

Дискретная математика



Множество – это совокупность определенных различаемых объектов таких, что для любого объекта можно установить, принадлежит объект данному множеству или нет.

- Множество, которое подчиняется лишь такому ограничению, может содержать объекты почти любой природы.

Георг Кантор определил множество
так:

Множество — это многое,
мыслимое как целое.

Например:

- - множество всех станций Московского метро;
- - множество левых ботинок;
- - множество натуральных чисел: 1, 2, 3, 4 и т. д.;
- - множество символов, доступных специальному печатающему устройству;
- - множество кодов операций конкретного компьютера.

- множество всех натуральных чисел: 1, 2, 3, . . . Обозначим N . Часто 0 считают натуральным числом. Множество N с добавлением 0 обозначается N_0
- - множество всех натуральных чисел, не превосходящих 100.
- - множество всех решений уравнения

$$|\sin x| = 1$$

Множество обозначают заглавными буквами, а его элементы – прописными.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Говоря об определенном множестве, мы полагаем, что для каждого объекта имеется две возможности: элемент либо входит в множество $x \in X$, либо нет $x \notin X$.

Мощность множества – количество его элементов.

Обозначение мощности: $|A|$.

- Множество, не содержащее элементов, называется *пустым множеством* и обозначается \emptyset .

$$|\emptyset| = 0$$

В зависимости от их мощности множества различают как *конечные* или *бесконечные*.

Конечные множества могут состоять из одного или нескольких элементов.

Способы задания множества:

- Перечисление всех элементов множества (**список**), например, множество однозначных неотрицательных чисел

$$X = \{0,1,2,3,\dots,9\}.$$

- Множества часто рассматриваются как “неупорядоченные совокупности элементов”, хотя иногда полезно подчеркнуть, что, например

$$X = \{0,1,2\} = \{2,1,0\} = \{2,0,1\}.$$

- Выясним далее, какие из приведенных определений верные:

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

$$C = \{5, 6, 6, 7\}.$$

$$D = \{B, C\}.$$

Порождающая процедура

- Описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. Тогда элементы множества - все объекты, которые могут быть получены (построены) с помощью такой процедуры.

- Множество M_{2^n} натуральных степеней двойки.
- Порождающую процедуру зададим рекуррентно:

$$m \in M_{2^n} ; 2m \in M_{2^n}$$

- Какое множество задается рекуррентной формулой:

$$x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} \cdot n$$

Задание множества описанием его элементов (разрешающая процедура)

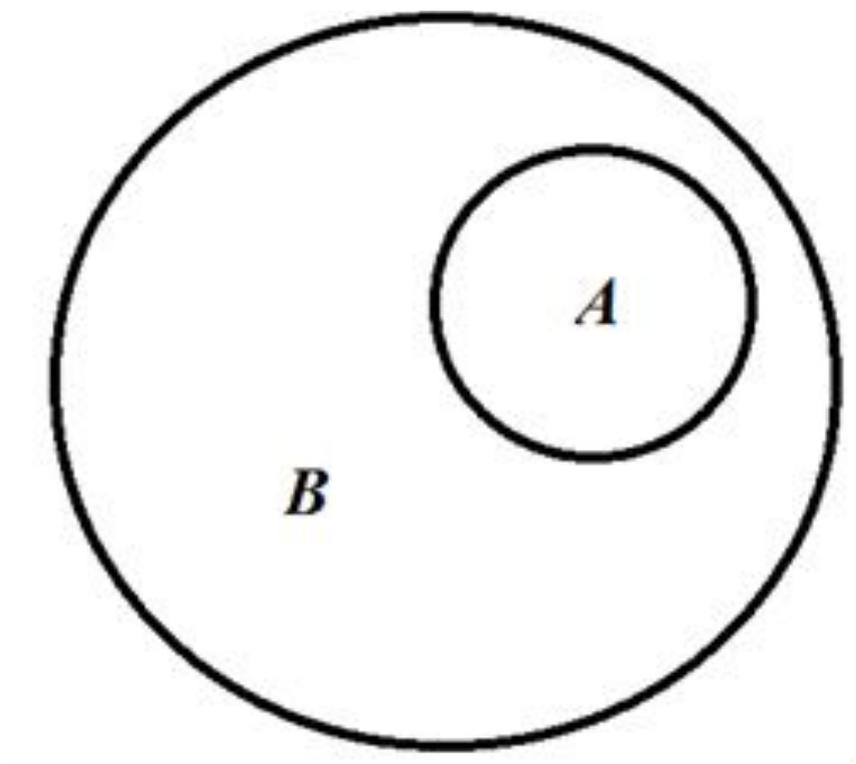
указание общего свойства, которым обладают все элементы множества, например, множество четных натуральных чисел

