Задачи на проценты.

Процентом называется одна сотая часть:

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Соответственно,

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Один процент от числа (количества) А – это, по определению, одна сотая часть числа А:

1% от А равен $\frac{1}{100} \cdot A$

Все задачи на проценты сводятся к разрешению следующих элементарных задач:

1.**Вычисление числа по процентам:**

а) найти р% от числа А — Формула ответа: $\frac{p}{100} \cdot A$ — Ф1

б) найти число, р% которого составляет число А — Формула ответа: $\frac{100}{p} \cdot A$ — Ф2

в) найти число, превосходящее А на р% — Формула ответа: $A + \frac{p}{100} \cdot A$ — Ф3

г) найти число, меньшее чем А, на р% — Формула ответа: $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot A$ — Ф4

2. Вычисление процентов по числу:

а) Сколько процентов составляет А от В? — Формула ответа: $\frac{A}{B} \cdot 100\%$ — Ф5 б) На сколько процентов А больше, чем В? Формула ответа: $\frac{A - B}{B} \cdot 100\%$ Ф6

в) На сколько процентов А меньше, чем В? Формула ответа: $\frac{B - A}{B} \cdot 100\%$ Ф7

Часто при решении задач на проценты приходится сталкиваться с понятиями “процентное содержание”, “концентрация”, “р%-й раствор”и т.п. Остановимся кратко на этих терминах.

Процентное содержание. р%-й раствор.

Пусть в ведре 10 л соленой воды. Если процентное содержание соли в нем составляет, например, 15%, то это значит, что в этом ведре 10*0.15=1.5 кг соли.10 л воды весит 10 кг, а удельный вес воды равен 1000 кг/м3.Говорят также, что в ведре 15%-ый раствор соли.

Другой пример. Предположим, есть сплав двух металлов:олова и цинка. Пусть вес олова и цинка в сплаве составляет соответственно 10 и 15 кг. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?

Под *процентным содержанием* олова(цинка) понимается часть, которую составляет вес олова (цинка) от веса всего сплава, выраженная в процентах. Так как вес всего сплава равен 25 кг, то вес олова составляет 10/25=0.4 веса сплава, соответственно вес цинка составляет 15/25=0.6 веса сплава. Если найденные части выразить в сотых долях частей, то получим значение этих частей, выраженное в процентах: 40 и 60%. Следует обратить внимание на то, что 40%+60%=100%

Концентрация

Дадим простейшее определение концентрации одного вещества в соединении по массе (весу). Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения. Например, если концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%, то в этом сплаве 0.87*300=261 г чистого серебра.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют процентом?

2) Чему равен один процент рубля? Один процент метра? Один процент килограмма?

3) Выберите для каждого процента в левом столбце соответствующую ему дробь в правом столбце:

10%	$\frac{1}{2}$
50%	$\frac{9}{10}$
30%	$\frac{1}{10}$
75%	$\frac{1}{4}$
90%	$\frac{3}{10}$
25%	$\frac{3}{4}$

4) Выразите проценты в виде обыкновенной и десятичной дроби:

39%, 17%, 3%, 50%, 25%, 20%, 10%, 125%.

5) Выразите десятичные дроби в виде процентов:

0,99; 0,25; 0,7; 1,02; 1,21.

6) Вычислить устно:

1. 25% от 3,6
2. 50% от 63 руб. 50 коп.
3. $33\frac{1}{3}\%$ от 3000 руб.
4. 75% от 600 руб.
5. $\frac{1}{2}\%$ от 3 руб.
6. 15% от 240 руб.
7. 40% от 1060
8. $66\frac{2}{3}\%$ от 3 руб.
9. 10% от 1263
10. 120% от 5
11. 1% от 0,4
12. 150% от 12.

7) Что больше: а% от р или р% от а (а<р)?

8) Найдите число, если

1. 300% его составляют 336,
2. 25% его составляют 16,
3. $33\frac{1}{3}\%$ его составляют 120,
4. 12,5% его составляют 40.

9) Какую часть составляет число 2 от числа 8? Выразите эту часть в процентах. На сколько процентов число 2 меньше числа 8?

10) Во сколько раз число 3 больше числа 2? Сколько процентов составляет число 3 от числа 2? На сколько процентов число 3 больше числа 2?

1 уровень сложности. К нему относятся простейшие задачи на проценты:

1) нахождение процента от числа; 2) нахождение числа по его проценту; 3) нахождение процентного отношения чисел.

Примеры решенных задач:

Нахождение процента от числа	*Нахождение числа по проценту*	*Нахождение процентного отношения*
Сливочное мороженое содержит 15% сахара. Сколько сахара в 200 г мороженого?	Сколько учеников в классе, если на одного человека в нем приходится 4% учащихся класса?	В сплаве олова и меди массой 40 кг меди 6 кг. Каков процент содержания меди в этом сплаве?
1 способ (по формулам решения элементарных задач)		
$\frac{15}{100} \cdot 200 = 30(\text{г})$	$\frac{100}{4} \cdot 1 = 25(\text{учеников})$	$\frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%$
2 способ (с применением пропорций)		
200 г – 100% х г – 15% 200 : х = 100 : 15 $x = \frac{200 \cdot 15}{100}; \quad x = 30$	1 ученик – 4% х учеников – 100% 1 : х = 4 : 100 $x = \frac{100 \cdot 1}{4}; \quad x = 25$	40 кг – 100% 6 кг – х% 40 : 6 = 100 : х $x = \frac{6 \cdot 100}{40}; \quad x = 15$
Ответ: 30 г сахара	Ответ: в классе 25 учеников	Ответ: в сплаве 15% меди

Тренировочные задания.

Задача 1: В городе N состоялись выборы в городскую думу, в которых приняли участие 75% избирателей. Только 10% от числа принявших участие в выборах отдали голоса партии “зеленых” .Сколько жителей проголосовали за эту партию, если в городе всего один миллион избирателей?

Задача 2: Длина дистанции трехдневной велогонки была 480 км. В первый день велогонщики проехали 25% всего пути, а во второй день 55% оставшегося пути. Сколько километров проехали велогонщики в третий день?

Задача 3: При помоле пшеницы получается 80% муки. Сколько пшеницы нужно смолоть, чтобы получить 480 кг пшеничной муки?

Задача 4: Мальчик израсходовал 70% имевшихся у него денег, после чего у него осталось 42 руб. Сколько денег было у мальчика первоначально?

Задача 5: Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?

Задача 6: Изделие стоило 500 руб. Цену уменьшили (увеличили) на 10%. Сколько теперь стоит изделие?

Задача 7: В сбербанк положили 1000 руб. Подсчитайте, какую сумму должен получить через 2 года, если по истечении каждого года банк начисляет 3% дохода.

Задача 8: Цена товара снизилась с 40 руб. до 30 руб. На сколько процентов снизилась цена?

Задача 9: Зарплата повысилась с 5000 руб. до 5100 руб. На сколько процентов повысилась зарплата?

Задача 10: В 7-А классе из 40 человек задачу решили 32 человека, а в 7-Б классе из 35 человек эту задачу решили 28 человек. Какой класс справился лучше?

Ответы и указания

2 уровень сложности. К нему относятся задачи, в которых, сопоставляя исходные величины, приходится выбирать ту величину, которую необходимо принять за 100% (задачи, в которых находят процент от процента [сложные проценты]).

Для нахождения сложных процентов можно использовать следующую формулу:

$$A_n = A_0(1 \pm 0{,}01\, x_1) \ldots (1 \pm 0{,}01\, x_n) \text{ , где}$$

A_0 - начальное значение некоторой величины,

A_n – значение, которое получилось в результате нескольких изменений начальной величины (“+” в скобках означает, что величина увеличивалась, “-” –уменьшалась),

n- количество изменений начальной величины,

x- процент изменения.

