Глава 3
Динамика механической системы и твердого тела

§ 1. Центр масс

§ 2. Внешние и внутренние силы

§ 3. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

§ 4. Теорема о движении центра масс

§ 5. Момент инерции

§ 6. Моменты инерции некоторых однородных тел

§ 7. Теорема Гюйгенса-Штейнера

§ 8. Теорема об изменении количества движения системы

§ 1. Центр масс

Механической системой называется совокупность материальных точек или тел, движения которых взаимосвязаны

Твердое тело - это материальная система, состоящая из частиц, образующих это тело

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек

m_k - масса k-ой точки;

$\vec{r}_k$ - её радиус-вектор

Массой системы называют сумму масс точек, образующих систему

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

Центром масс системы, или центром инерции, называют геометрическую точку, радиус-вектор которой

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \qquad (1)$$

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \qquad y_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \qquad z_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k z_k$$

При непрерывном распределении массы суммы переходят в интегралы

$$x_c = \frac{1}{M}\int_M x\,dm \qquad y_c = \frac{1}{M}\int_M y\,dm \qquad z_c = \frac{1}{M}\int_M z\,dm$$

Из (1) можно получить

$$M\vec{r}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \quad (*)$$

$$M\vec{v}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \quad (**)$$

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k \quad (***)$$

§ 2. Внешние и внутренние силы

Силы называются *внешними*, если они вызваны действием тел, не входящих в систему

$$\vec{F}^{e}$$

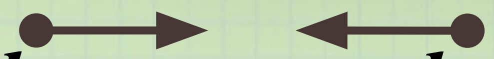
exterior - внешность

Силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему, называются *внутренними*

$$\vec{F}^{i}$$

interior - внутренность

$$\vec{F}_k^{\,i} \qquad \vec{F}_{k+1}^{\,i}$$



$k \qquad k+1$

$$\vec{F}_{k+1}^{\,i} = -\vec{F}_k^{\,i}$$

Свойства внутренних сил

1. Главный вектор внутренних сил системы равен 0

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} = 0$$

2. Главный момент внутренних сил равен 0

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{mom_0} \vec{F}_k^{\,i} = 0$$

§ 3. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы запишем основное уравнение динамики

$$\left.\begin{aligned} m_1\bar{a}_1 &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i \\ m_2\bar{a}_2 &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n\bar{a}_n &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Спроектируем на оси декартовой системы координат

$$\left.\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^{e} + F_{kx}^{i} \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^{e} + F_{ky}^{i} \\ m_n \ddot{z}_k &= F_{kz}^{e} + F_{kz}^{i} \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где ***k* = 1, 2, ... *n***

(3) – дифференциальные уравнения движения механической системы

§ 4. Теорема о движении центра масс

При изучении движения системы иногда достаточно знать движение центра масс (случай твердого тела)

В (2) сложим правые и левые части

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^{\,e} + \sum \vec{F}_k^{\,i} \qquad (4)$$

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^{\,e} + \sum \vec{F}_k^{\,i}$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^{\,e}}$$

– центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы, и к ней приложены внешние силы, действующие на систему

$$M \cdot \ddot{X}_C = \sum F_{kx}^e \qquad M \cdot \ddot{Y}_C = \sum F_{ky}^e \qquad M \cdot \ddot{Z}_C = \sum F_{kz}^e$$

Значение теоремы о движении центра масс

- Дает обоснование методам динамики точки
  Позволяет исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы

Следствия

1. Если $\sum \bar{F}_k^e = 0,$ то $\bar{a}_C = 0$ $\bar{V}_C = 0$

$$\bar{V}_C = \overline{const}$$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью (равномерно и прямолинейно) или находится в покое

2. Если не все силы равны нулю, а только проекции на какую-нибудь ось, например, ось X, т.е.