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

или

$$X = \{x : x = 2n, \forall n \in N\};$$

Множество A называют **подмножеством множества** B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является также элементом множества B .



Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B и наоборот,

т.е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

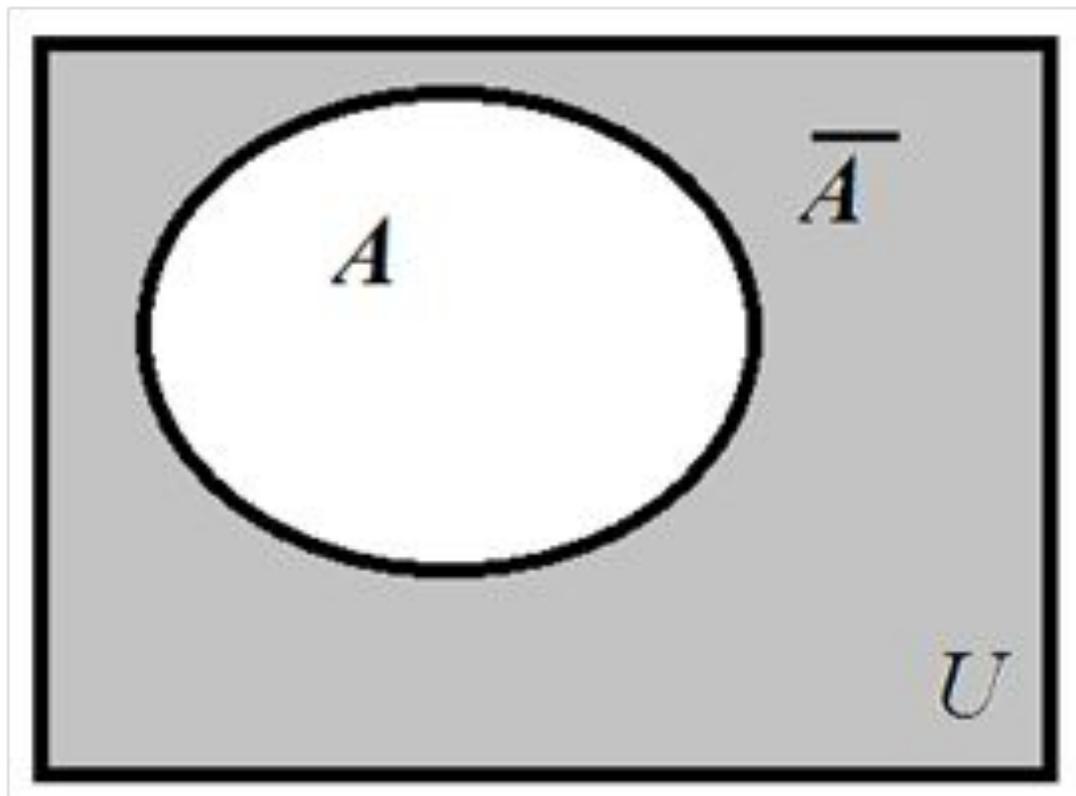
Другими словами, два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество U называется **универсальным множеством** (множество всех подмножеств) для некоторой системы множеств, если каждое множество этой системы является подмножеством U , т.е.