Когда величина A_0 изменяется несколько раз на один и тот же процент, то применяют частный случай вышеуказанной формулы:

$$A_n = A_0(1 \pm 0{,}01\, x)^n$$

Процентное сравнение осуществляется по формулам Ф6 и Ф7. Напомним их:

$$A > B \text{ на } \left(\frac{A - B}{B} \cdot 100\right)\%, \quad B < A \text{ на } \left(\frac{A - B}{A} \cdot 100\right)\%$$

Примеры решенных задач:

1) Ананасы понизили в цене на 10%, а затем повысили в цене на 10%. Изменилась ли первоначальная цена ананасов, и если да, то на сколько процентов?

Решение: Примем исходную цену за A_0, а окончательную – за A_2, т.к. она установилась после двух изменений.

Для наглядности представим ход решения задачи в виде схемы

$$A_0 \xrightarrow{5\%} A_0 \cdot (1-5 \cdot 0{,}01) \xrightarrow{5\%} A_0 \cdot (1-5 \cdot 0{,}01) \cdot (1+5 \cdot 0{,}01)$$

или воспользуемся формулой сложных процентов:

$$A_2 = A_0 \cdot (1-5 \cdot 0{,}01) \cdot (1+5 \cdot 0{,}01) = A_0 \cdot (1-25 \cdot 0{,}0001) = A_0 \cdot (1-0{,}25 \cdot 0{,}01)$$

Легко заметить, что процент изменения величины A_0 равен 0,25, а знак “-” говорит о том, что цена снизилась.

<u>Ответ:</u> цена понизилась на 0,25%.

2) Какой процент ежегодного дохода давал банк, если, положив на счет 13000 руб., вкладчик через 2 года получил 15730 руб.?

Решение: A_0- размер начальной суммы на счете, A_2- размер суммы на счете через 2 года.

$$A_2=A_0(1+0{,}01x)^2$$

$$15730=1300(1+0{,}01x)^2$$

$$(1+0{,}01x)^2=1{,}21$$

$1+0{,}01x=1{,}1$ или $1+0{,}01x=-1{,}1$

$x_1=10$ $x_2= -210$- не подходит по смыслу задачи

<u>Ответ:</u> банк давал 10% годового дохода.

3) В осенне-зимний период цена на свежие фрукты возрастала трижды: на 10%, на 20% и на25%. На сколько процентов возросла зимняя цена по сравнению с летней?

Решение:Обозначим первоначальную летнюю цену за A_0, а окончательную через A_3, т.к. цена изменялась три раза. По условию:

$A_3=A_0\cdot(1+0{,}01\cdot10)\cdot(1+0{,}01\cdot20)\cdot(1+0{,}01\cdot25)$

$A_3=A_0\cdot1{,}1\cdot1.2\cdot1{,}25$

$A_3=A_0\cdot1{,}65$

По формуле процентного сравнения:

$$\frac{A_3 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = \frac{1{,}65 \cdot A_0 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = 65\%$$

Ответ: цена возросла на 65%.

Примечание: Из того, что зимняя цена больше летней на 65% не следует, что летняя цена ниже зимней на также 65%, т.к. в задаче зимняя цена сравнивается с летней и летняя берется за 100%. Если сравнивать с зимней ценой, то ее придется взять за 100%, а эта цена больше.

4) На предприятии выработка продукции возросла за год на 4%, а на следующий год повысилась еще на 8%.Найти средний годовой прирост за эти 2 года.

Решение: С одной стороны,

$$A_2 = A_0 \cdot (1+0{,}04) \cdot (1+0.08)$$

с другой стороны,

$$A_2 = A_0 \cdot (1+0{,}01x)^2,$$

где x- средний, одинаковый для каждого года, процент прироста продукции. Тогда

$$A_0(1+0.04)(1+0{,}08) = A_0(1+0{,}01x)^2$$

$$x^2+200x-1232=0 \qquad D=44928>0$$

$x_1 \approx 6$ x_2- не удовлетворяет условию задачи

Ответ: средний годовой прирост равен 6%

Тренировочные задания

Задача 1: Известно, что 18% числа составляют 72, а 14% другого числа составляют70.Какое из чисел больше и на сколько процентов?

Задача 2: Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня?

Задача 3: Цена товара после двух последовательных снижений на один и тот же процент уменьшилась с 125 до 80 руб. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

Задача 4: Выразите в процентах изменение площади прямоугольника, если длина его увеличится на 30%, а ширина уменьшится на 30%.

Задача 5: Стоимость товара сначала снизили на 12%, а затем новую стоимость снизили еще на 5%. Сколько процентов от первоначальной стоимости составляет окончательная стоимость этого товара после двух последовательных снижений и на сколько процентов в общем снижена была стоимость товара.

Задача 6: Цену товара сперва снизили на 20%, затем на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Задача 7: В январе пакет акций стол на 10% меньше, чем в феврале. В феврале этот же пакет акций стоил на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов меньше стоимость пакета акций в январе, чем в марте?

Задача 8: Студентов, изучающих французский язык, на 35% меньше, чем изучающих английский, а английский изучают на 4% студентов меньше, чем немецкий. Сколько студентов изучают французский язык, если немецкий изучают на 235 человек больше, чем французский?

Ответы и указания

3 уровень сложности. К нему относятся так называемые "двухшаговые" задачи на проценты, т.е. более сложные задачи на смеси, концентрации, производительность и другие, где требуется неоднократное применение задач 1 и 2 уровней.

При решении задач на изменение концентрации (изменение процентного содержания) вещества нужно выделить ту компоненту, количество которой остается неизменным. Зная массу этой компоненты и ее процентное содержание в интересующей нас смеси (сплаве, растворе), мы найдем и массу этой смеси.

Примеры решенных задач:

1) В расколотом арбузе содержалось 99% воды. После его усыхания содержание воды стало составлять 98%. Во сколько раз усох арбуз?

Решение: Обозначим за m первоначальную массу арбуза, m_1- массу арбуза после усыхания.

Заметим, что масса сухого вещества в арбузе остается неизменной и равна 0,01m, т.к.

100%-99%=1% -приходится на массу сухого вещества; 1% от m есть 0,01m.

После усыхания масса сухого вещества составляет 2% от массы всего арбуза (100%-98%=2%).

Массу арбуза после усыхания найдем с помощью пропорции:

$$0{,}01m - 2\%$$
$$m_1 - 100\%$$

$$m_1 = \frac{0{,}01m \cdot 100\%}{2\%} = \frac{1}{2}m$$

<u>Ответ:</u> арбуз усох в 2 раза.

2) Кусок сплава меди с оловом массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы новый сплав имел 40% меди?

Решение: Обратим внимание на то, что масса меди в сплаве не изменится после прибавления олова. Условия задачи дают возможность узнать, сколько килограммов меди в данном куске. Так как эта медь должна составлять 40% массы нового сплава, то мы узнаем массу нового сплава, а, значит, и массу олова, которое надо добавить. Запишем решение задачи.

1. Сколько килограммов меди в 12 кг сплава? $\frac{45}{100} \cdot 12 = 5{,}4(\text{кг})$
2. Какова масса нового сплава? $\frac{100}{40} \cdot 5{,}4 = 13{,}5(\text{кг})$
3. Сколько чистого олова надо добавить? 13,5 – 12 = 1,5 (кг)

<u>Ответ:</u> 1,5 кг

3) Сколько надо взять 10-процентного раствора уксусной кислоты и сколько воды, чтобы смешав, получить 50 г 3-процентного столового уксуса?

Решение: Заметим, что при добавлении воды масса чистой уксусной кислоты в растворе остается неизменной. Эту массу мы можем найти, т.к. известна масса столового уксуса и процентное содержание в нем уксусной кислоты. А так как эта масса составляет 10% массы раствора уксусной кислоты, то мы узнаем нужную для смешивания массу раствора и массу воды. Запишем решение.

1. Сколько граммов уксусной кислоты в 50 г столового уксуса? $\frac{3}{100}\cdot 50 = 1{,}5(\text{г})$
2. Сколько надо взять для смешивания 10-процентной уксусной кислоты?

$10\% = \frac{1}{10}$, $1{,}5\cdot 10=15$ (г)

3. Сколько нужно взять для смешивания воды?

$50 – 15 = 35$ (г)

<u>Ответ:</u> нужно взять 15 г 10- процентного раствора уксусной кислоты и 35 г воды.

