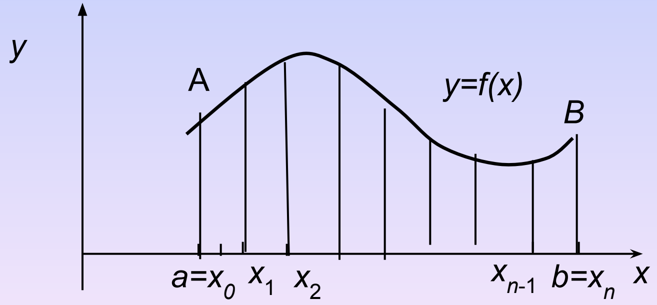
Определенный интеграл

Лекция 2.2

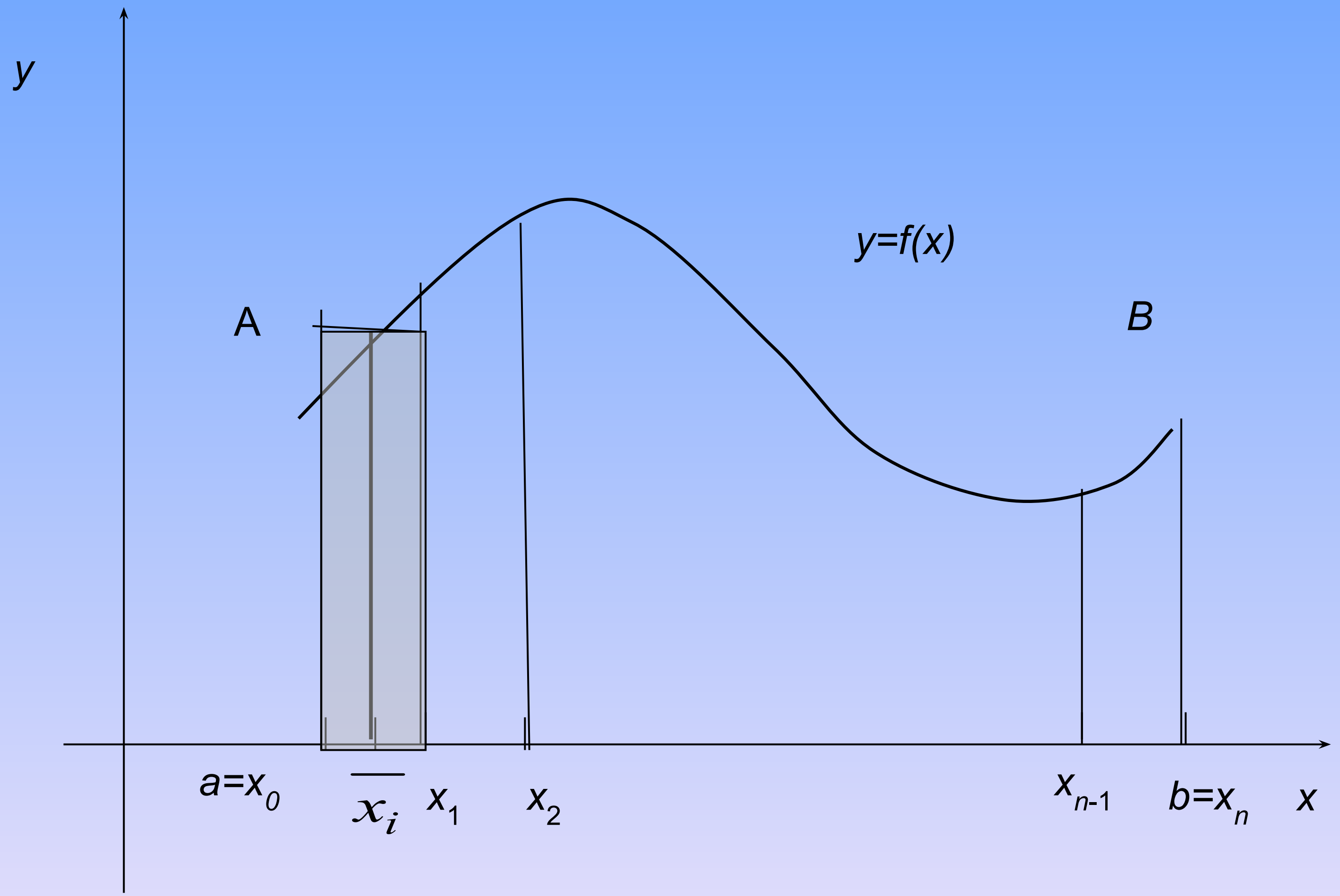
Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ох.Такую фигуру называют криволинейной трапецией



Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = b$.
При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,2,..,n$ и высотой $h = f\left(\overline{x_i}\right)$, где $\overline{x_i}$ -произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.



y
y=f(x)
A
B
a=x0
xi
x1
x2
xn-1
b=xn
x

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i \ .$$

Определенный интеграл

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f(x)$

на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл

Определение.

Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определенный интеграл

Замечание.

