ТЕМА 3.
Системы n линейных уравнений с m неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли. Методы их решения. Однородная система линейных уравнений

Будем рассматривать системы из *p* линейных алгебраических уравнений с *n*-неизвестными переменными (*p* может быть равно *n*) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные переменные,

$a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ - коэффициенты (некоторые действительные или комплексные числа),

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ - свободные члены (также действительные или комплексные числа).

Такую форму записи СЛАУ

В **матричной форме** записи эта система уравнений имеет вид $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

- основная матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- матрица-столбец неизвестных переменных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- матрица-столбец свободных членов.

Если к матрице *A* добавить в качестве *(n+1)-ого* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую **расширенную матрицу** системы линейных уравнений. Обычно расширенную матрицу обозначают буквой *T*, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_n \end{array}\right)$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество.

- Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.
- Если система уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.
- Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.
- Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система

Решение элементарных систем линейных алгебраических уравнений

- Решение СЛАУ матричным методом (с помощью обратной матрицы)
- Решение СЛАУ Решение систем линейных уравнений методом Крамера
- Решение СЛАУ методом Гаусса

Решение СЛАУ матричным методом
(с помощью обратной матрицы)

Пусть система линейных алгебраических уравнений задана в матричной форме $A \cdot X = B$, где матрица *A* имеет размерность *n*х*n* и ее определитель отличен от нуля.

Так как $|A| \neq 0$, то матрица *A* – обратима, то есть, существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Решение СЛАУ Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, …, Δ_{x_n} - определители матриц, которые получаются из *A* заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого* столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Решение СЛАУ методом Гаусса

- Пусть нам требуется найти решение системы из *n* линейных уравнений с *n*-неизвестными переменными определитель основной матрицы которой отличен от 0.
- Суть метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных переменных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении останется только неизвестная переменная x_n. Такой процесс преобразования уравнений системы для последовательного исключения неизвестных переменных называется **прямым ходом метода Гаусса**. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находится x_n, с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется x_{n-1}, и так далее, из первого уравнения находится x_1. Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется **обратным ходом метода Гаусса**.

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$, так как мы всегда можем этого добиться перестановкой местами уравнений системы. Исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению системы прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее, к *n-ому* уравнению прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Система уравнений после таких преобразований примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Таким образом, переменная x_1 исключена из всех уравнений, начиная со второго.

Далее действуем аналогично, но лишь с частью полученной системы, которая отмечена на рисунке

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array}} \end{cases}$$

Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (в противном случае мы переставим местами вторую строку с *k-ой*, где $a_{k2}^{(1)} \neq 0$). Приступаем к исключению неизвестной переменной x_2 из всех уравнений, начиная с третьего (аналогично исключению x_1).

Так продолжаем прямой ход метода Гаусса пока система не примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

С этого момента начинаем обратный ход метода Гаусса: вычисляем x_n из последнего уравнения как $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, с помощью полученного значения x_n находим x_{n-1} из предпоследнего уравнения, и так далее, находим x из первого уравнения

Решение систем линейных алгебраических уравнений общего вида

В общем случае число уравнений системы *p* не совпадает с числом неизвестных переменных *n*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Такие СЛАУ могут не иметь решений, иметь единственное решение или иметь бесконечно много решений. Это утверждение относится также к системам уравнений, основная матрица которых квадратная и вырожденная.

Теорема Кронекера – Капелли

Прежде чем находить решение системы линейных уравнений необходимо установить ее совместность. Ответ на вопрос когда СЛАУ совместна, а когда несовместна, дает **теорема Кронекера – Капелли**: **для того, чтобы система из *p* уравнений с *n* неизвестными (*p* может быть равно *n*) была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть, *Rank(A)=Rank(T)*.**

А как же находить решение СЛАУ, если установлена ее совместность?

Для этого нам потребуется понятие базисного минора матрицы и теорема о ранге матрицы.

Минор наивысшего порядка матрицы *A*, отличный от нуля, называется **базисным**.

Из определения базисного минора следует, что его порядок равен рангу матрицы. Для ненулевой матрицы *A* базисных миноров может быть несколько, один базисный минор есть всегда.

Теорема о ранге матрицы

Если ранг матрицы порядка *p* на *n* равен *r*, то все элементы строк (и столбцов) матрицы, не образующие выбранный базисный минор, линейно выражаются через соответствующие элементы строк (и столбцов), образующих базисный минор.

Что нам дает теорема о ранге матрицы?

Если по теореме Кронекера – Капелли мы установили совместность системы, то выбираем любой базисный минор основной матрицы системы (его порядок равен r), и исключаем из системы все уравнения, которые не образуют выбранный базисный минор. Полученная таким образом СЛАУ будет эквивалентна исходной, так как отброшенные уравнения все равно излишни (они согласно теореме о ранге матрицы являются линейной комбинацией оставшихся уравнений).

В итоге, после отбрасывания излишних уравнений системы, возможны два случая:

1) Если число уравнений *r* в полученной системе будет равно числу неизвестных переменных, то она будет определенной и единственное решение можно будет найти методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

2) Если число уравнений *r* в полученной СЛАУ меньше числа неизвестных переменных *n*, то в левых частях уравнений оставляем слагаемые, образующие базисный минор, остальные слагаемые переносим в правые части уравнений системы с противоположным знаком.

- Неизвестные переменные (их *r* штук), оставшиеся в левых частях уравнений, называются **основными**.
- Неизвестные переменные (их *n* - *r* штук), которые оказались в правых частях, называются **свободными**.

Схитаем, что свободные неизвестные переменные могут принимать произвольные значения, при этом *r* основных неизвестных переменных будут выражаться через свободные неизвестные переменные единственным образом. Их выражение можно найти решая полученную СЛАУ методом Крамера, матричным методом или