Проверка: Убедимся, что решение верно, для чего проверим, что все условия задачи выполнены:

15 + 35 = 50 (г); в 15 г 10-процентного раствора содержится 15 · 0,1 = 1,5 (г) уксусной кислоты;

она составляет в 50 г столового уксуса 3% $\left(\frac{1{,}5}{50}\cdot 100 = 3\right)$

3) Из 20-процентного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

Решение: Пусть m- начальная масса раствора, c- масса соли в растворе (она остается неизменной).

Определим сколько граммов соли было в первоначальном растворе: $c = \frac{20}{100}\cdot m = \frac{1}{5}\cdot m$ (г)

Какова массовая доля воды в первоначальном растворе? $m - c = m - \frac{1}{5} \cdot m = \frac{4}{5} \cdot m$

Сколько воды осталось в растворе после испарения?

$$\frac{100-25}{100} \cdot \frac{4}{5} m = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} m = \frac{3}{5} m$$

Какова концентрация получившегося раствора (отношение массы соли к массе всего раствора)?

$$\frac{\frac{1}{5} m}{\frac{3}{5} m + \frac{1}{5} m} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$$

<u>Ответ: </u> концентрация соли в растворе составляет 25%.

4) Для проведения опыта научный сотрудник химической лаборатории смешал 4-процентный раствор некоторого химического вещества и 10-процентный раствор этого же вещества и получил 75 мл 8-процентного раствора. Сколько миллилитров 4-процентного раствора и сколько 10-процентного раствора было взято?

Решение: Обозначим через x и y количество 4-процентного и 10-процентного растворов, запишем первое уравнение системы:

$$x + y = 75$$

Второе уравнение системы связывает количество химического вещества в 4-процентном, 10-процентном и получившемся растворах:

$$0{,}04x + 0{,}1y = 0{,}08(x + y)$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 75, \\ 0{,}04x + 0{,}1y = 0{,}08(x + y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 75, \\ 4x + 10y = 8x + 8y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 75, \\ 2x - y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 25, \\ y = 50. \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> 25 мл, 50 мл.

Тренировочные задания.

Задача 1: Собранные грибы, влажность которых была 99%, подсушили, после чего влажность снизилась до 96%. Сколько было собрано грибов, если после подсушивания их масса равнялась 20 кг?

Задача 2: Влажность семян изменилась при хранении с 5% до 8%. Во сколько раз увеличилась масса семян?

Задача 3: Руда, загружаемая в домну, содержит 60% железа. В домне из руды выплавляется чугун, который содержит 98% железа. Сколько тонн чугуна будет выплавлено из 245 тонн руды?

Задача 4: Сколько килограммов воды надо выпарить из 100 кг целлюлозной массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу с содержанием 80% воды?

Задача 5: Сколько килограммов меди нужно переплавить с двумя килограммами сплава меди и серебра, содержащего 5% серебра, чтобы получить сплав, содержащий 2% серебра?

Задача 6: В уксусной эссенции концентрация уксуса 80%. Концентрация столового уксуса 9%. Сколько эссенции и сколько воды нужно взять, чтобы, смешав, получить 800 г столового уксуса?

Задача 7: К 10 л 5-процентного раствора соли добавили 5 л воды. Определите процент содержания соли в новом растворе.

Задача 8: К 15 л 10-процентного раствора соли добавили 5-процентным раствор соли и получили 8-процентный раствор. Какое количество литров 5% раствора добавили?

Ответы и указания

Задачи на пропорциональное деление.

Пропорцией называется равенство двух отношений.

Пропорции записывают так:

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

где a, d называются *крайними членами*, b, c – *средними членами* пропорции.

Основное свойство пропорции: в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Выделяют два вида пропорциональной зависимости – прямую и обратную.

Две величины называются *прямо пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Прямо пропорциональная зависимость между величинами x и y выражается следующей формулой:

$$y = k \cdot x,\ k \neq 0.$$

Число k называют *коэффициентом пропорциональности*.

Пример: зависимость между количеством товара и стоимостью покупки прямо пропорциональная, т.к. если купить товар в несколько раз больше, то и стоимость покупки увеличится во столько же раз.

Если две величины прямо пропорциональны, то отношения соответствующих значений этих величин равны:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Две величины называются *обратно пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Обратно пропорциональная зависимость между величинами x и y выражается формулой:

$$y = \frac{k}{x}; x \neq 0; k \neq 0$$

Пример: зависимость между шириной и длиной при одном и том же значении площади прямоугольника обратно пропорциональная, т.к. если увеличить длину прямоугольника в

несколько раз, то надо ширину во столько же раз уменьшить.

Если две величины обратно пропорциональны, то отношения значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

Не всякие две величины являются прямо пропорциональными или обратно пропорциональными. Например, рост ребенка увеличивается при увеличении его возраста, но эти величины не являются пропорциональными, т.к. при удвоении возраста рост ребенка не удваивается.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют пропорцией? Приведите пример.
2) Замените отношение дробных чисел отношением целых чисел:

$\frac{5}{3}:\frac{4}{25}$; $2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$; $0{,}2:0{,}125$; $3{,}5:0{,}021$.

3) Назовите основное свойство пропорции. Верна ли пропорция $\frac{2}{6}=\frac{0{,}1}{0{,}3}$? Составьте из чисел 10, 12, 30, 4 верную пропорцию.
4) Для чисел a, b, u, v выполняется равенство av=bu. Составьте из этих чисел верную пропорцию. Сколько верных пропорций можно составить из этих чисел?
5) Найти отношение двух чисел, если 140% от первого числа равны 110% от второго.
6) Какие величины называются прямо пропорциональными (пропорциональными)? Приведите пример.
7) Какой формулой выражается прямо пропорциональная зависимость между величинами x и y. Что такое коэффициент пропорциональности?
8) Проверьте, что числа 6, 18, 12 пропорциональны числам 4, 12, 8 и найдите коэффициент пропорциональности.
9) Какие величины называются обратно пропорциональными? Приведите пример.
10) Какой формулой выражается обратно пропорциональная зависимость между величинами x и y?
11) Будут ли обратно пропорциональными величины x и $\frac{1}{x}$?
12) Какие из величин, входящих в следующие формулы, прямо пропорциональны и какие обратно пропорциональны?

1. s=vt; 2. $d=\frac{p}{s}$; 3. γ=ε/R; 4. $N=\frac{fs}{75t}$

13) Указать из перечисленных ниже величин прямо пропорциональные и обратно пропорциональные.

1. Цена товара и его количество при постоянной стоимости товара.
2. Длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине его.
3. Продолжительность работы и производительность труда рабочих при постоянном объеме работы.
4. Число рабочих и время выполнения определенной работы.
5. Плотность и объем при постоянной массе.
6. Произведение и величина одного из сомножителей.
7. Множимое и множитель при данном произведении.
8. Числитель и величина дроби при постоянном знаменателе.
9. Делимое и частное при постоянном делителе.
10. Числитель и знаменатель при постоянной величине дроби.

14) Будут ли следующие величины пропорциональны? Обратно пропорциональны?

1. Количество проданных в метро билетов и выручка кассы.
2. Расстояние по железной дороге и стоимость билета.
3. Денежный вклад и процентные деньги при данном количестве процентов.
4. Длина окружности и ее диаметр.
5. Длина и масса проволоки.
6. Концентрация соли в растворе и масса раствора.

1 уровень сложности. К нему относятся простейшие задачи на прямую и обратную пропорциональные зависимости.

Примеры решенных задач:

1) В баке 135 литров воды. Разделите ее на две части, относящиеся друг к другу как 4 **:** 5.

Решение:

1 способ. Т.к. искомые части относятся друг к другу как 4 **:** 5, то они содержат соответственно 4е и 5е литров воды, где е- некоторое неизвестное количество литров (е является коэффициентом пропорциональности).

Из условия задачи находим:

$$4e + 5e = 135, \quad e = \frac{135}{9} = 15$$

Тогда искомые части составят:

$4e = 4 \cdot 15 = 60$ (л); $5e = 5 \cdot 15 = 75$ (л).