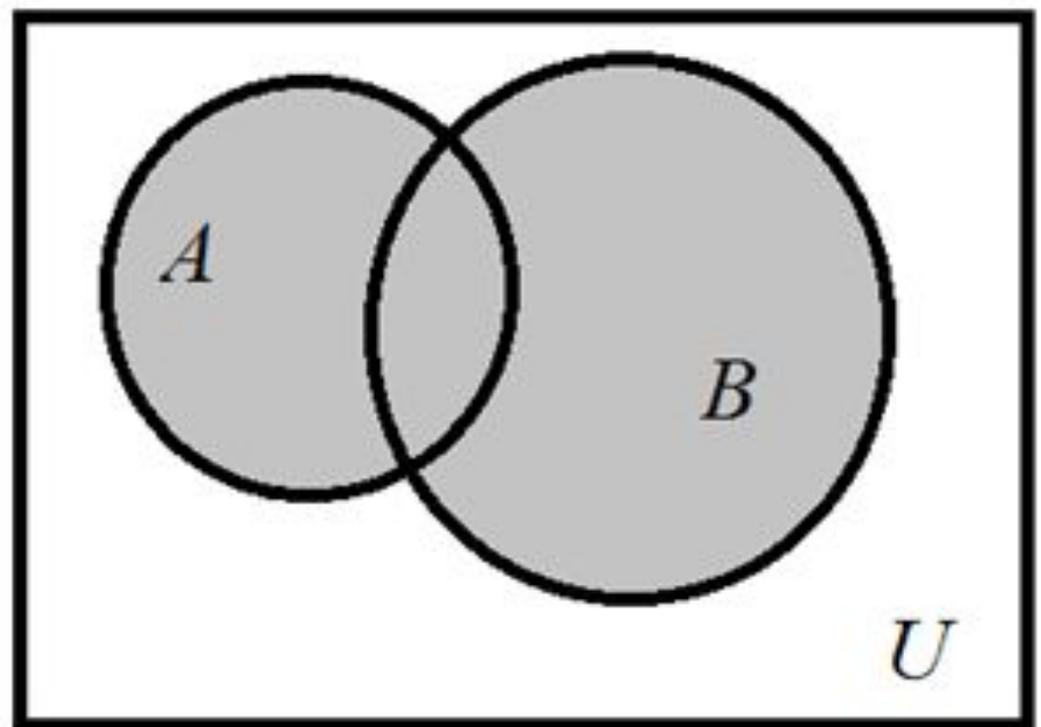
$$A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U \dots$$

Дополнением множества $A(\bar{A})$

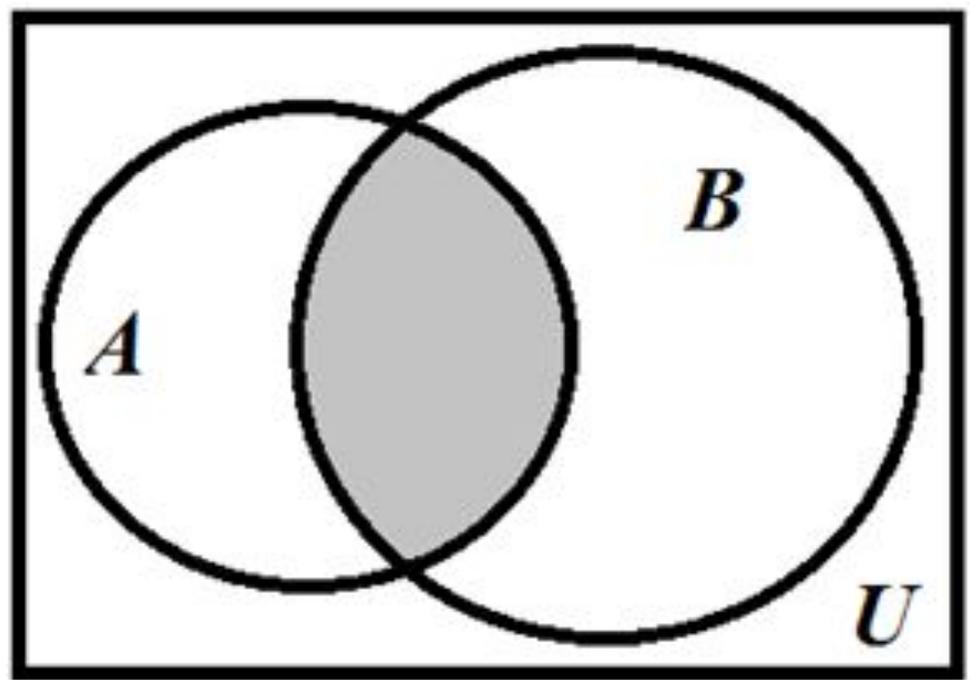
называется множество, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества, которые не входят в множество A .