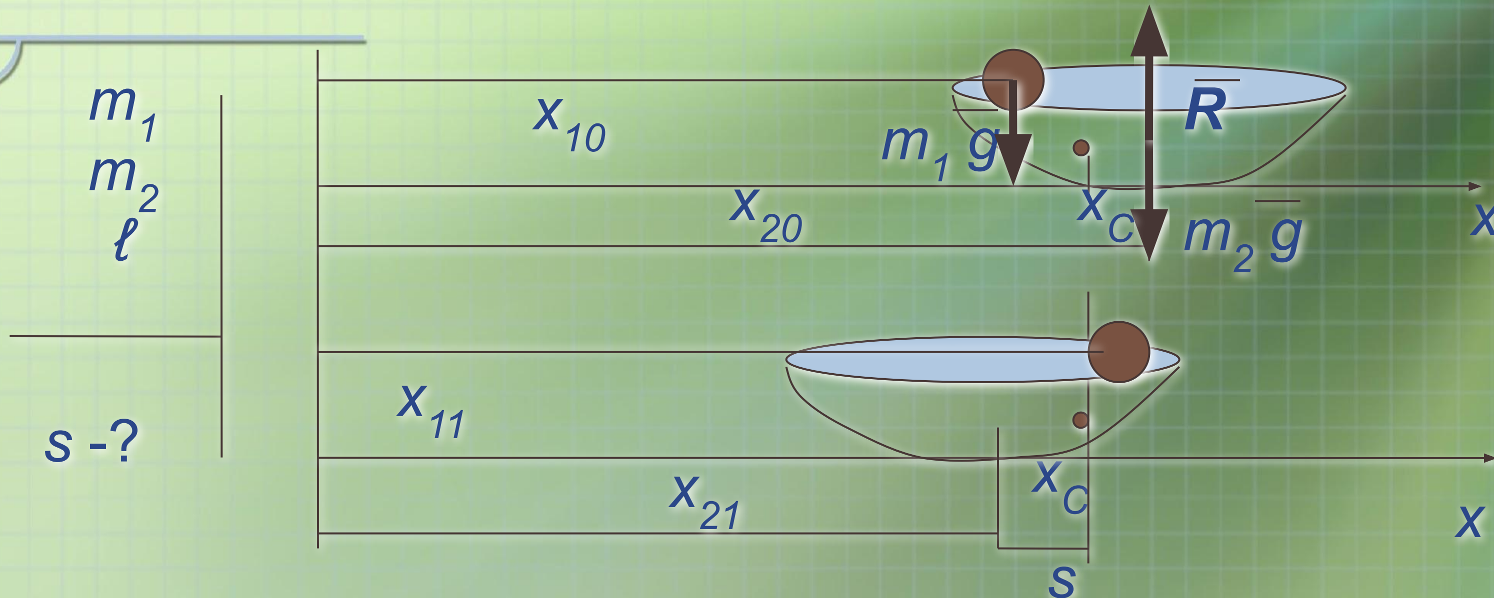
$$\sum_k F_{kx}^e = 0,$$

то $\ddot{X}_C = 0$ *или* $\dot{X}_C = V_{CX} = const$

Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная

Пример

Пусть человек массы m_1 перешел с одного края неподвижной лодки на другой. Масса лодки m_2. На какое расстояние и в какую сторону переместится лодка?



$$M\cdot\bar{a}_C=\sum_k \bar{F}_k^e \qquad (m_1+m_2)\cdot\bar{a}_C=m_1\bar{g}+m_2\bar{g}+\bar{R}$$

$$x:\ M\cdot a_{Cx}=0 \quad\Rightarrow\quad a_{Cx}=0 \quad\Rightarrow\quad V_{Cx}=0$$

$$X_{C0}=\frac{m_1x_{10}+m_2x_{20}}{m_1+m_2} \quad = \quad X_{C1}=\frac{m_1x_{11}+m_2x_{21}}{m_1+m_2}$$