2 способ. Обозначим искомые части через x и y и запишем условия задачи с помощью уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 135, \\ x : y = 4 : 5, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x + y = 135, \\ x = \frac{4}{5}y, \end{cases}$$

$\frac{4}{5}y + y = 135$, $y = 75$, $x = 135 - 75 = 60$.

Ответ: 60 и 75 л

2) Разделить число 1200 на части, пропорциональные числам $\frac{7}{6}, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$

Решение:

<u>1 способ.</u> Сразу заметим, что вместо чисел $\frac{7}{6}, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ удобнее взять пропорциональные им целые числа 7, 3 и 2 (они получены умножением данных чисел на их общий знаменатель, т.е. по формуле y = 6x; x и y в этом случае прямо пропорциональны).

В задаче требуется найти 3 числа x, y и z, которые в сумме дают 1200 и для которых выполняется условие $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.Частное $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ называют коэффициентом пропорциональности; обозначим его через к.

Тогда x = 7к, y = 3к, z = 2к. Так как x + y + z = 1200, то 12к = 1200, к = 100, и, следовательно,

x = 700, y = 300, z = 200.

<u>2 способ.</u> Число 1200 надо представить как сумму трех чисел таких, что первое состоит из7, второе – из 3 и третье – из 2 одинаковых частей. Всего получаем 7 + 3 + 2 = 12 частей. На одну часть приходится 1200 **:** 12 = 100. Тогда первое число равно 7 · 100 = 700, второе – 300, третье – 200.

<u>Ответ:</u> 700, 300, 200.

3) Разделить число 82000 на части, обратно пропорциональные числам $0{,}5; \frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$.

Решение: Надо найти три числа x, y,z, сумма которых равна 82000 и для которых выполняется условие

$x \cdot 0{,}5 = y \cdot \frac{3}{7} = z \cdot \frac{2}{5}$

(по определению обратно пропорциональной зависимости величин произведения их соответствующих значений равны)

Откуда $x:2 = y:\frac{7}{3} = z:\frac{5}{2}$, т.е. получаем, что x, y и z прямо пропорциональны числам $2, \frac{7}{3}$ и $\frac{5}{2}$, которые являются обратными для данных чисел $0{,}5; \frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$. Вместо чисел $2, \frac{7}{3}$ и $\frac{5}{2}$ возьмем целые 12. 14 и 15. Имеем:

41k = 82000, k =2000, x = 24000, y = 2800, z = 30000.

<u>Ответ:</u> 2400, 2800, 30000.

4) 399 метров проволоки распределяются между монтерами так, что число метров проволоки, доставшейся первому монтеру, составляет 40% от количества проволоки, взятой вторым монтером, а количество проволоки, взятой первым монтером, относится к количеству проволоки, взятой третьим монтером, как 7 **:** 4. Сколько метров проволоки получил каждый?

Решение: При решении таких задач с помощью составления уравнения удобнее всего взять в качестве неизвестного коэффициент пропорциональности.

Пусть $x_м$- то количество проволоки, которое 7 раз содержится в количестве проволоки, взятой первым монтером, и 4 раза в количестве проволоки, взятой третьим монтером. Следовательно, первый монтер взял 7х м, третий – 4х м. Так как 7х м составляет 40% от количества проволоки, взятой вторым монтером, то второй монтер взял

$$7x \cdot \frac{100}{40} = 17{,}5x(м)$$

Имеем уравнение:

7х + 4х + 17,5х = 399, откуда х = 14.

Итак, первый монтер получил 14 · 7 = 98 (м) проволоки, второй – 17, 5 · 14 = 245 (м) и третий – 14 ·4 = 56 (м).

<u>Ответ:</u> 98м, 245 м, 56 м.

Тренировочные задания.

Задача 1: Отец старше сына на 25 лет. Возраст отца относится к возрасту сына, как $\frac{3}{2}:\frac{2}{3}$. Сколько лет отцу и сколько лет сыну?

Задача 2: Среди 36 учащихся класса нет таких, кто не катался бы на коньках или на лыжах. Число учащихся, умеющих кататься на коньках, относится к числу учащихся, умеющих кататься на лыжах, как 4 **:** 5, причем лыжников на 6 больше, чем конькобежцев. Сколько учащихся катается и на коньках, и на лыжах? Сколько учащихся катается только на коньках?

Задача 3: Новое серебро (альпака) – это сплав никеля, цинка и меди в отношении 3 **:** 4 **:** 13. Сколько килограммов каждого металла нужно взять, чтобы получить 4 кг нового серебра?

Задача 4: Число 680 разделить на два числа, обратно пропорционально числам $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.

Задача 5: Найдите, какой путь прошел турист за 5 дней пути, если за 2 последних дня он прошел 45 км, а количества километров, проходимых туристом, начиная с первого, относятся как 2 **:** 6 **:** 4 **:** 3 **:** 2.

Задача 6: Веревку длиной 12,4 метра разрезали на три части так, что длина первой части составляет 60% второй, а длина второй части так относится к длине третьей, как 2 **:** 3.Найдите длину каждой части.

Задача 7: За три книги заплатили 1925 рублей. Цена первой книги составляет 40% цены всех книг. Цены двух других книг прямо пропорциональны числам 5 и 6. Найти цену каждой книги.

Задача 8: Три колхоза построили сообща гидростанцию. Первый внес на постройку 24% ее стоимости. Суммы, внесенные вторым и третьим колхозами, были обратно пропорциональны числам 3,2 и 2,5.Второй колхоз внес на 4480 рублей меньше третьего. Сколько денег израсходовали колхозы на постройку гидростанции.

Ответы и указания.

2 уровень сложности. К нему относятся задачи , в которых пропорциональная зависимость величин указана неявно, и требуется установить какой она носит характер (прямая или обратная)

Примеры решенных задач:

1) В уксусной эссенции концентрация уксуса 80%. Концентрация столового уксуса 9%. Сколько воды нужно добавить к 180 мл эссенции, чтобы получить столовый уксус?

Решение:

1 способ. Воспользуемся тем, что концентрация уксуса и количество раствора уксуса обратно пропорциональные величины. Так как концентрация уксуса уменьшилась в $\frac{80}{9}$ раз, то количество раствора уксуса увеличится во столько же раз, т.е. станет равным $180 \cdot \frac{80}{9} = 1600$(мл).

Следовательно, нужно добавить 1600 – 180 = 1420 (мл) воды.

2 способ. Количество столового уксуса можно было найти, составив пропорцию.

Концентрация уксуса:	Количество:
в эссенции – 80%	эссенции – 180 мл
в столовом уксусе – 9%	столового уксуса – х мл

А т.к. эти величины обратно пропорциональны, то $\frac{80}{9} = \frac{x}{180}$, откуда х =1600 (мл).

Нужно добавить 1600 – 180 = 1420 (мл) воды.

Ответ: 1420 мл.

Замечание: Количество раствора обратно пропорционально концентрации того вещества, количество которого не меняется при разбавлении. Так, в рассмотренной задаче количество уксуса и концентрация раствора будут обратно пропорциональными.

2) Время, необходимое на изготовление некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

Решение. Пусть за время t произведено количество продукции, равное а. Производительность труда – это количество продукции, производимой в единицу времени, т.е. $p = \frac{a}{t}$ или pt=a. Равенство показывает, что производительность труда и время выполнения определенной работы обратно пропорциональны.

1 способ. Составим пропорцию, приняв время, затрачиваемое ранее на изготовление 1 детали, и прежнюю производительность труда за 100%.

Время	Производительность труда
было 100%	была 100%
стало 80%	стала х%.

А т.к. эти величины обратно пропорциональные, то $\frac{100}{80} = \frac{x}{100}$, х = 125%. Следовательно, производительность труда увеличилась на 25%.

2 способ. Время, необходимое на изготовление детали, уменьшилось в $\frac{100}{80}=\frac{5}{4}$ раза. Следовательно, производительность труда увеличилась в $\frac{5}{4}$ раза и стала равной $100\cdot\frac{5}{4}=125\%$

3 способ. Раньше 1 деталь изготовляли за 1 ед. времени, стали изготовлять за 0,8 ед. времени (80% = 0,8). Поделив количество деталей (1 дет.) на время, за которое это количество изготовили (0,8 ед. времени), получим, сколько деталей стали изготовлять в 1 ед. времени 1 **:** 0,8 = 1,25. Это и есть новая производительность труда 1,25 = 125%.

