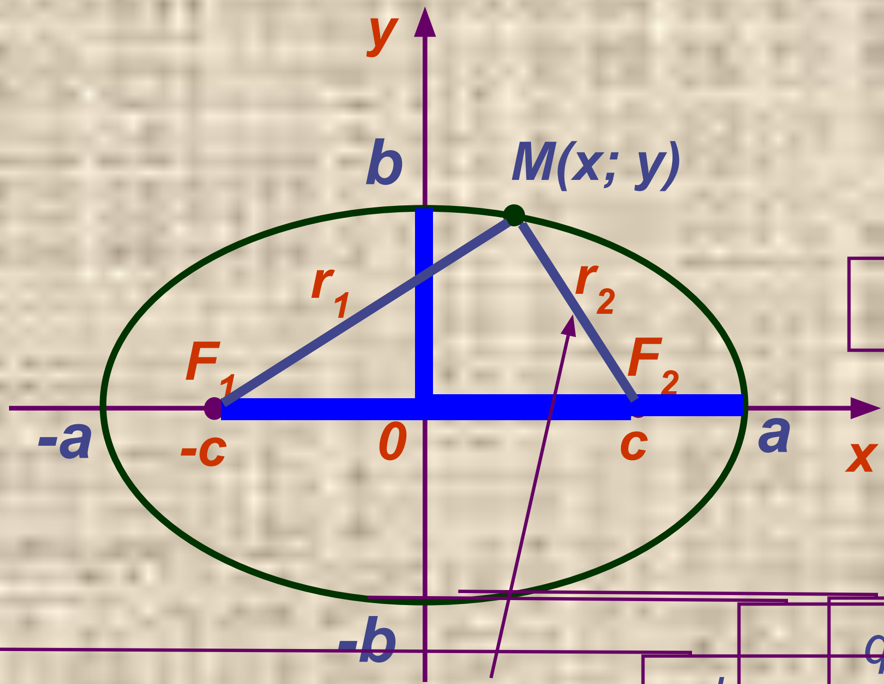
$$\boxed{b^2}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad :(a^2b^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Каноническое уравнение эллипса

Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

малая полуось

$$|F_1F_2| = 2c$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

большая полуось

фокальное расстояние

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

фокальные радиусы точки М

$$r_1 = a + \varepsilon x; \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

эксцентриситет эллипса

Эксцентриситет характеризует форму эллипса (ε = 0 – окружность)

Для эллипса справедливы следующие неравенства:

$$a > c; \quad a > b; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Пример

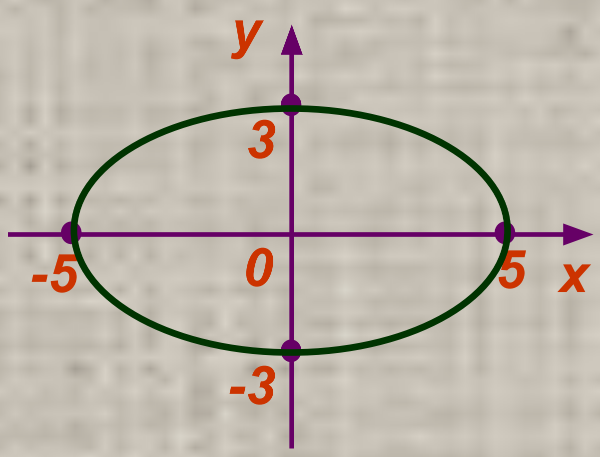
Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4;\ 0)$ $F_2(4;\ 0)$, а эксцентриситет равен 0,8.

$$c = 4 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad b = 3$$

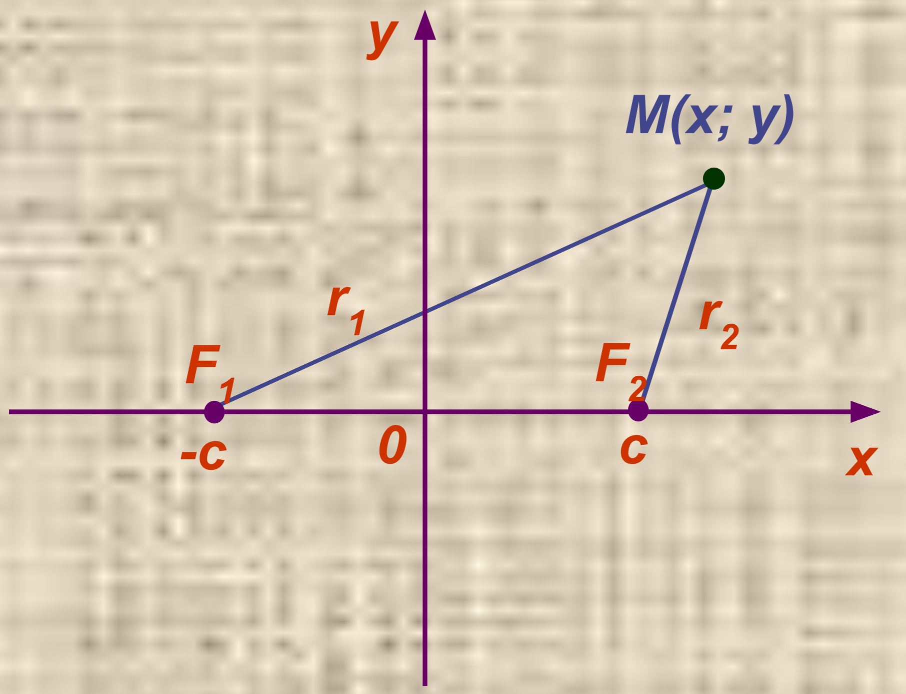
Каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$



Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная **2a.**



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \quad :(a^2b^2)$$

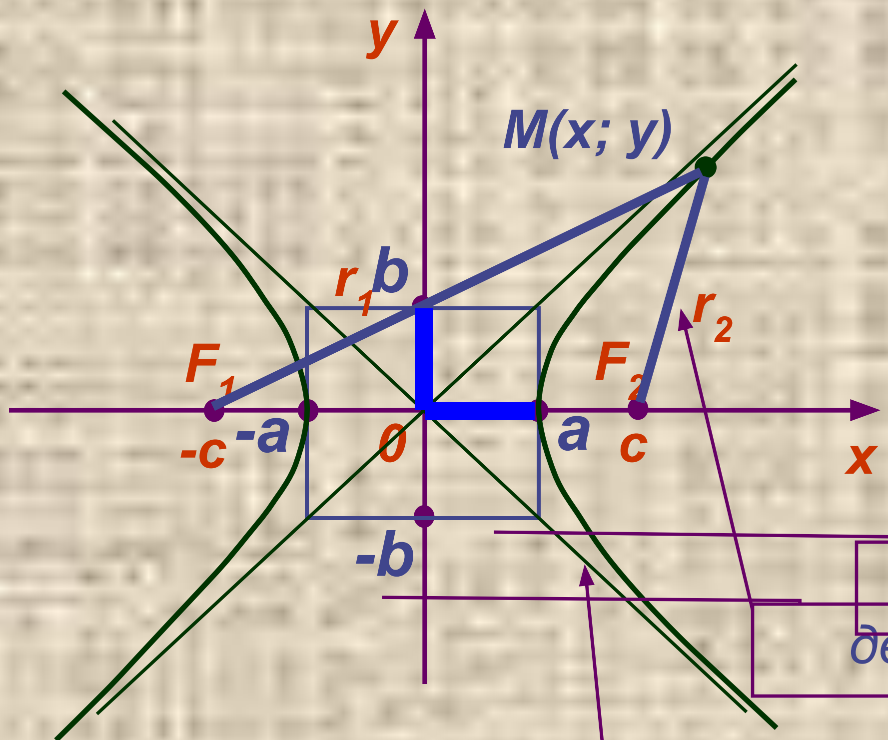
b^2

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Каноническое уравнение гиперболы

Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

мнимая полуось

действительная полуось

фокальные радиусы точки М

асимптоты гиперболы

Для гиперболы справедливо: $\varepsilon > 1$

эксцентриситет гиперболы

Пример

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку A(6; -4), если ее асимптоты заданы уравнениями:

$$y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 3b = \sqrt{6}a$$

Точка A лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$

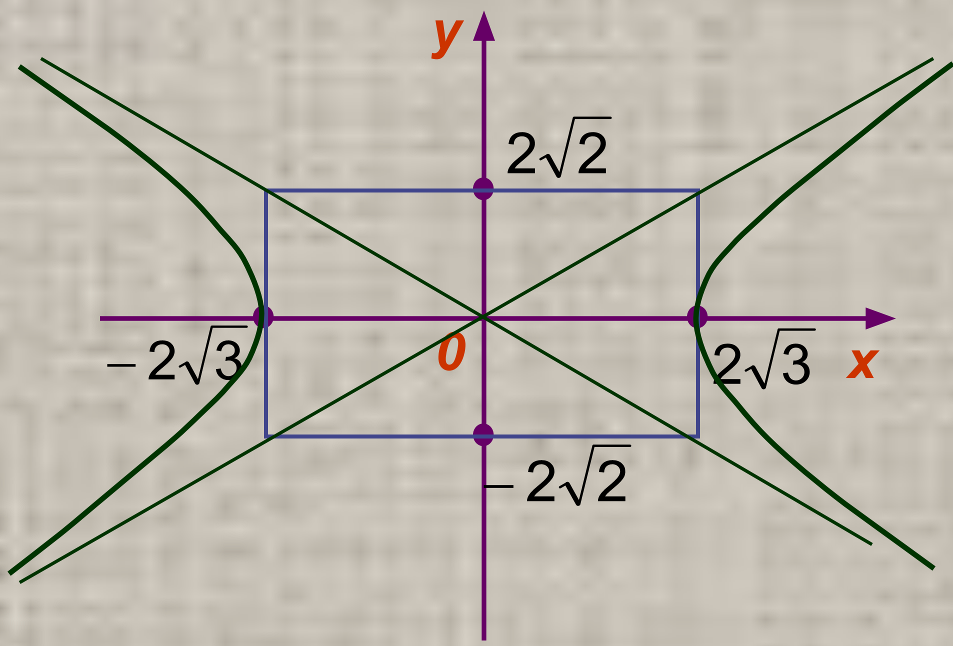
$$\Rightarrow 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2$$