$$m_1x_{10}+m_2x_{20}=m_1x_{11}+m_2x_{21} \qquad m_1(x_{10}-x_{11})=m_2(x_{21}-x_{20})$$

$$x_{11}=x_{10}+x_{отн}-x_{пер} \quad =x_{10}+\ell-s \qquad m_1(s-\ell)=m_2(-s)$$

$$x_{21}=x_{20}-s$$

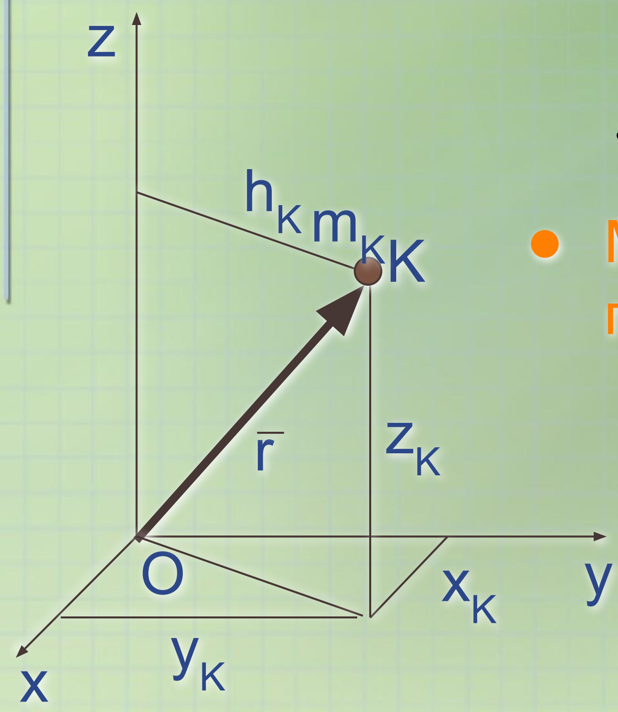
$$\boxed{s=\frac{m_1\ell}{m_1+m_2}=\frac{m_1\ell}{M}}$$

§ 5. Момент инерции

- Моментом инерции тела относительно точки O (или полярным моментом) называется величина

$$J_O = \sum_k m_k \cdot r_k^2$$

$$J_O = \sum_k m_k x_k^2 + \sum_k m_k y_k^2 + \sum_k m_k z_k^2$$



- Моментом инерции относительно плоскости XY называется величина

$$J_{пл\ XY} = \sum_k m_k \cdot z_k^2$$

YZ: $$J_{пл\ YZ} = \sum_k m_k \cdot x_k^2$$

XZ: $$J_{пл\ XZ} = \sum_k m_k \cdot y_k^2$$

- Осевым моментом инерции тела относительно оси Z называется величина

$$J_Z = \sum_k m_k \cdot h_k^2$$

Осевые моменты инерции

$$J_Z = \sum_k m_k \cdot \left(x_k^2 + y_k^2 \right)$$

$$J_X = \sum_k m_k \cdot \left(y_k^2 + z_k^2 \right)$$

$$J_Y = \sum_k m_k \cdot \left(z_k^2 + x_k^2 \right)$$

являются мерой инертности тела при вращательном движении

Центробежные моменты инерции

$$J_{xy} = \sum_k m_k \cdot x_k y_k \qquad J_{yz} = \sum_k m_k \cdot y_k z_k \qquad J_{zx} = \sum_k m_k \cdot z_k x_k$$

Свойства моментов инерции

1. $J_O = J_{пл\,YZ} + J_{пл\,XZ} + J_{пл\,XY}$

2. $J_X + J_Y + J_Z = 2J_O$

$[J_O] = [J_i] = [J_{ij}] = [J_{пл\,ij}] = кг \cdot м^2 \qquad i, j = X, Y, Z$

- Тело или систему тел можно заменить точечной массой, которая располагается на расстоянии $\boldsymbol{\rho_Z}$ от оси Z, тогда момент инерции можно записать в виде $J_Z = M \cdot \rho_Z^2,$ где M – масса всей системы; ρ_Z – радиус инерции