Ответ: на 25%.

4) Предприятие перешло с 7-часового рабочего дня на 6-часовой, повысив производительность труда на 20%. Расценки за выполненную работу остались прежними. На сколько процентов возросла заработная плата? Как изменилось количество выпускаемой продукции?

Решение: Заработная плата при неизменных расценках пропорциональна количеству выпускаемой продукции. Количество выпускаемой продукции пропорционально производительности труда и пропорционально времени, затраченному на работу.

Пусть раньше предприятие выпускало 100% продукции. Т.к. время работы уменьшилось в $\frac{7}{6}$ раза, то и количество выпускаемой продукции уменьшилось в $\frac{7}{6}$ раза и стало равным $100\cdot\frac{6}{7}\%$. С другой стороны, т.к. производительность труда увеличилась в $\frac{120}{100}=\frac{6}{5}$ раза, то и количество выпускаемой продукции увеличилось в $\frac{6}{5}$ раза и стало равным

$$100\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{5}\%\approx 103\%$$

Следовательно, количество выпускаемой продукции и заработанная плата увеличились примерно на 3%.

Ответ: увеличились примерно на 3%.

4) Шкив диаметром 720 мм, делающий 143 оборота в минуту, соединен ременной передачей с другим шкивом, делающим 396 оборотов в минуту. Найти диаметр второго шкива.

Решение: Точка, лежащая на окружности шкива диаметра d мм, за 1 оборот проходит πd мм, а за n оборотов – πdn мм. Т.к. линейные скорости точек обоих шкивов равны (шкивы соединены ременной передачей), то, если d_1 и d_2 – диаметры шкивов, а n_1, n_2- количества оборотов, которые они делают в единицу времени (угловые скорости), то $\pi d_1 n1 = \pi d_2 n_2$, $d_1 n_1 = d_2 n_2$. Равенство показывает, что угловая скорость и диаметр шкива – обратно пропорциональные величины.

$720 \cdot 143 = 396 \cdot d_2$, $d_2 = 260$ мм – диаметр второго шкива.

<u>Ответ:</u> 260 мм

Тренировочные задания.

Задача 1: Три жильца должны уплатить по одному счету за пользование электроэнергией 408 рублей. У первого жильца 3 лампы по 50 ватт, у второго 4 лампы по 25 ватт и у третьего 2 лампы по 75 ватт. Сколько денег должен уплатить каждый?

Задача 2: Три девочки нашли в лесу 93 белых гриба. Когда первая девочка разложила свои грибы в кучки по 5 грибов в каждой, а вторая – в кучки по 6 грибов в каждой, то кучек получилось у них поровну. Когда же вторая разложила свои грибы по 4, а третья – по 3, то кучек у них получилось тоже поровну. Сколько грибов нашла каждая девочка?

Задача 3: Сколько воды надо долить к 25 г кислоты в 90%, чтобы получить кислоту в 75%?

Задача 4: Скорость резания металла увеличилась с 0,8 м/с до 1 м/с. На сколько процентов уменьшилось время на изготовление 1 детали? На сколько процентов увеличилась производительность труда?

Задача 5: Цех стал выпускать в час 250 схем вместо 200. На сколько процентов повысилась производительность труда? На сколько процентов уменьшилось время на изготовление одной схемы?

Задача 6: Производительность труда увеличилась на 15%, а рабочий день сократился на 1 час (был 8-часовой рабочий день). На сколько процентов увеличилась заработная плата, если расценки остались прежними?

Задача 7: Объем работ по жилищному строительству в районе увеличился на 173% по сравнению с прошлым годом, а производительность труда строительных рабочих повысилась на 40%. На сколько процентов нужно увеличить число строительных рабочих, чтобы выполнить план за то же время?

Задача 8: 9 человек выполнили работу за 12 дней при 7-часовом рабочем дне. За сколько дней выполнят такую же работу 10 рабочих при 6-часовом рабочем дне, если производительность труда повысится на 20%?

Ответы и указания.

3 уровень сложности. К нему относятся более сложные задачи на смеси, сплавы, а также задачи, содержащие параметры.

Примеры решенных задач:

1) Имеется два сплава золота и серебра: в одном количество этих металлов находится в

отношении 2 **:** 3, а в другом – в отношении 3 **:** 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 **:** 11?

Решение: Пусть для получения 8 кг нового сплава нужно взять x кг сплава 1 типа и (8 – x) кг сплава 2 типа. По условию задачи в сплаве 1 типа содержится $\frac{2}{5}\cdot x$ кг золота (2 части из 5), в сплаве 2 типа содержится $\frac{3}{10}(8-x)$ кг золота. Тогда в новом сплаве содержится $[\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)]$ кг золота. С другой стороны, из условия задачи в новом сплаве $\frac{5}{16}\cdot 8=\frac{5}{2}$ кг золота.

Получаем равенство:

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{2};$$

$$0{,}1x=\frac{25}{10}-\frac{24}{10};$$

$$x=1;$$

$$y=8-x=7.$$

Ответ:1 кг и 7 кг.

2) Имеется два куска сплава серебра с медью. Один из них содержит p% меди, другой – q% меди. В каком отношении нужно брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий r% меди? При каком соотношении между p, q, r задача имеет решение?

Решение: Пусть отношение масс сплавляемых кусков равно x **:** y. Следовательно, можно взять, например, x и y граммов соответственно первого и второго сплавов. В x г первого сплава содержится p% меди, т.е. x·p/100 г меди, а в y г второго сплава содержится y·q/100 г меди. В новом сплаве массой (x + y) г будет (x·p/100 + y·q/100) г меди. Зная, что новый сплав содержит r% меди, т.е. (x + y) ·r/100 г меди, имеем

$$\frac{x \cdot p}{100} + \frac{y \cdot q}{100} = \frac{(x+y) \cdot r}{100}$$ или $px + qy = r(x + y)$, откуда $(p - r)x = (r - q)y$.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Если $p = r = q$, то x и y – любые, т.е. можно взять сколько угодно первого сплава и сколько угодно второго.
2. $p = r \neq q$. В этом случае уравнение приобретает вид $0 \cdot x = (r - q)y$, откуда x – любое, $y = 0$, т.е. первого сплава можно взять сколько угодно, второго не брать вовсе.
3. $p \neq r = q$. Получим уравнение $(p - r)x = 0 \cdot y$; y – любое, $x = 0$.
4. $p \neq r$, $q \neq r$. В этом случае можно написать $\frac{x}{y} = \frac{r - q}{p - r}$. Задача будет решена, если $\frac{r - q}{p - r} > 0$, т.е. если $p < r < q$ или $q > r > p$.

Тренировочные задания.

Задача 1: Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2 **:** 3, а другая – в отношении 3 **:** 7. По сколько ведер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 ведер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3 **:** 5?

Задача 2: Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1 **:** 2, а другой содержит те же металлы в отношении 2 **:** 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 **:** 27?

Задача 3: Две бочки вместимостью по а ведер наполнены смесью спирта и воды. В первой эти жидкости смешаны в отношении m **:** n, во второй в отношении p **:** q. Сколько ведер надо отлить из каждой бочки, чтобы из отлитых частей составить смесь, в которой спирта и воды поровну, а, смешав то, что останется, получить смесь, в которой спирта и воды r **:** s?

Задача 4: В двух чанах налита вода. Чтобы в обоих было поровну, нужно перелить из первого во второй столько, сколько там было, потом из второго в первый столько, сколько в первом осталось, и, наконец, из первого во второй столько, сколько во втором осталось. Тогда в каждом чане окажется по 64 ведра. Сколько в них было сначала?

Задача 5: Гонорар за книгу был распределен между тремя соавторами в отношении 8 **:** 6 **:** 5. Если бы этот же гонорар был распределен в отношении 7 **:** 5 **:** 4, то один из соавторов получил бы на 250 рублей больше, чем он получил на самом деле. Чему равна сумма гонорара?

