Показательные неравенства

Выполнили обучающиеся 2 подгруппы 621 группы

Определение показательного неравенства:

Показательными неравенствами называются неравенства

вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решить неравенство - значит, найти все его решения или доказать, что их нет.

Показательная функция монотонно возрастает на множестве R, если a>1, монотонно убывает, если 0<a<1.

При решении показательных неравенств, необходимо помнить:

Показательно неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

равносильно неравенству такого же

смысла $f(x) > g(x)$

если $a > 1$

Показательно неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

равносильно неравенству

противоположного смысла $f(x) < g(x)$

если $0 < a < 1$

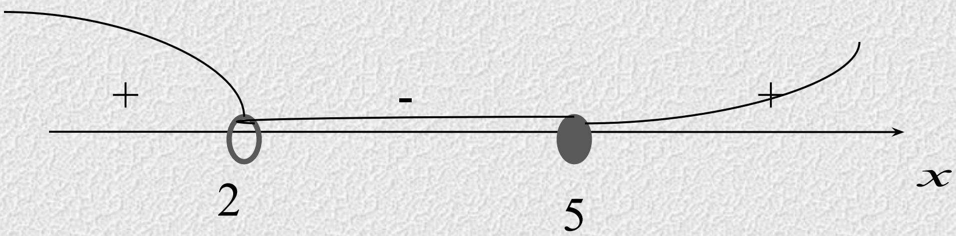
Рассмотрим методы решения показательных неравенств:

1. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим.

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4 \qquad 2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2 \qquad y = 2^x \; (2 > 1)$$

функция монотонно возрастает

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2 \qquad \frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0 \qquad \frac{x-5}{x-2} \leq 0$$



Ответ: $(2;5]$

2. Двойные неравенства:

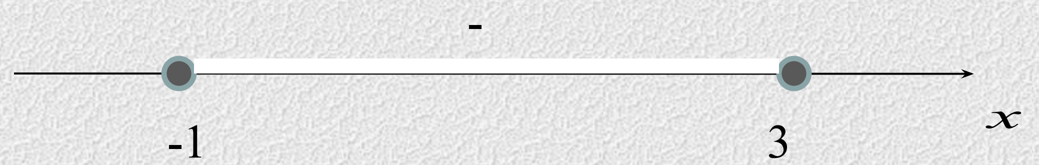
$$-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4$$

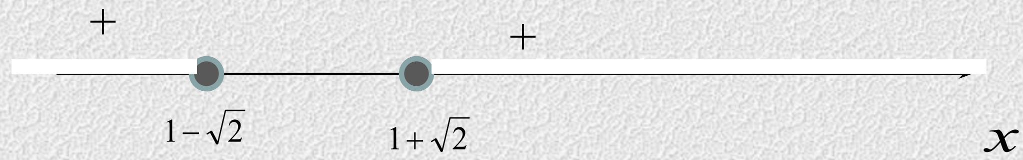
$$1 \le 3^{x^2-2x-1} \le 9$$

$$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 3^2; \end{cases}$$

$y = 3^x$, функция возрастает

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 1 \le 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 - \sqrt{2}, \\ x \ge 1 + \sqrt{2}; \end{array} \right. \end{cases}$$





Ответ: $\left[-1; 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; 3\right]$

3. Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам.

$$5^{2x}+4\cdot 5^{x}-5\geq 0$$

Пусть $5^{x}=t, t>0$

$$\begin{cases} t^{2}+4t-5\geq 0, \\ t>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t \geq 1 \\ t \boxtimes 0 \end{cases} \Rightarrow t \geq 1$$

Вернемся к переменной x: $5^{x}\geq 1 \rightarrow 5^{x}\geq 5^{0}$

Так как $y=5^{x}(5>1)$ монотонно возрастает, то $x\geq 0$

Ответ: $[0;+\infty)$

4. Метод вынесения общего множителя за скобки:

$$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$$

$$3^{x+2}-34\cdot 3^{x-1}<4\cdot 7^{x-1}-7^{x}$$

$$3^{x-1}\left(3^{3}-34\right)<7^{x-1}\left(4-7\right)$$

$$3^{x-1}\left(-7\right)<7^{x-1}\left(-3\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}>\left(\frac{3}{7}\right)^{1}$$

$y=\left(\frac{3}{7}\right)^{x}\left(0<\frac{3}{7}<1\right)$,функция монотонно убывает

$$x-1<1$$

$$x<2$$

$\mathit{Ответ}:\left(-\infty;2\right)$

5.Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным:

$$2^x + 2^{3-x} < 9$$

$$2^x + \frac{2^3}{2^x} - 9 < 0$$

Пусть $2^x = t, t > 0$

$$\begin{cases} t + \dfrac{8}{t} - 9 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2 - 9t + 8 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < t < 8 \\ t > 0; \end{cases} \qquad 1 < t < 8$$

Вернемся к переменной х: $y = 2^x \left(2 > 1\right)$ возрастает на все области определения

$$1 < 2^x < 8 \qquad 0 < x < 3$$

Ответ: (0;3)

Решить самостоятельно:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49.$$

$$3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq 27$$

$$5^{2x} + 4 \cdot 5^{x} - 5 \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$$

$$2^{x} + 2^{3-x} < 9$$

- Для создания презентаций использовали шаблон : ***Ранько Елена Алексеевна учитель начальных классов МАОУ лицей №21 г. Иваново***
- Примеры работы http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/pokazatelnye-neravenstva-0
- Интернет-ресурсы: Карандаши Интернет-ресурсы: Карандаши , Подставка Интернет-ресурсы: Карандаши , Подставка , Калькулятор Интернет-ресурсы: Карандаши , Подставка , Калькулятор , Ластик Интернет-ресурсы: Карандаши , Подставка , Калькулятор , Ластик , Угольник
- http://shkola.lv/?mode=lsntheme&themeid=8