

МОДУЛЬ №1

Моделирование, основные понятия и определения, виды и методы идентификации статических моделей

Лекция №1.

Моделирование, основные понятия и определения. Понятие моделирования, модели. Виды моделирования, виды моделей. Классификация моделей. Математическое моделирование, математические модели. Формы представления математических моделей. Структурные схемы и методы их преобразования. Теорема Мейсона. Системный синтез. Составление модели сложного технологического объекта как сложной системы на основе системного анализа и синтеза

1.1 Основные понятия и определения

- **Модель** – реально существующая или мысленно представляемая система, которая, замещая и отображая оригинал с определенной целью, находится с ним в отношениях подобия (сходства)
- **Объект** (от лат. *objectum* – предмет) – все, на что направлена человеческая деятельность. Любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом состояний и параметров.
- **Процесс** – определенная совокупность действий, направленных на достижение поставленной цели.
- **Система** – целенаправленное множество объектов любой природы .
- Таким образом, можно сказать, что **система** – это совокупность взаимосвязанных элементов и компонентов, имеющая вполне конкретную структуру и вполне конкретное целевое назначение.
- **Элемент системы** – часть системы, не подвергаемая дальнейшему делению.

- **Моделирование** – замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом (моделью) и познание свойств оригинала путем исследования свойств модели.
- **Моделирование** – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания.
- **Моделирование** – замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели

1.2. Цели и принципы моделирования

- Создавая модель объекта, исследователь познает объект, т. е. выделяет его из окружающей среды и строит его формальное описание.
- *Основные цели моделирования:*
 - описание объекта;
 - объяснение объекта;
 - прогнозирование поведения и свойств объекта.

Моделирование базируется на нескольких основополагающих принципах

- 1. **Принцип информационной достаточности** – при полном отсутствии информации об объекте построение его модели невозможно. Существует некоторый уровень априорной информации об объекте, только при достижении которого может быть построена адекватная модель. При наличии полной информации об объекте построение его модели не имеет смысла.
- 2. **Принцип осуществимости** – создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля.

- 3. **Принцип множественности моделей** – создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реального объекта (системы), которые интересуют исследователя. Для полного исследования объекта необходимо достаточно большое количество моделей, отражающих исследуемый объект с разных сторон и с разной степенью детализации.
- 4. **Принцип агрегатирования** – в большинстве исследований систему целесообразно представить как совокупность подсистем, для описания которых оказываются пригодными стандартные схемы.
- 5. **Принцип параметризации** – модель строится в виде известной системы, параметры которой неизвестны.

1.3 Аксиомы теории моделирования

- **Аксиома 1.** Модель не существует сама по себе, а выступает в тандеме с некоторым материальным объектом, который она представляет (замещает) в процессе его изучения или проектирования.
- **Аксиома 2.** Для естественных материальных объектов модель вторична, т. е. появляется как следствие изучения и описания этого объекта (например, модель солнечной системы). Для искусственных материальных объектов (создаваемых человеком или техникой) модель первична, так как предшествует появлению самого объекта (например, модель самолета, модель двигателя).

- **Аксиома 3.** *Модель всегда проще объекта. Она отражает только некоторые его свойства, а не представляет объект «во всем великолепии». Для одного объекта строится целый ряд моделей, отражающих его поведение или свойства с разных сторон или с разной степенью детальности. При бесконечном повышении качества модели она приближается к самому объекту.*
- **Аксиома 4.** *Модель должна быть подобна тому объекту, который она замещает, т. е. модель в определенном смысле является копией, аналогом объекта. Если в исследуемых ситуациях модель ведет себя так же, как и моделируемый объект, или это расхождение невелико и устраивает исследователя, то говорят, что модель адекватна оригиналу. Адекватность – это воспроизведение моделью с необходимой полнотой и точностью всех свойств объекта, существенных для целей данного исследования.*

- **Аксиома 5.** *Построение модели не самоцель. Она строится для того, чтобы можно было экспериментировать не с самим объектом, а с более удобным для этих целей его представителем, называемым моделью*

Модели характеризуются тремя основными признаками

- ● принадлежности к определенному классу задач (например, управление технологическими процессами, управление техническими объектами, планово-экономические задачи и т. д.);
- ● принадлежности к определенному классу объектов (физические, биологические и т. д.);
- ● способом реализации.

