Математика ППИ.

ЛЕКЦИЯ № 14.

Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ

- 5. Вычисление объемов тел и площадей поверхностей тел вращения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 340-375;

[3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 229-250;

[14] Л.К. Потеряева, Г.А. Таратута. Курс высшей математики IV. Челябинск: Челябинский военный авиационный краснознамённый институт штурманов, 2002 г.с. 80-94.

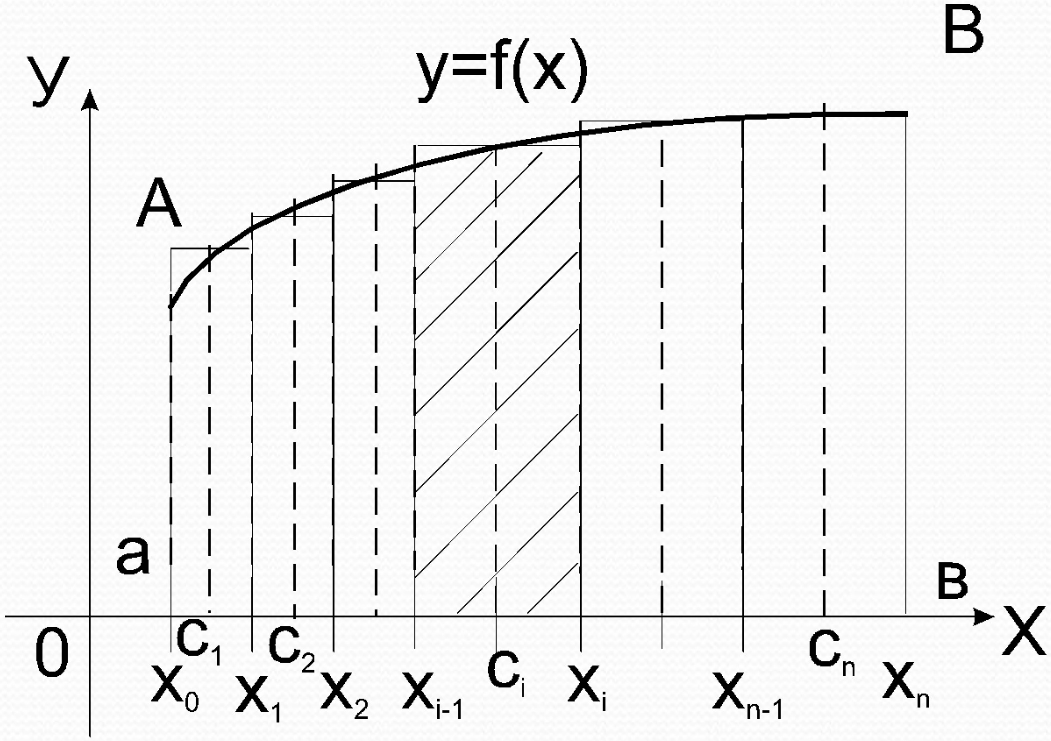
Вычисление объемов тел вращения

Теорема. **Пусть функция *f(x)* непрерывна и неотрицательна на отрезке *[a;b]*. Тогда тело, образованное вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *y=f(x)*, имеет объем *V*, который может быть найден по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a;b]$ точками $a=x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n=b$ на n частей;

причем $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, обозначим $\lambda = max\ \Delta x_i$.



На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1} ; x_i]$ выберем произвольно точку c_i ; а также на каждом частичном отрезке $[x_{i-1} ; x_i]$ построим прямоугольник, который при вращении вокруг оси Ох опишет цилиндр с высотой Δx_i и радиусом основания $f(c_i)$, объем которого

$$\Delta Vi = \pi \cdot f^2(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Найдем объем соответствующего ступенчатого тела, составив интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x_i$$

- Для непрерывной функции *f(x)* предел интегральной суммы существует при $\lambda \to 0$ ($n \to \infty$) и равен объему рассматриваемого тела вращения