Ответы и указания.

Задачи на совместную работу.

При решении задач на работу всю работу A обычно принимают за 1. Количество работы, выполняемой в единицу времени, будем называть *производительностью труда* P. Производительность труда и время t, необходимое для выполнения всей работы, - взаимно обратные величины:

$$A = P \cdot t$$

Если работа принята за единицу, а время выполнения ее за t часов, то производительность, выраженная в частях , равна $\frac{1}{t}$ всей работы.

Чтобы определить *общую производительность* нескольких объектов, совместно выполняющих некоторую работу(рабочих, тракторов, кранов и др.), нужно найти сумму производительностей этих объектов:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n,$$

где P – общая производительность, P_i – производительность i-ого объекта (i=1,2,...,n), n – число объектов.

Однако, нельзя то же самое сказать о времени совместной работы. Оно будет всегда меньше времени работы каждого объекта в отдельности.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют производительностью труда?
2) Какая формула связывает работу, производительность и время выполнения работы?
3) Как найти общую производительность труда?

4) Винни-Пух съедает банку меда за 3 часа.

а) Какую часть меда он съедает за 1 час? За 1,5 часа? За 2 часа?

б) Пятачок съедает банку меда за 4 часа. Какую часть меда он съедает за 1 час? Какую часть они съедят вдвоем с Винни-Пухом за 1 час?

в) Какое время потребуется Пятачку и Винни-Пуху, чтобы вместе съесть банку меда?

5) Слесарь может выполнить заказ за 6 часов, а ученик за 8 часов. Какую часть заказа выполнит каждый за 1 час? Выполнят оба за 1 час?

6) За час рабочий выполнит 1/6 нормы. За сколько часов рабочий выполнит всю норму?

7) За минуту насос наполняет 1/120 бассейна. За сколько часов насос наполняет весь бассейн? Составить обратную задачу.

8) Кран за 10 минут наполняет 1/30 бассейна. За сколько часов наполнится весь бассейн?

9) За 15 дней трактор вспахал 3/4 поля. За сколько дней трактор вспашет все поле?

10) За а часов рабочий выполнил $\frac{b}{c}$ $(b<c)$ нормы. Сколько часов потребуется рабочему для выполнения нормы?

1 уровень сложности. К нему относятся простейшие задачи на нахождение объема работы, производительности труда, времени выполнения работы по известным формулам.

Примеры решенных задач:

1) 8 рабочих выполнили работу за 6 дней. За сколько дней выполнили бы ту же работу 12 рабочих (при той же производительности труда)?

Решение: Если всю работу принять за 1, то производительность 8 рабочих будет равна 1/6 (т.е. в день они выполнят 1/6 часть работы). Найдем производительность одного рабочего, приняв, что у всех рабочих одинаковая производительность: 1/6 : 8 = 1/48. Тогда общая производительность 12 рабочих будет равна 12 · 1/48 = 1/4.

Следовательно, они выполнят всю работу за 1:1/4 = 4(дня).

<u>Ответ:</u> за 4 дня.

2) Одним и тем же количеством сена можно прокормить одну корову в течение 60 дней, а одну лошадь – в течение 36 дней. На сколько дней хватит этого сена для коровы и лошади вместе при той же дневной норме?

Решение: Количество сена нам не известно, но мы можем принять его за 1 (т.к. в данном случае, как бы непривычно это ни было, сено выступает в роли работы). Тогда в день корова съедает 1/60 часть сена, лошадь – 1/36(это, по определению, производительность). Нужно найти за какое время корова и лошадь вместе съедят все сено. Найдем сколько сена они съедят вместе за 1 день (общую производительность): 1/60 + 1/36 = 2/45.

Чтобы ответить на вопрос задачи, воспользуемся формулой:

1: 2/45 = 22,5 (дня).

<u>Ответ:</u> сена хватит на 22,5 дня.

3) Одна бригада грузчиков берется выгрузить груз за 12 часов. Чтобы выгрузить этот груз, второй бригаде требуется 50% этого времени. Третья бригада может этот груз выгрузить за время в 1,5 раза меньшее, чем требуется первой бригаде. На выгрузке работали

Задачи на совместную работу зачастую содержат большое количество данных, причем в задаче может идти речь сразу о нескольких процессах (например, работа по плану и фактическая) или временных промежутках (сначала – потом). Поэтому, чтобы было проще разобраться в условии задачи, иногда делают анализ условия и записывают все данные в таблицу. При проведении анализа задачи необходимо ответить на следующие вопросы:

- О каком процессе идет речь в задаче? Какими величинами характеризуется этот процесс? (Их количество определяет число строчек в будущей таблице.)
- Сколько процессов в задаче? (Их количество равно числу столбиков в таблице.)
- Какие величины известны и что нужно найти? (Таблица заполняется данными задачи и ставится знак вопроса.)
- Как связаны величины в задаче? (Выписываются формулы и уясняются связи величин в таблице.)
- Какую величину удобно обозначить, например, буквой х?(Анализируется, удобно ли за х взять величину, о которой спрашивается в задаче, или лучше какую-либо другую. Затем остальные неизвестные величины выражаются через х, каждой из них соответствует пустая клетка в таблице.)
- Какое условие нужно использовать для составления уравнения?(Это то условие, которое не использовалось для выражения неизвестных через х. Записывается условие составления уравнения и само уравнение.)
- Легко ли решить полученное уравнение?(Нужно подумать не следует ли ввести буквенное обозначение в другую строчку таблицы и для составления уравнения использовать другую связь между величинами.)

Примеры решенных задач:

1) По плану тракторная бригада должна была вспахать поле за 14 дней. Бригада вспахивала ежедневно на 5 га больше, чем намечалось по плану, и потому закончила пахоту за 12 дней. Сколько гектаров было вспахано? Найдите площадь поля.

Решение: Проанализируем условие задачи, для чего ответим на предложенные выше вопросы.

1. Речь идет о процессе работы. Он характеризуется тремя величинами: вся работа (А) – это измеряемая в гектарах площадь поля; работа в единицу времени, т.е. производительность труда (Р), и время (t) – число дней, затраченное на работу. Значит, в таблице нужны 3 строчки (А, Р, t).
2. В задаче упомянуты два процесса работы: по плану и фактический, значит, в таблице будет два столбика.
3. Теперь остается начертить таблицу с тремя строками и двумя столбцами и заполнить все ее клетки заданными соотношениями. Получаем таблицу 1.

<table>
<tr><td rowspan="2">Величины</td><td colspan="2">Процессы</td></tr>
<tr><td>по плану</td><td>фактически</td></tr>
<tr><td rowspan="2">А га</td><td>A_1-?</td><td>A_2-?</td></tr>
<tr><td colspan="2">одинаковые</td></tr>
<tr><td>Р (га/день)</td><td>P_1-?</td><td>P_2- на 5 га/день больше, чем</td></tr>
<tr><td>t (дни)</td><td>14</td><td>12</td></tr>
</table>

(1 связь) $A = P \cdot t$

(2 связь)

4. Формула $A = P \cdot t$ определяет связь этих величин в столбиках краткого условия

5. Обозначим через x ту величину, о которой спрашивается в задаче.

$$A_1 = A_2 = x$$

6. Используем 2 связь $P_2 - P_1 = 5$ для составления уравнения:

$$\frac{A_2}{t_2} - \frac{A_1}{t_1} = 5,$$

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{14} = 5.$$

7. Это уравнение содержит дроби, что приводит к более сложному решению. Проверим, не удобнее ли будет ввести x во 2 строчку таблицы.

Итак, если $P_1 = x$, то $P_2 = x+5$. тогда в соответствии с условием

$$A_1 = A_2$$

$$P_1 \cdot t_1 \quad P_2 \cdot t_2$$

$$x \cdot 14 \quad (x+5) \cdot 12$$

приходим к уравнению:

$$14x = 12 \cdot (x+5). \qquad (2)$$

Уравнение (2) проще уравнения (1), значит, рациональней осуществить второй способ решения, несмотря на то что площадь, о которой спрашивается в задаче, будет найдена не сразу, а только после решения уравнения (2).