- По способу реализации модели подразделяются на материальные и идеальные.
- Материальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические, функциональные характеристики объекта.
- Идеальное моделирование отличается от материального тем, что основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслеобразной и всегда носит теоретический характер. Идеальное моделирование является первичным по отношению к материальному

- ***Материальные модели объединяются в три основных подкласса***
- ● геометрически подобные, воспроизводящие пространственно геометрические характеристики оригинала (макеты зданий, муляжи и т. д.);
- ● воспроизводящие с масштабированием в пространстве и во времени свойства оригинала той же природы, что и модель (например, модели судов);
- ● воспроизводящие свойства оригинала в моделирующем объекте другой природы (например, электрогидравлические аналогии) или основанные на изоморфизме между формально описанными свойствами оригинала и объекта (все разновидности электронного моделирования).

- Существует две основных разновидности *материального моделирования*: **натурное и аналоговое моделирование**. Оба вида основаны на свойствах геометрического или физического подобия. Теория подобия как раз и занимается изучением условий подобия явлений.
- **Натурное** – это такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный аналог, допускающий исследование (в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и объектов на объект на основе теории подобия
- **Аналоговое** – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально. В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов

Идеальное моделирование разделяют на два основных типа: интуитивное и научное моделирование

- **Интуитивное** – моделирование, основанное на интуитивном (необоснованном с позиций формальной логики) представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации или не нуждающемся в ней. Примером интуитивной модели окружающего мира можно считать жизненный опыт любого человека, его умения и знания, полученные от предков. Роль интуитивных моделей в науке чрезвычайно высока.
- **Научное** – это всегда логически обоснованное моделирование, использующее минимальное число предположений, принятых в качестве гипотез на основании наблюдения за объектом моделирования

- *Концептуальной моделью называется содержательная модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знаний, занимающихся изучением объекта моделирования.*
- *Концептуальные модели бывают логико-семантическими, структурно-функциональными и причинно-следственными.*
- *Логико-семантическая модель является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты.*

- В работах по моделированию технических систем материальное моделирование называют *реальным* и конкретизируют иначе .
- Видами реального моделирования технических систем и процессов являются ***натурное и физическое моделирование***. К натурному моделированию относят научный эксперимент, комплексные испытания, производственный эксперимент.
- К физическому моделированию – моделирование в реальном масштабе времени, моделирование в нереальном (измененном) масштабе времени. При реальном моделировании исследования могут выполняться на самом объекте, на его части или на его модели.

● *Функции моделей*

- модель – средство осмысления действительности;
- модель – средство общения;
- модель – средство обучения и тренировки;
- модель – средство постановки эксперимента (компьютерный эксперимент).

2 Математическое моделирование

Основные понятия и определения

- *математическая модель – совокупность математических объектов (уравнений, систем уравнений и неравенств, алгебраических выражений и т. д.), описывающих языком математических символов исследуемый объект и его отношения с окружающим миром. Это определение мы и примем за базовое в данной работе.*
- *Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта*

- Преимущества математического моделирования по сравнению с натурным экспериментом:
- экономичность (сбережение материальных, человеческих, временных и финансовых ресурсов);
- возможность моделирования гипотетических объектов;
- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;
- возможность изменения масштаба времени;
- простота многоаспектного анализа;
- возможность построения прогнозов на основе выявления общих закономерностей;
- наличие и универсальность технического и программного обеспечения для моделирования.