Объединением двух множеств A и B ($A \cup B$) называется множество C , состоящее из тех элементов, которые принадлежат или множеству A , или B , или A и B одновременно.

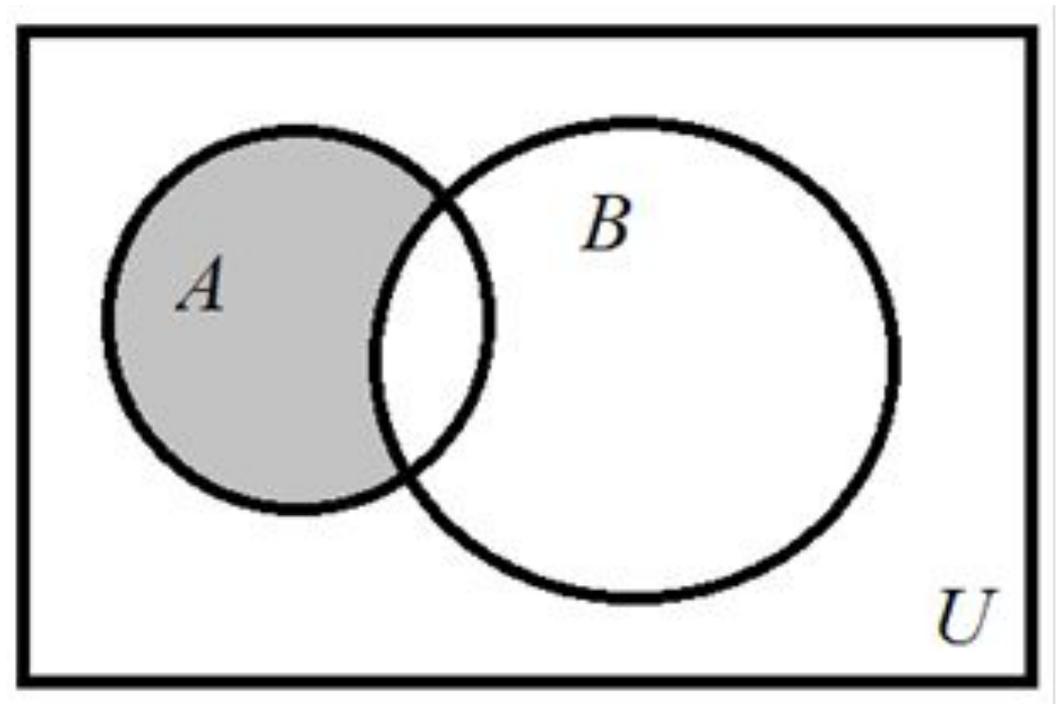


Пересечением двух множеств A и B ($A \cap B$) называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.



Разностью двух множеств A и B ($A - B$ или $A \setminus B$) называется множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B :

$$A - B = A \cap \bar{B}$$



Прямое (декартовое) произведение

двух множеств A и B называется множество, состоящее из упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит множеству A , а второй – множеству B .

Пример 1: Заданы два множества:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ и } B = \{0, 2, 4, 5\}.$$

Определить множества $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ и их мощность.