С геометрической точки зрения

при $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx$ равен

площади криволинейной трапеции

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

5. $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$;

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

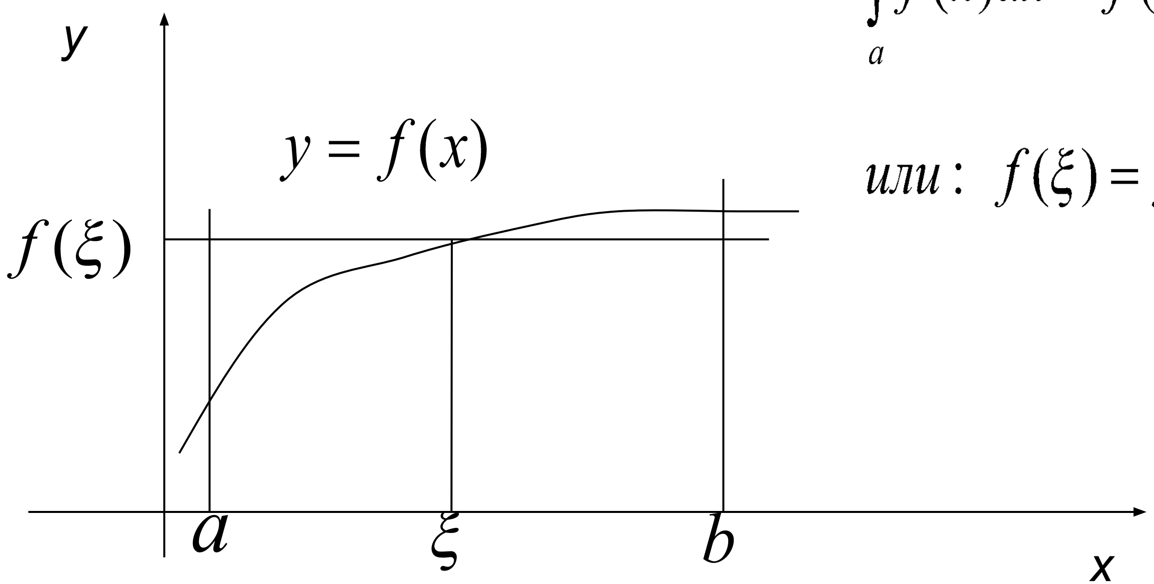
7. $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a),$$

$$\text{или}:\ f(\xi) = f_{ср.} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$



Вычисление определенного интеграла

Теорема.

Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой **Ньютона-Лейбница**, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример

Вычислить $\int_0^3 e^x dx$

$$\int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 =$$

$$= e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

Вычисление интеграла

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Пример

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt \\ x = 0,\ t = 1 \\ x = 3,\ t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt =$$

$$= \int_1^2 2\left(t^2 - 1\right)dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Теорема (интегрирование по частям в определенном интеграле).

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \ .$$

Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Несобственный интеграл

Замечание.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не является определенным интегралом.

Считается по определению, что

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел

конечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, называемый

несобственным, сходится.

Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

Пример

- Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$$

- (или установить его расходимость)

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln(x^2+4)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(b^2+4)-\ln 4) = \infty$$

- Этот несобственный интеграл расходится.

<u>*Пример*</u>

Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} =$$

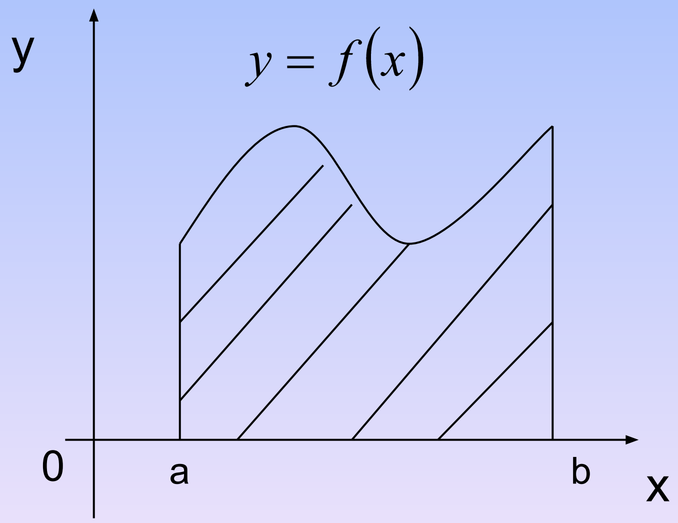
$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{b}{2} = \frac{1}{2} arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

Этот интеграл является сходящимся.