Алгоритм построения модели

- *Технологии моделирования*
- 1) определение цели моделирования;
- 2) разработка концептуальной модели;
- 3) формализация модели;
- 4) программная реализация модели;
- 5) планирование модельных экспериментов;
- 6) реализация плана эксперимента;
- 7) анализ и интерпретация результатов моделирования.

● **Соответственно, общая схема моделирования имеет следующий вид :**

- 1) проблема;
- 2) постановка задачи;
- 3) описание исходных данных;
- 4) формализация задачи, выбор временной и пространственной шкал модели;
- 5) выбор метода построения модели;
- 6) планирование эксперимента;
- 7) получение и обработка экспериментальных данных;
- 8) идентификация неизвестных характеристик модели;
- 9) выбор метода решения задачи;
- 10) вычислительный эксперимент;
- 11) анализ и интерпретация результатов моделирования;
- 12) принятие решений об использовании результатов;
- 13) практическое использование модели.

● *Алгоритм построения аналитической модели*

- 1. Выявление противоречия и формулирование проблемы.
- 2. Определение объекта исследования. Постановка задачи (задач) исследования.
- 3. Анализ априорной информации. Формулирование гипотезы исследования.
- 4. Выбор входных и выходных факторов.
- 5. Формализация задачи.
- 6. Построение модели.
- 7. Планирование и проведение эксперимента.
- 8. Интерпретация результатов моделирования.
- 9. Оценка пригодности модели.
- 10. Решение задачи оптимизации (если таковая имеется).
- 11. Использование модели. Документирование результатов.

● *Алгоритм построения эмпирической модели*

- 1. Выявление противоречия и формулирование проблемы.
- 2. Определение объекта исследования. Постановка задачи (задач) исследования.
- 3. Анализ априорной информации. Формулирование гипотезы исследования.
- 4. Выбор входных и выходных факторов.
- 5. Формализация задачи.
- 6. Планирование и проведение эксперимента.
- 7. Обработка результатов эксперимента.
- 8. Построение модели.
- 9. Проверка адекватности модели.
- 10. Интерпретация результатов моделирования.
- 11. Оценка пригодности модели.
- 12. Решение задачи оптимизации (если таковая имеется).
- 13. Использование модели. Документирование результатов.

- *Цель планирования эксперимента – определить количество факторов и их уровней для получения необходимой и достаточной информации об объекте исследования.*
- **Этап проверки адекватности модели (для эмпирических моделей)**
- *Адекватность (от лат. *adaequatus* – приравненный) модели характеризует ее соответствие экспериментальным данным. Проверка осуществляется по специальным критериям*
- **Этап интерпретации результатов моделирования**
- *Интерпретация – «перевод» для пользователя результатов моделирования исследуемого объекта с языка математики на язык вербального описания (в схемы, графики, таблицы и т. д.).*

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

- **Планирование и проведение эксперимента**
- *Планирование эксперимента – раздел математической статистики,*
- *изучающий рациональную организацию измерений и наблюдений*
- **Планирование эксперимента обеспечивает:**
 - **одновременное варьирование всех факторов по специальным правилам;**
 - **использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;**
 - **выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов;**
 - **минимизацию числа опытов, ресурсов (финансовых, временных, материальных, человеческих).**
- **В основе построения эмпирических моделей лежит теория многофакторного эксперимента (МФЭ), разработанная Р. Фишером в 30-е гг. XX в., которая опирается на изучение состояния и поведения объекта при одновременном изменении нескольких входных факторов.**

- *Качественный эксперимент устанавливает сам факт наличия объекта, процесса или явления, но при этом не дает никаких количественных характеристик.*
- *Количественный эксперимент не только фиксирует сам факт существования того или иного объекта, процесса или явления, но и позволяет установить соотношение между количественными характеристиками поведения исследуемого объекта и количественными характеристиками внешнего воздействия.*

- **Фактор** – некоторая переменная величина, принимающая в каждый момент времени определенное значение из своей области определения и отражающая внешнее воздействие на объект или его отклик на это воздействие.
- **Уровень фактора** – конкретное значение фактора из его области определения при экспериментальном исследовании объекта.