Решение:

Множество $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ состоит из пяти элементов, следовательно мощность этого множества равна 5: $|A| = 5$.

Аналогично, $B = \{0, 2, 4, 5\}$ содержит 4 элемента: $|B| = 4$.

По определению *пересечение* двух множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов, следовательно,

$$A \cap B = \{0, 2\} \text{ и } |A \cap B| = 2.$$

По определению *объединение* двух множеств состоит из всех элементов, которые принадлежат только множеству A , или только множеству B , или множествам A и B одновременно, следовательно,

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\} \text{ и } |A \cup B| = 7.$$

Множество $A \setminus B$ является *разностью* двух множеств A и B и состоит из элементов множества A , которые одновременно не принадлежат множеству B , следовательно $A \setminus B = \{-2, -1, 1\}$ и $|A \setminus B| = 3$.

Аналогично, $B \setminus A = \{4, 5\}$ и $|B \setminus A| = 2$.

Пример 2

- Прямое (декартово) произведение:

$$A \times B = \{(-2, 0); (-2, 2); (-2, 4); (-2, 5); (-1, 0); (-1, 2); (-1, 4); (-1, 5); (0, 0); (0, 2); (0, 4); (0, 5); (1, 0); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 5)\}$$

- $B \times A = \{(0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (4, -2); (4, -1); (4, 0); (4, 1); (4, 2); (5, -2); (5, -1); (5, 0); (5, 1); (5, 2)\}$

Пример 2

- Из этого примера видно, что

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20.$$

Пример 3:

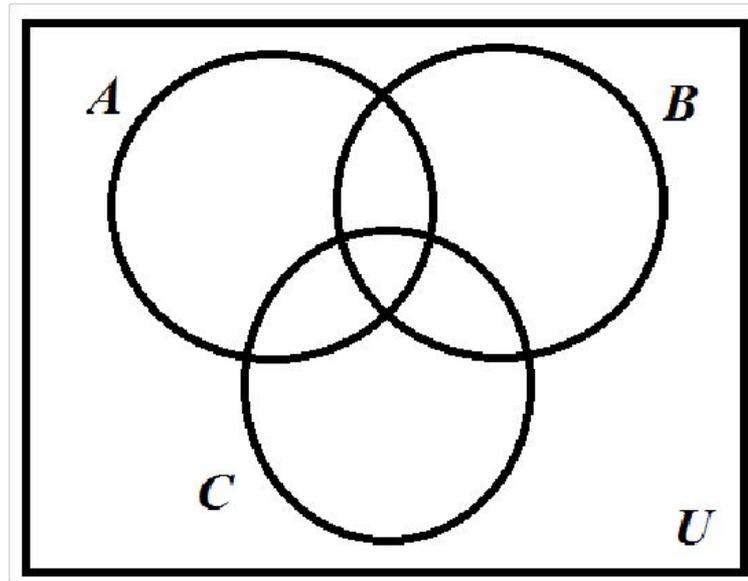
На диаграмме Вьенна-Эйлера изобразить результат действия