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

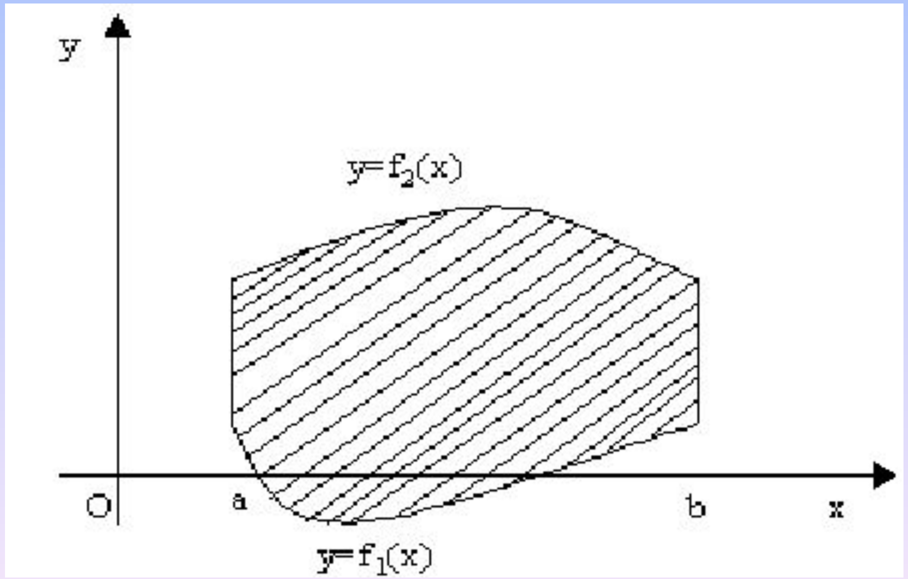
- ***Площадь фигуры в декартовых координатах.***



Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Вычисление площадей

- Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, (где $f_1(x) \le f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находят по формуле:



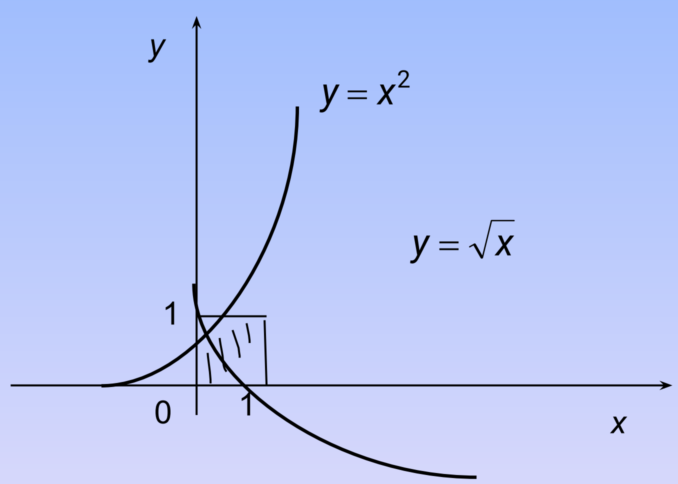
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Пример

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Решение:



$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ x = 0; \\ x^3 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 1. \end{cases}$$

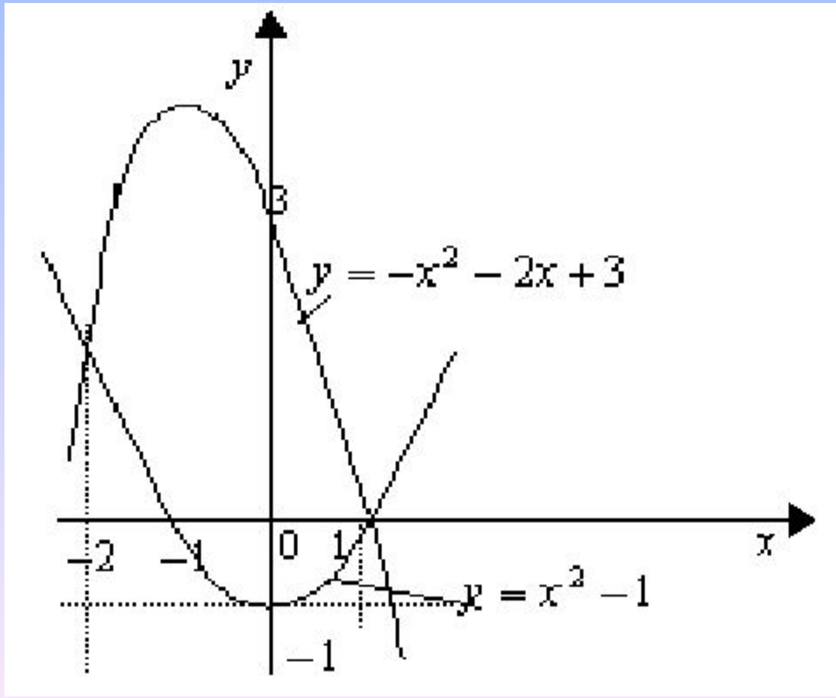
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= (\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (кв.ед.)$$

Примеры

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = -x^2 - 2x + 3$ и $y = x^2 - 1$



Решение:

Приравняем левые части уравнений и найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$-x^2 - 2x + 3 = x^2 - 1$$

$$x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$$

Продолжение

- Получим $S = \int\limits_{-2}^{1} \left[\left(-x^2 - 2x + 3 \right) - \left(x^2 - 1 \right) \right] dx =$

$$\int\limits_{-2}^{1} \left(-2x^2 - 2x + 4 \right) dx = = -2 \int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 + x - 2 \right) dx =$$

$$-2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) \right] = -2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) =$$

$$= -2 \left(3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(-\frac{9}{2} \right) = 9 \;\; (кв.ед.)$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!