- Различают следующие факторы:
- *контролируемые и управляемые* – это факторы, для которых можно не только зарегистрировать их уровень, но и задать в каждом опыте любое возможное значение;
- *контролируемые, но не управляемые* – это факторы, уровни которых можно только регистрировать, но задавать в каждом опыте определенное значение практически невозможно;
- *неконтролируемые* – это факторы, уровни которых не регистрируются исследователем, он даже может не подозревать об их существовании

- Во время экспериментального исследования объект рассматривается как «черный ящик»



Выбор уровней факторов

Совокупность областей определения входных факторов назовем **факторным пространством**.

Планирование эксперимента начинают с выбора **нулевого уровня** каждого входного фактора, в качестве которого может быть взята любая точка факторного пространства эксперимента.

Но одной точки – нулевого уровня – для проведения эксперимента и получения необходимой информации недостаточно. Нужны еще точки.

Построение плана эксперимента – это выбор точек (уровней входных факторов) относительно нулевого.

Для определения других уровней входных факторов вводится **интервал варьирования каждого входного фактора**

- *Верхний уровень входного фактора, следует интервал варьирования прибавить к нулевому уровню данного фактора, а чтобы определить нижний уровень – вычесть интервал варьирования из нулевого уровня.*
- К интервалу варьирования входного фактора предъявляются следующие требования:
- он не может быть менее ошибки, с которой измеряется данный фактор, иначе уровни фактора будут неразличимы;
- он не может быть слишком большим, т. е. нижние и верхние уровни не должны покидать области определения фактора и области проведения эксперимента.

● Обычно при первичном планировании эксперимента количество уровней по всем входным факторам выбирают одинаковым. Тогда количество опытов в эксперименте ($N_э$) может быть определено по формуле

$$N_э = p_э^{k_э},$$

где $p_э$ – число уровней каждого входного фактора;
 $k_э$ – число входных факторов, исследуемых в эксперименте.

Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ является линейной, то достаточно реализовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет в эксперименте только два уровня, т. е.

$$N_э = 2^{k_э}.$$

Такой план эксперимента называется **планом первого порядка**

- Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ является нелинейной, то достаточно реализовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет три уровня. Такой план называется *планом второго порядка*

$$N_3 = 3^{k_3}.$$

● Полный факторный эксперимент

- *Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания всех уровней всех входных факторов (например, $N_2 = 2^{k_2}$, $N_3 = 3^{k_3}$).*
- Условия полного факторного эксперимента записывают в виде таблицы – *матрицы планирования эксперимента.*
- *Для эксперимента, исследующего объект с двумя входными факторами, каждый из которых изменяется по двум уровням, матрица планирования имеет следующий вид*
- Матрица планирования полного факторного эксперимента