$$(A \cap \bar{B}) - C.$$

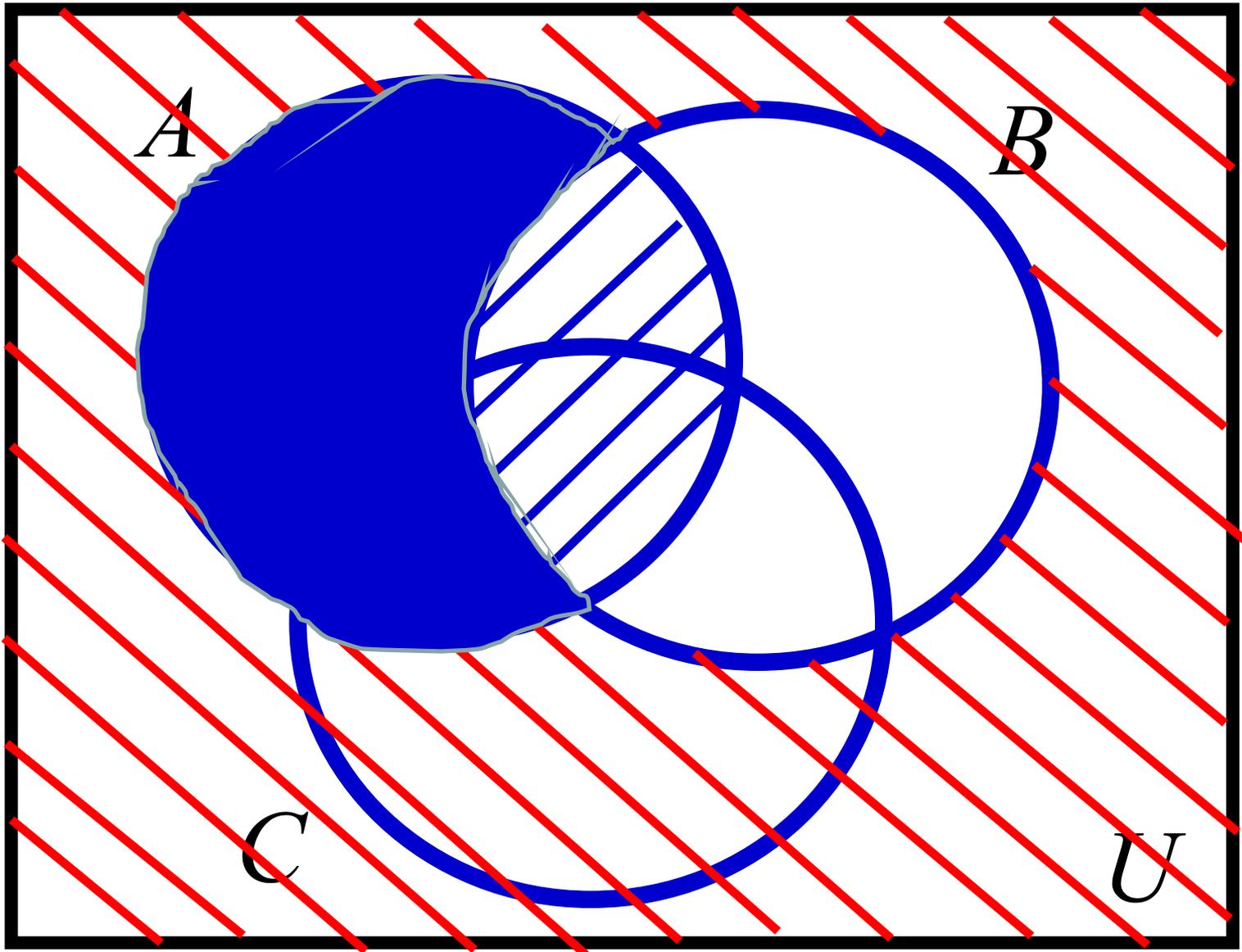
Решение:

Решаем по действиям. На каждой копии диаграммы необходимо восстановить контуры всех множеств, участвующих в задании. Они должны пересекаться в самом общем виде. Самый большой контур – универсальное множество. Оно содержит в себе все множества задачи.