Решим систему: $\begin{cases} 3b = \sqrt{6}a \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 24a^2 - 16a^2 = \frac{2}{3}a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

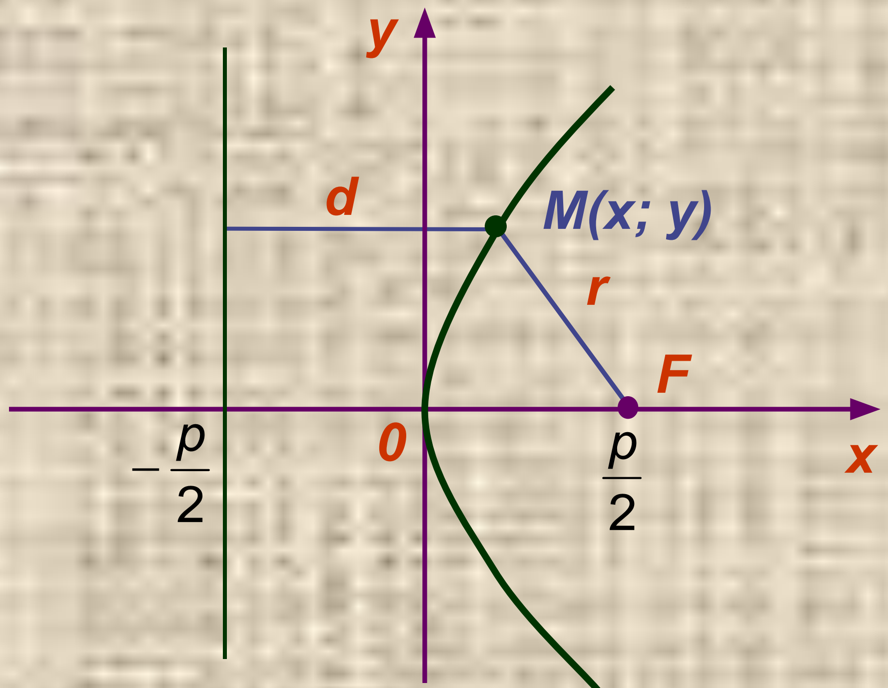
Пример

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$



Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки той же плоскости $F(\frac{p}{2};0)$ называемой ***фокусом***, равно расстоянию до прямой: $x = -\frac{p}{2}$