$$V = \pi \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

- Таким образом,

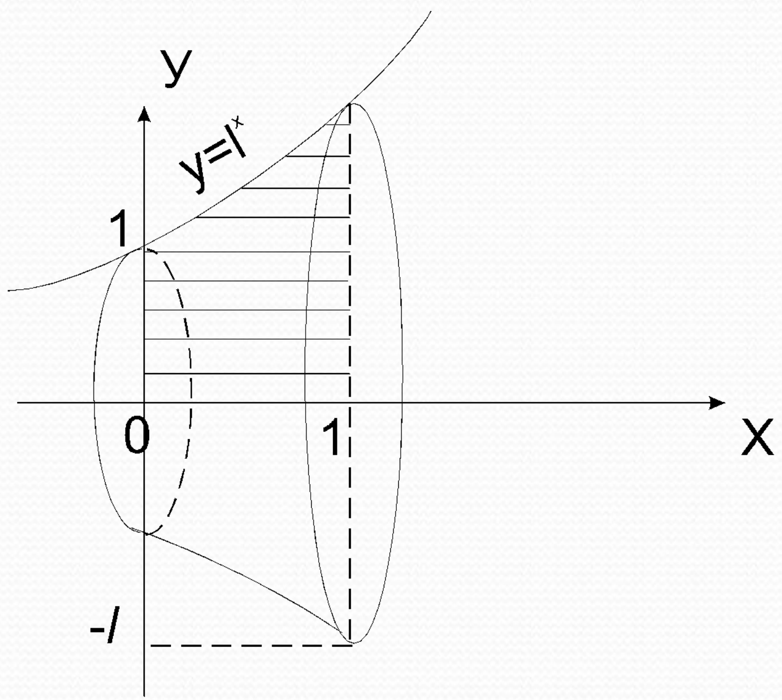
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

что и требовалось доказать

- **Пример.**

  Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=1$ и осями координат .

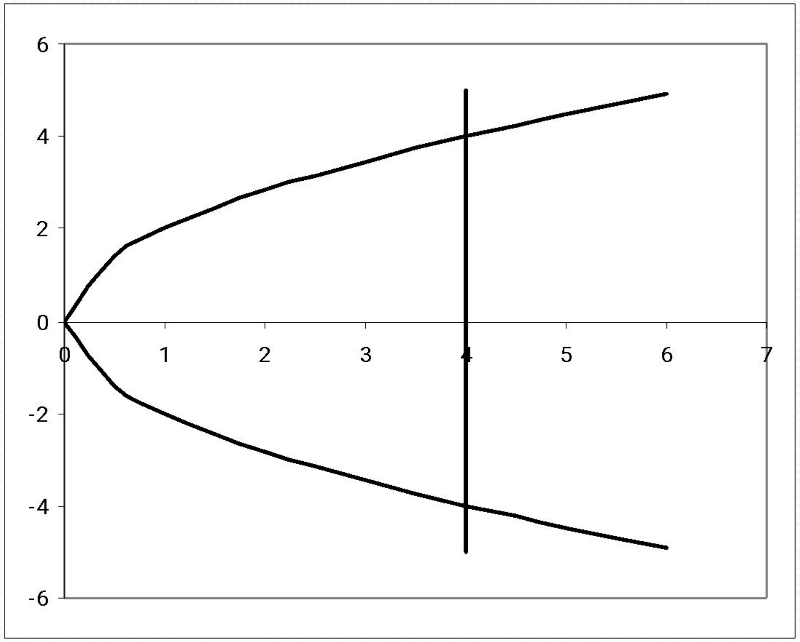
- Решение.



Фигура, ограниченная данными линиями, является криволинейной трапецией, поэтому получим

$$V=\pi\int_0^1 (e^x)^2\,dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}\,d(2x)=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)\approx 10{,}1$$

Пример. Найти объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной прямой $x = 4$ и кривой $y^2 = 4x$, вокруг оси Оу.



$$V = \pi \int_{-4}^{4} 16 dy - \pi \int_{-4}^{4} \left(\frac{y^2}{4} \right)^2 dy = 16\pi x \Big|_{-4}^{4} - \pi \frac{y^5}{5 \cdot 16} \Big|_{-4}^{4} = 16\pi \cdot 8 - \pi \left(\frac{4^5}{80} - \frac{(-4)^5}{80} \right) = 128\pi - \frac{4^4 \pi}{10} = \frac{512\pi}{5}$$

Площадь поверхности вращения

- Пусть **дана поверхность**, образованная **вращением** дуги линии *y=f(x)*, $a \le x \le b$, **относительно оси *Ox*.**
- Предположим, что на отрезке *[a;b]* функция *y=f(x)* и её производная *f΄(x)* непрерывны и, кроме того,

  f(x) ≥ 0. Тогда **площадь поверхности вращения можно вычислить по формуле**

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

- **Пример.** Найти площадь поверхности шара радиуса R.
- Решение. Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \le x \le R$, вокруг оси Ox. По формуле находим

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2$$

- Площадь поверхности вращения кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

можно вычислить по формуле

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

- Площадь поверхности вращения кривой, заданной в полярной системе координат уравнением

$\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$

можно вычислить по формуле

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Контрольная работа № 3

Найти интегралы

$$1)\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$$

$$2)\int\frac{6xdx}{3x^2+1}$$

$$3)\int\frac{2xdx}{\sqrt[3]{5+4x^2}}$$

$$4)\int\frac{4\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$5)\int\frac{3x+4}{\sqrt{8x-4x^2-3}}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$$

$$6)\int\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}dx$$