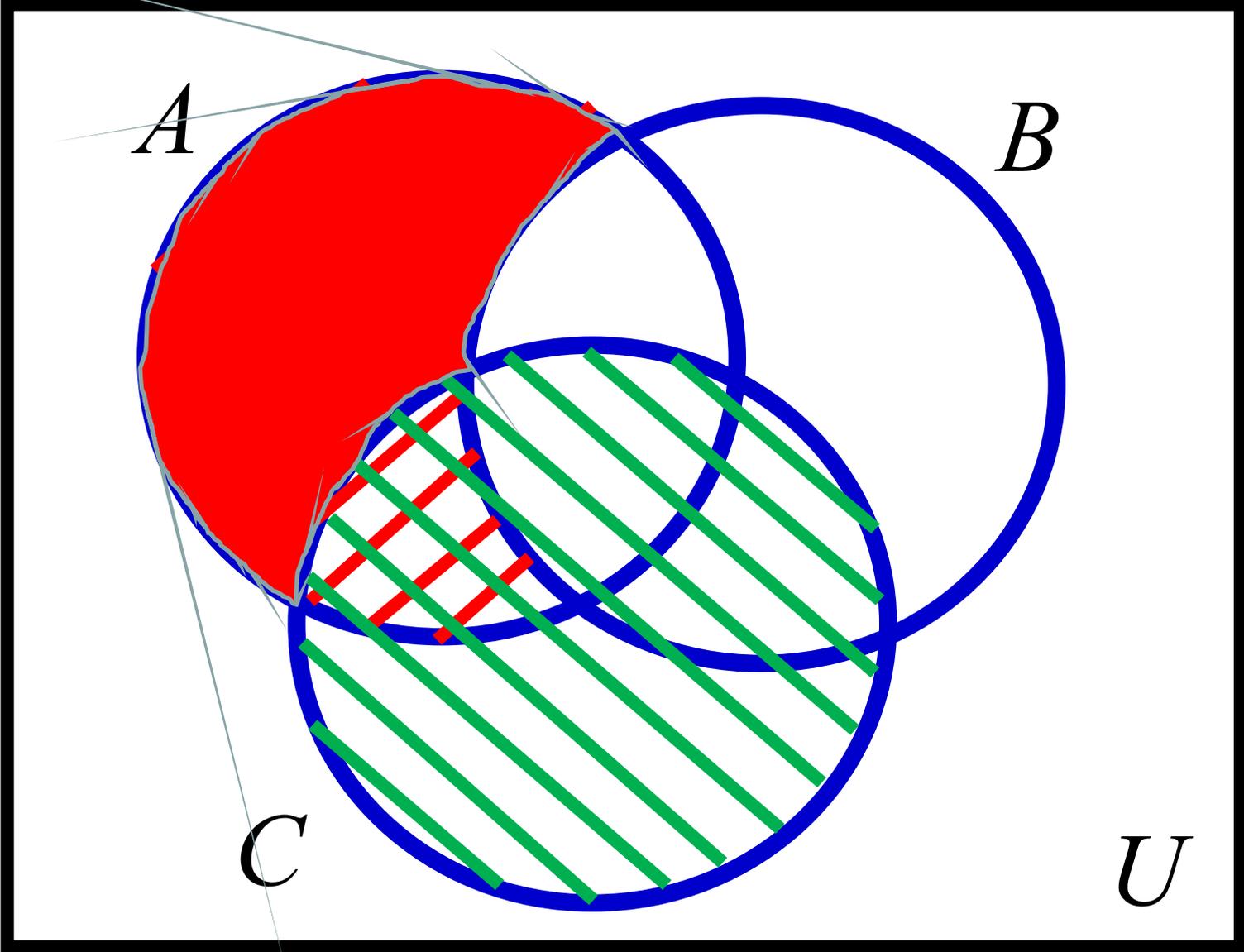
Основа диаграммы для выполнения каждого действия.



1) Изобразим на 1 диаграмме множества, вступающие в 1 действие (действие в скобках). Каждое множество заштриховываем штриховкой своего вида (с наклоном влево, с наклоном вправо, горизонтальной или вертикальной). Множества штрихуются *целиком*, независимо от их пересечения с другими множествами диаграммы.



