
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение линии на плоскости.

- **Определение.** Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Уравнение прямой на плоскости

- **Определение.** Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A , B , C не равны нулю одновременно.

Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

Расположение прямой относительно координатных осей

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $Bu + C = 0$ }- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, и перпендикулярной вектору с координатами (a, b) (нормальному вектору), получают на основе использования скалярного произведения двух векторов.

- Пусть, точка $M(x, y)$ – произвольная точка прямой, тогда уравнение прямой:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

Заметим: в общем уравнении прямой, коэффициенты a и b – координаты нормального вектора

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

- Пусть в плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять к нулю соответствующий числитель.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

- Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить: $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad \text{т.е.} \quad y = kx + b$

то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

- **Определение.** Каждый ненулевой вектор (m, n) , параллельный прямой, называется **направляющим вектором прямой.**

Заметим: компоненты направляющего вектора удовлетворяют условию $Am + Bn = 0$

- Уравнение прямой с направляющим вектором (m, n) , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Уравнение прямой в отрезках

- В общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$,
разделив на $-C$, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Последнее уравнение называется
уравнением прямой в отрезках

*Геометрический
смысл
коэффициентов в
том, что
коэффициент a
является
координатой
точки пересечения
прямой с осью Ox ,
 a b – координатой
точки пересечения
прямой с осью Oy .*

Нормальное уравнение прямой

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ то получим:

$$x \cos \phi + y \sin \phi - p = 0$$

**нормальное уравнение
прямой.**

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а ϕ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .

Знак \pm
нормирующего
множителя надо
выбирать так,
чтобы $\mu \cdot C < 0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

- **Определение.** Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Угол между прямыми.

- **Определение.** Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Заметим: угол между прямыми можно находить через косинус угла между направляющими или между нормальными векторами прямых

Расстояние от точки до прямой.

- Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Уравнение пучка прямых:

- Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку S , называется **пучком прямых с центром S** .
- Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S , то уравнение $\alpha (A_1x + B_1y + C_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2) = 0$, где α, β — какие угодно числа, не равные одновременно нулю, определяет прямую, также проходящую через точку S .