# Последовательности. Пределы.

# Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim f(x)$$

# Основные теоремы о пределах

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim \left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim \left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

# Формулы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $0 < |q| < 1$

Если q > 1, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не существует.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\kappa / n^m) = 0$

# Правила вычисления пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1)Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = b + c$$

2)Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = b \cdot c$$

3)Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n : y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n : \lim_{n\to\infty} y_n = b : c$$

4)Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot b$$

# Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

# Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0\cdot\infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

# Раскрытие неопределенностей

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

# Раскрытие неопределенностей

Если f(x) – дробно – рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

# Примеры вычисления пределов

***Пример.*** **Вычислить**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1}.$$

***Решение.*** **Делим числитель и знаменатель дроби <ins>почленно</ins> на наивысшую из имеющихся степень переменной *n*, т.е. на *n*²** ($n^2$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-1} = = \frac{\infty}{\infty}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

# Раскрытие неопределенностей

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

# Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Формула справедлива также при ***x < 0***

***Следствия:***

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{tgx} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$

# Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$