$$r = d \qquad F(\frac{p}{2}; 0) \qquad p > 0$$

$$r = \left|\overline{FM}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

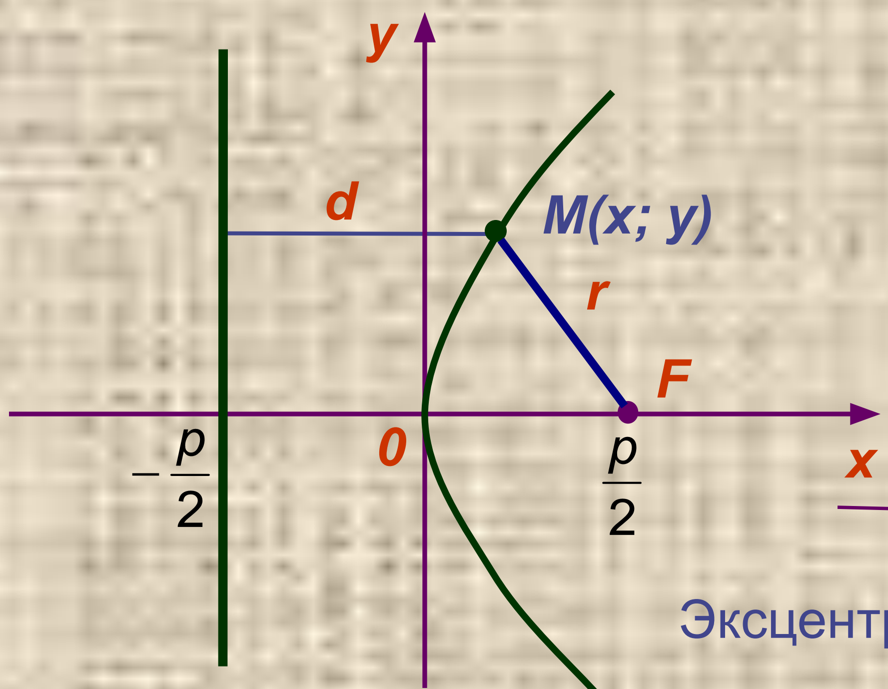
$$d = x + \frac{p}{2}$$

Парабола

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \Rightarrow$$

каноническое уравнение параболы

$$\cancel{x^2}-px+\cancel{\frac{p^2}{4}}+y^2=\cancel{x^2}+px+\cancel{\frac{p^2}{4}} \Rightarrow \boxed{y^2=2px}$$



директриса параболы

$$r=x+\frac{p}{2}$$

фокальный радиус

фокус параболы

Эксцентриситет параболы: $\varepsilon = 1$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Составим из коэффициентов уравнения два определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Дискриминант уравнения

Дискриминант старших членов уравнения

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	*Эллипс*	*Точка*
$\delta < 0$	*Гипербола*	*Пара пересекающихся прямых*
$\delta = 0$	*Парабола*	*Пара параллельных прямых*

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Общее уравнение кривой называется пяти-членным, если $2Bxy=0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Приведение пяти-членного уравнения к каноническому виду рассмотрим на примере:

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(16x^2 - 32x\right) + \left(25y^2 + 50y\right) - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$16\left(x^2 - 2x\right) + 25\left(y^2 + 2y\right) = 359 \Rightarrow$$

$$16\left(x^2 - 2x + 1\right) + 25\left(y^2 + 2y + 1\right) = 359 + 16 + 25 \Rightarrow$$

$$16(x-1)^2 + 25(y+1)^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

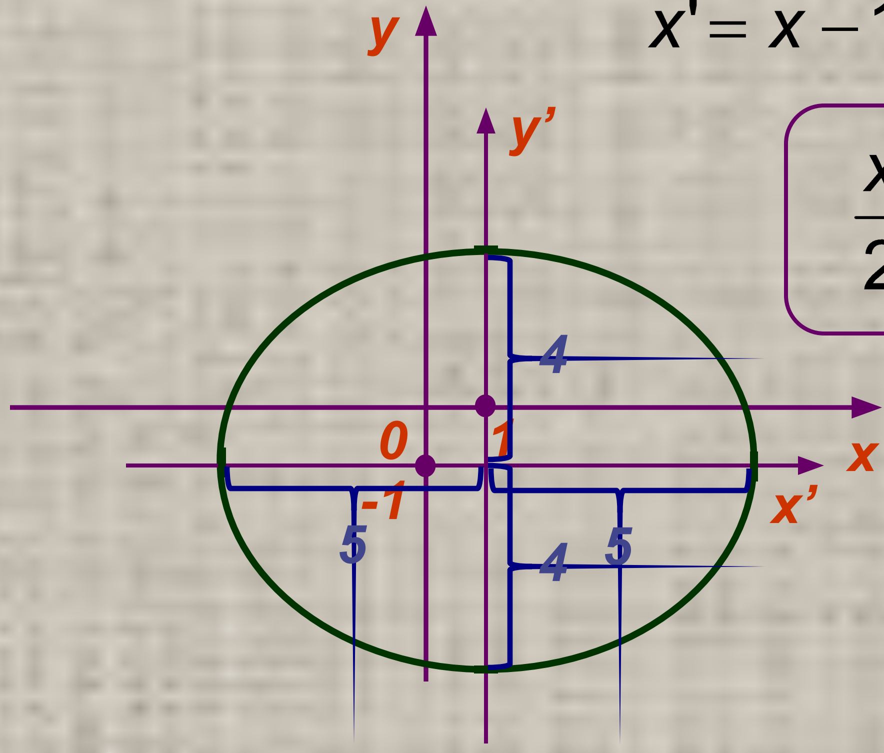
Преобразование общего уравнения к каноническому виду

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

*Перенесем начало координат в точку **(1; -1)**, получим новую систему координат:*

$$x' = x-1; \quad y' = y+1$$

$$\boxed{\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1}$$



Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Если слагаемое ***2Bxy*** в общем уравнении не равно нулю, то для приведения уравнения к каноническому виду необходимо повернуть оси координат на угол ***α***. При этом зависимость между старыми координатами и новыми определяются формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Угол ***α*** удовлетворяет условию:

$$tg2\alpha = \frac{2B}{A - C}$$

В случае, если ***A = C***, то

$$2\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 45^0$$