Матрица планирования полного факторного эксперимента $N_2 = 2^2$

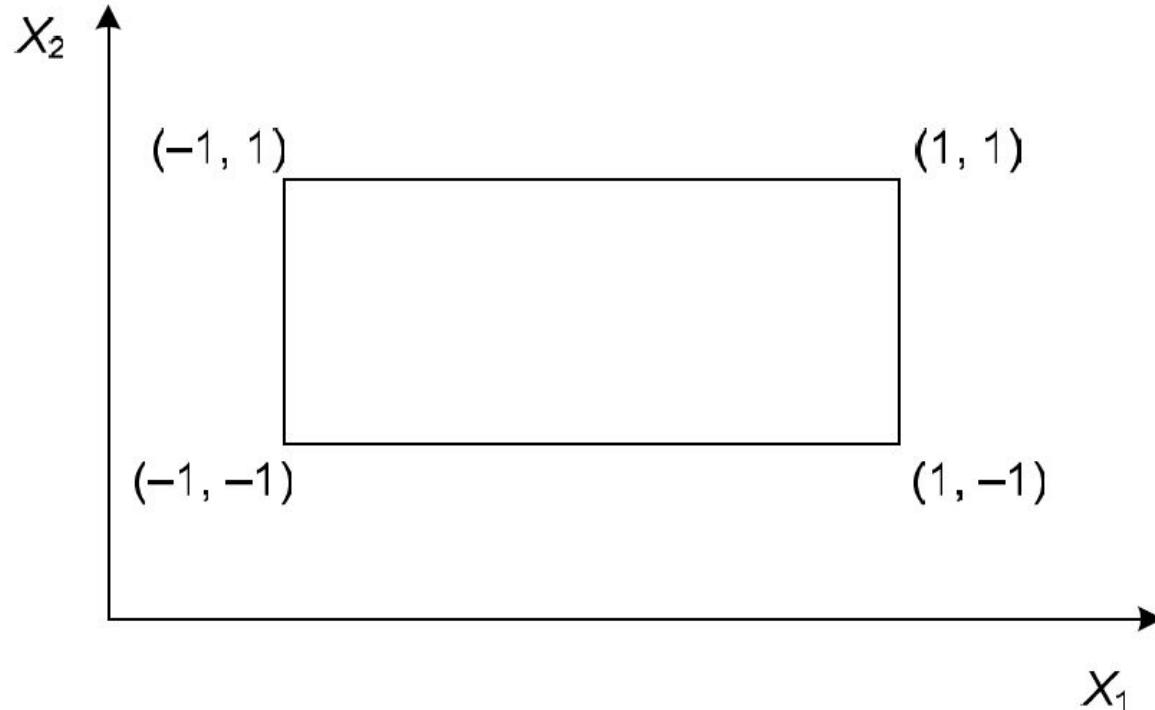
| № п/п | X_1 | X_2 | $Y_{\text{эксп}}$ |
|----------|-------|-------|--------------------|
| 1 | – | – | $Y_{1\text{эксп}}$ |
| 2 | – | + | $Y_{2\text{эксп}}$ |
| 3 | + | – | $Y_{3\text{эксп}}$ |
| 4 | + | + | $Y_{4\text{эксп}}$ |

Примечание. Знаком «+» обозначены верхние уровни факторов, знаком «–» – нижние.

● Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента $N = 22$.

Если выбрано два нижних и два верхних уровня, то они обозначаются как

- «-2» (второй нижний),
- «-1» (первый нижний),
- «+1» (первый верхний)
- «+2» (второй верхний).



● *Проведение эксперимента*

- Перед проведением эксперимента необходимо выяснить следующее:
- 1) можно ли установить выбранные уровни входных факторов на используемом для эксперимента оборудовании и удерживать их во время опыта;
- 2) возможно ли возникновение негативных последствий от реализации выбранных сочетаний уровней факторов;
- 3) возможно ли проведение параллельных опытов во время эксперимента;
- 4) когда были проверены и откалиброваны измерительные приборы.
- Параллельными называются опыты, в которых уровни факторов повторяются. Рекомендуется повторять эксперименты не менее трех раз.

- Если требуется установить только количественную связь между входными и выходными факторами, то такой эксперимент часто называют *интерполяционным*.

● Вопросы для самоконтроля

- 1. Что такое эксперимент?
- 2. Что такое планирование эксперимента?
- 3. Обозначьте цели планирования эксперимента.
- 4. Что такое опыт?
- 5. Какие виды экспериментов существуют?
- 6. Что такое план эксперимента?
- 7. Что такое нулевой уровень фактора? Как он выбирается?
- 8. Что такое интервал варьирования? Как он выбирается?
- 9. Что такое полный факторный эксперимент?
- 10. Что такое матрица планирования эксперимента?
- 11. Назовите свойства матрицы полного факторного эксперимента.
- 12. Что такое дробная реплика?
- 13. Что такое рандомизация? Какова цель проведения рандомизации?
- 14. Что такое экстремальный эксперимент?
- 15. Что такое интерполяционный эксперимент?