Анализ задачи в тетрадь не записывается, он выполняется устно или на черновике. Решение задачи записывается в следующем виде:

Пусть x (га/день) – производительность бригады по плану, тогда (x+5) (га/день) – фактическая производительность бригады. Работа по плану составляет $x \cdot 14$(га), а фактическая работа

$(x+5) \cdot 12$ (га). По условию площадь поля: 14x (га) и 12(x+5) (га), в обоих случаях одинакова, поэтому можно составить уравнение:

$$14x = 12(x+5)$$

$$2x = 60$$

$$x = 30.$$

Производительность по плану составляет 30 га/день. Тогда площадь поля равна $14 \cdot 30 = 420$ (га).

Ответ: площадь поля равна 420 га.

Замечание: Совсем необязательно проводить все рассуждения полностью, но предложенная схема анализа очень полезна в том случае, когда не получается найти решение задачи сходу.

2) Завод по плану должен был изготовить 180 станков к определенному сроку. Перевыполняя дневную норму на 2 станка, завод выполнил задание на 1 день раньше срока. За сколько дней завод выполнил план?

Анализ условия задачи проведите самостоятельно.

Решение. Обозначим фактическое число дней, затраченных на выполнение задания через x, где $x>0$. Составим таблицу 2.

Величины	Процессы	
	по плану	фактически
A (шт.)	180	180
P (шт/день)	$\frac{180}{x+1}$	$\frac{180}{x}$
t (дни)	x+1	? x

Разность между фактическим выпуском станков в день и планируемым составила $\left(\frac{180}{x} - \frac{180}{x+1}\right)\frac{шт.}{день}$, а по условию она равна $2\left(\frac{шт.}{день}\right)$, значит, можно составить уравнение:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+1} = 2 \quad | \cdot x(x+1). \qquad \text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -1$$

$$\frac{180 \cdot x \cdot (x+1)}{x} - \frac{180 \cdot x \cdot (x+1)}{x+1} = 2x(x+1),$$

$$180x + 180 - 180x = 2x^2 + 2x,$$

$$2x^2 + 2x - 180 = 0 \quad | :2,$$

$$x^2 + x - 90 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -90. \end{cases}$$

Значит, $x_1=9$, $x_2= -10$, но x_2 не удовлетворяет условию задачи ($x>0$). Значение $x=9$ входит в ОДЗ.

Ответ: завод выполнил план за 9 дней.

3) Вместо одной грузовой машины, в связи с ее занятостью на другой работе, для перевозки груза массой 45 т взяли другую машину, грузоподъемность которой на 2 т меньше первой. Поэтому было сделано на 6 рейсов больше, чем предполагалось. Какой грузоподъемности машина была намечена для перевозки груза?

Решение:

Речь идет о процессе работы, который в данной задаче характеризуется тремя величинами:

1. M (т) – масса всего перевозимого груза (работа);
2. m (т/рейс) – грузоподъемность машины, т.е. масса, которую машина может перевезти за 1 рейс (производительность);
3. k (рейс) – число рейсов машины.

Значит, в таблице нужны 3 строчки с соответствующими обозначениями. Поскольку в задаче речь идет о том, что с перевозкой сначала справлялась одна машина, а затем другая, значит речь идет о двух процессах перевозки, т.е. в таблице кроме столбца “Величины” нужны еще два столбца. Заполним таблицу 3 данными задачи. За x удобно принять грузоподъемность 1 машины.

Величины	Процессы перевозки	
	1 машиной	2 машиной
M (т)	45	45
m (т/рейс)	x ?	x-2 на 2 т/рейс меньше, чем
k (рейс)	$\frac{45}{x}$	$\frac{45}{x-2}$ на 6 рейсов больше, чем

$$M = m \cdot k$$

Поскольку x введен во 2 строчку таблицы, для составления уравнения нужно использовать связь величин в 3 строчке.

Обозначим грузоподъемность 1 машины через x (т/рейс), где x>0. Тогда грузоподъемность 2 машины будет (x-2) т/рейс. Значит, 1 машина должна была сделать $45/x$ рейсов, а 2 сделала $\frac{45}{x-2}$ рейсов. Разность между числом рейсов 2 и 1 машины составила $\left(\frac{45}{x-2} - \frac{45}{x}\right)$ рейсов, а по условию она равна 6 рейсам.

Следовательно, можно составить уравнение:

$$\frac{45}{x-2} - \frac{45}{x} = 6$$

Решая это уравнение, получим систему:

$$45x - 45x + 90 - 6x^2 + 12x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x(x-2) \neq 0 \qquad\qquad x \neq 0, x \neq 2$$

Первое уравнение этой системы дает корни $x_1=5$, $x_2= -3$, которые не противоречат второму условию системы. Но значение $x = -3$ не удовлетворяет условию задачи: $x>0$.

Ответ: для перевозки груза была намечена машина грузоподъемностью 5 т.

4) Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 часа. За сколько часов может наполнить бассейн первая труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3 часа быстрее, чем вторая?

Решение: Проанализируем условие задачи.

Итак, о какой работе здесь идет речь? О работе по наполнению бассейна, объем которого обозначим через V условных единиц. Этот объем заполняется каждый час на N (усл. ед.), т.е. N – работа в единицу времени. Через t обозначим число часов, необходимых для заполнения бассейна. Значит, в таблице нужны 3 строчки.

О скольких процессах упоминается в условии? Речь идет о том, что обе трубы могут выполнить работу(наполнить бассейн) одновременно – это один процесс. Далее сравниваются показатели по наполнению бассейна сначала одной 1 трубой, а затем одной 2 трубой – это еще два разных процесса.

Какие величины нам известны, а какие нужно найти? Нужно найти, за сколько часов наполнит бассейн одна 1 труба. Обозначим эту величину через x. Она измеряется в часах. В каких единицах измеряется объем бассейна, не сказано. Значит, для решения задачи это несущественно, и мы вместо условных единиц можем принять любое число. Возьмем самое удобное – 1.

Как связаны величины в задаче? Для ответа на этот вопрос заполняем таблицу 4.

Величины	Процессы заполнения бассейна		
	1 трубой	2 трубой	1 и 2 трубой вместе
V	1	1	1
$P\left(\frac{1}{ч}\right)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{2}$
t (ч)	x ? на 3 ч меньше, чем	$x+3$	2

$$V = N \cdot t$$

$$P_{совм} = P_1 + P_2$$

$$t_{совм} < t_1 + t_2$$

Для составления уравнения используем связь величин во второй строке таблицы 4 : $P_1+P_2=P_{совм}$, т. е.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Условие составления уравнения следует записать таким образом.

Так как за 1 ч обе трубы вместе заполняют $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)$ часть бассейна, а по условию это ½ часть, значит, можно составить уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2x(x+3).$$

ОДЗ: $x \neq 0, x \neq -3$

Отсюда $2(x+3) + 2x = x(x+3)$, или $x^2 – x – 6 = 0$.

Получаем корни $x_1=3$, $x_2= -2$. Оба корня соответствуют ОДЗ, но $x = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

<u>Ответ:</u> 1 труба наполняет бассейн за 3 часа.

3 уровень сложности. К нему относятся задачи, содержащие параметры.

Примеры решенных задач:

1) Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч. и второй t ч, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что им остается выполнить 1/8 всей работы. За сколько часов может выполнить всю работу второй рабочий?