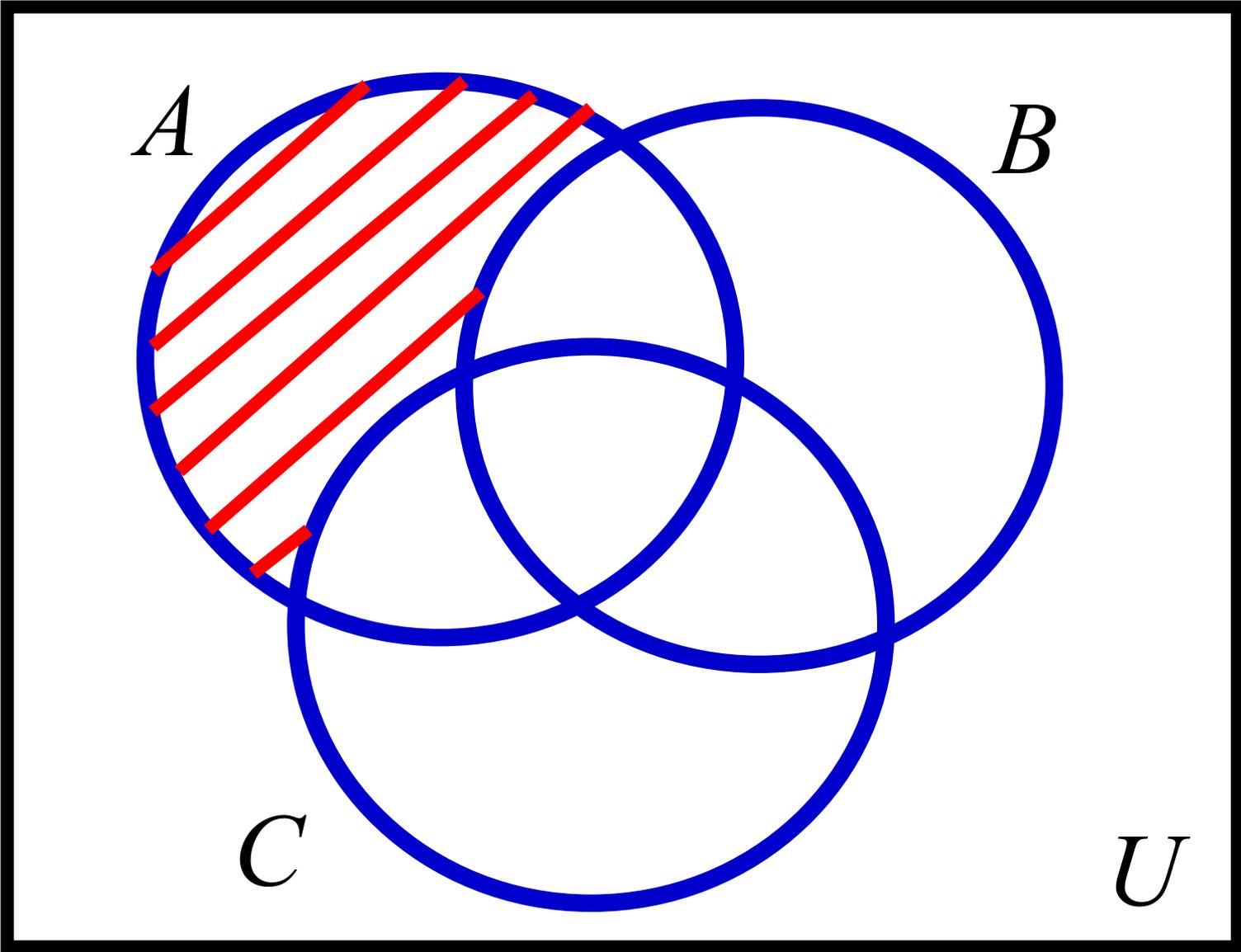
2) На 2 копии диаграммы надо заштриховать множества, вступающие во второе действие: это результат первого действия и C . У каждого из ЭТИХ множеств на рисунке *одинарная* штриховка своего вида (цвета).



3) На 3 копии диаграммы надо заштриховать множество, которое будет являться ответом.

Штриховка – *одинарная*.

Заметим, что на каждой копии диаграммы, кроме последней, должно быть ровно два вида штриховки, а на последней копии – один.



**Выучить или переписать в
тетрадь определения на
слайдах**

2, 3, 6-8, 10, 12-20