Решение: Пусть за x ч. может выполнить работу второй рабочий. Тогда его производительность 1/x. Найдем ту часть работы, которую выполнили оба рабочих за 4 часа совместной работы. $1-\frac{1}{18}-\frac{5}{9}=\frac{7}{18}$. Следовательно, их совместная производительность за 1 час составляет $\frac{7}{72}$. Тогда производительность первого рабочего $\frac{7}{72}-\frac{1}{x}$. Первый рабочий за 7 часов выполнит $7\cdot\left(\frac{7}{72}-\frac{1}{x}\right)$ часть работы, второй за t часов - $t\cdot\frac{1}{x}$ часть работы. Зная, что оба они выполнят 5/9 всей работы, составим уравнение:

$$7\cdot\left(\frac{7}{72}-\frac{1}{x}\right)+\frac{t}{x}=\frac{5}{9},$$

$$\frac{7}{x}-\frac{t}{x}=\frac{49}{72}-\frac{5}{9},$$

$$\frac{1}{x}(7-t)=\frac{1}{8},$$

$$x=8(7-t).$$

Из условия задачи очевидно, что x>0, t>0, из решения видно, что $\frac{7}{72}>\frac{1}{x},$ т.е. $x>\frac{72}{7},$ т.е.

$$\left[\begin{array}{l} t > 0 \\ 8(7-t) > 0 \\ 8(7-t) > 72 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} t > 0 \\ t < 7 \\ t < \dfrac{40}{7} \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> 56-8t ч. Задача имеет решение при $0 < t < \frac{40}{7}$.

2) Двое рабочих выполняют одну работу. Сначала один проработал треть того времени, которое требуется второму для выполнения всей работы. Затем второй проработал треть времени, которое потребовалось бы первому для выполнения всей работы. После этого оказалось, что выполнено а % всей работы. Найти, сколько времени потребовалось бы каждому из них для выполнения всей работы, если вместе они выполнили бы ее за t часов. Для какого а задача имеет единственное решение?

Решение: Пусть t_1 – время, за которое первый рабочий выполнит всю работу, t_2 – второй. Если обозначим всю работу за 1, то из условия задачи получим уравнения

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{t_1}{3t_2} + \dfrac{t_2}{3t_1} = \dfrac{a}{100}, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (t_1+t_2)t = t_1 \cdot t_2, \quad t_1, t_2 > t \\ 100(t_1^{\,2} + t_2^{\,2}) = 3at_1 \cdot t_2,\ 0<a<100. \end{array}\right.$$

Подставляя t_1, t_2 из первого уравнения во второе и разделив все на 100, получим

$$t_1^{\,2}+t_2^{\,2} = \frac{3at(t_1+t_2)}{100}$$

Дополним до полного квадрата левую часть:

$$t_1^{\,2}+t_2^{\,2}+2t_1t_2 = \frac{3at(t_1+t_2)}{100}+2t(t_1+t_2),$$

$(t_1+t_2)^2= \left(\frac{3a}{100}+2\right)t(t_1+t_2)$

Отсюда

$$t_1+t_2=\left(\frac{3a}{100}+2\right)t$$

Если не прибавлять $2t_1t_2$, а вычитать, то получим $(t_1 - t_2)^2= \left(\frac{3a}{100}-2\right)t(t_1+t_2)$.

Заменяя здесь сумму t_1+t_2 ее значением, получим

$(t_1 - t_2)^2= \left(\frac{3a}{100}-2\right)t^2\left(\frac{3a}{100}+2\right)$.

Если, например, $t_1>t_2$, то $t_1-t_2=t\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}$.

Получим систему:

$$\begin{cases} t_1+t_2=\left(\frac{3a}{100}+2\right)t \\ t_1-t_2=t\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}, \end{cases}$$

$$t_1=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2+\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right)$$

$$t_2=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2-\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right)$$

Проверим, что $t_1>t$ и $t_2>t$.

В самом деле, $t_1=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2+\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right)>\frac{t}{2}\cdot 2=t$, т.е. $t_1>t$.

Учитывая, что

$$\frac{3a}{100}>\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4},$$

получим, что $\frac{3a}{100}-\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}>0,$

значит,

$$t_2=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2-\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right)>\frac{t}{2}\cdot 2=t,$$

т.е. $t_2>t$.

Задача имеет единственное решение, если $\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4=0,$ т.е. $a=\frac{200}{3}.$

Задача не имеет решения, если $\left(\frac{3a}{100}\right)^2<4,$ т.е. $a<\frac{200}{3}.$

Задача имеет 2 решения, если $a>\frac{200}{3}.$

<u>Ответ:</u>

$$t_1=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2+\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right),\quad t_2=\frac{t}{2}\left(\frac{3a}{100}+2-\sqrt{\left(\frac{3a}{100}\right)^2-4}\right)$$

или наоборот.

Тренировочные задания:

Задача 1: Бассейн для плавания имеет три трубы для отвода воды. Через первую и вторую вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн делается пустым за a мин. Через первую и третью вместе при закрытой второй трубе – за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой – за c мин. За какое время освобождается от воды наполненный бассейн через каждую трубу в отдельности?

Задача 2: A выполняет некоторую работу в срок на a дней больший, чем B, и на b дней больший, чем C. A и B, работая вместе, выполняют эту работу за столько же дней, что и C. Определить время, в которое каждый выполняет эту работу отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

Задача 3: Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй 0,6a ч, оказалось, что они выполнили 5/n всей работы. Проработав совместно еще 0,6a ч, они установили, что им осталось изготовить еще 1/n часть всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n – натуральное; найти его.

Задача 4: Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода выливается, через второй вливается. Узнать, за сколько часов через первый канал пройдет n л воды, если известно, что через второй вольется в 2 раза больше тогда, когда он будет открыт на a ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет n л. Если оба канала открыть одновременно, то в каждый час в водоеме прибывает a л воды.

Задача 5: Из автоцистерны сливали бензин в подземное хранилище по двум шлангам разного сечения. Первоначально a мин бензин поступал через оба шланга, затем первый шланг был отключен, и весь оставшийся бензин прошел через второй шланг за b мин. Но, если бы после первоначальных a мин был отключен не первый, а второй шланг, то весь оставшийся бензин прошел бы через первый шланг за c мин.Сколько времени продолжалось бы переливание всего бензина из автоцистерны в хранилище только через один первый шланг?

Ответы и указания.

1.7500 жителей

2.162 км

3.600 кг

4. 140 руб.

5. 100 кг

6. 450(550) руб.

7. 1060,9 руб.

Примечание: Обратите внимание, что увеличение числа на 3% равносильно умножению его на 1,03, т.к. 100%+3%=103%=1,03. Тогда увеличив 2 раза величину данной суммы на 3%, получим: 1000*1,03*1,03=1060,9 (руб.)

8. на 25%

9. на 2%

10.оба класса справились одинаково

Указание: Найдите процентное отношение количества учащихся, решивших задачу, к количеству учащихся всего класса. Сравните полученные для каждого класса результаты.

Назад

1. Второе число больше первого на 25%
2. На 25%
3. На 20%
4. Площадь прямоугольника уменьшится на 9%
5. 83,6%; на 16,4%
6. На 38,8%
7. на 24,2%
8. 578 человек

Назад

1. 80 кг
2. в 1,03 раза
3. 150 т
4. 50 кг
5. 3 кг
6. 90 г эссенции и 710 г воды
7. ≈ 3%
8. 10 л

Назад

1. 45 и 20 лет
2. 18 учащихся катается и на коньках, и на лыжах; 6 учащихся катается только на коньках.
3. 0,6 кг никеля, 0,8 кг цинка и 2,6 кг меди.
4. 300, 200, 180.
5. 153 км.
6. 2,4 м, 4 м, 6 м.
7. 770, 525 и 630 рублей
8. 48000 рублей

Назад.

1. 153 руб, 102 руб, 153 руб.
2. 30, 36 и 27 грибов.
3. 5 г.
4. 20%, 25%
5. 25%, 20%.
6. 0,625%.
7. 95%
8. за 10,5 дней.

Назад.

1. 9 и 3.
2. 9 и 35.
3. Из 1-ой бочки $(a(p-q)((p+q)(ms-nz)+(m+n)(ps-qz)))/(p+q)(r-s)(mq-pn)$
4. 88 и 40 ведер.
5. 1520 рублей.

Назад.

1. За $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$ мин; $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ мин; $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин.

2. За $b+\sqrt{b^2-ab}, b-a+\sqrt{b^2-ab}, \sqrt{b(b-a)}$ дней. Задача имеет решение при b>a.

3. $\frac{0{,}4an}{11-n}; \frac{0{,}24an}{n-9}$.

4. $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$

5. $(a+c+\frac{ac}{b})$ мин.

Назад