- Радиус инерции – это расстояние от оси Z, на котором должна быть расположена масса, равная массе всей системы, чтобы получить её момент инерции

Твердое тело – непрерывная система материальных точек с массами ***dm***, разбивая тело на элементарные части и подставляя в выражение для осевого момента,

$$J_Z = \sum_k m_k \cdot h_k^2 \Rightarrow J_Z = \int_{(V)} h^2 \cdot dm \quad \text{или} \quad J_Z = \int_{(V)} h^2 \cdot \rho \, dV$$

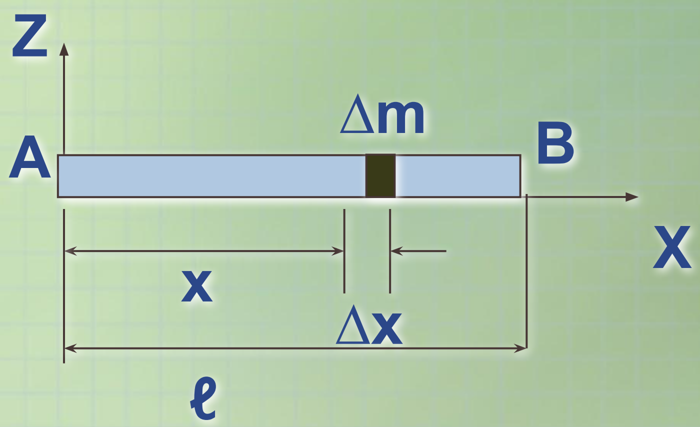
ρ – плотность, V – объем тела;

$$J_Z = \int_{(V)} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho \, dV$$

§ 6. Моменты инерции некоторых однородных тел

1.Тонкий однородный стержень длиной ℓ и массой m

Задан стержень AB, направим ось X вдоль стержня



На расстоянии x от оси Z выделим элемент Δx стержня

Масса этого элемента

Δm = mΔx/ℓ, m/ℓ - масса единицы длины стержня

Т.к. $x = h$

момент инерции стержня запишется

$$J_Z = \sum_k \Delta m_k h_k^2 = \sum_k \frac{m}{\ell} \Delta x \cdot x^2$$

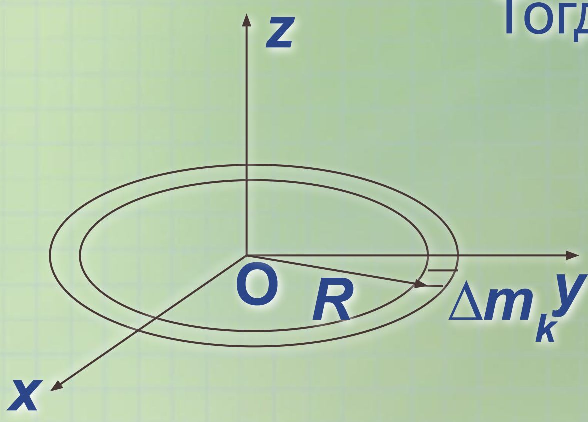
$$\Delta x \to 0$$

суммируем по всей длине стержня,

$$\boxed{J_Z = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{m}{\ell} \frac{\ell^3}{3} = \frac{m \cdot \ell^2}{3}}$$

2. Тонкий обруч (тонкое круглое однородное кольцо) радиусом R и массой m

- Однородный диск вращается вокруг оси Z, проходящей через центр масс однородного диска



Тогда осевой момент инерции обруча

$$J_Z = \sum_k \Delta m_k \cdot R^2$$

$$\downarrow\downarrow$$

$$J_Z = R^2 \cdot \sum_k \Delta m_k = m \cdot R^2,$$

т.к. толщиной обруча можно пренебречь, то

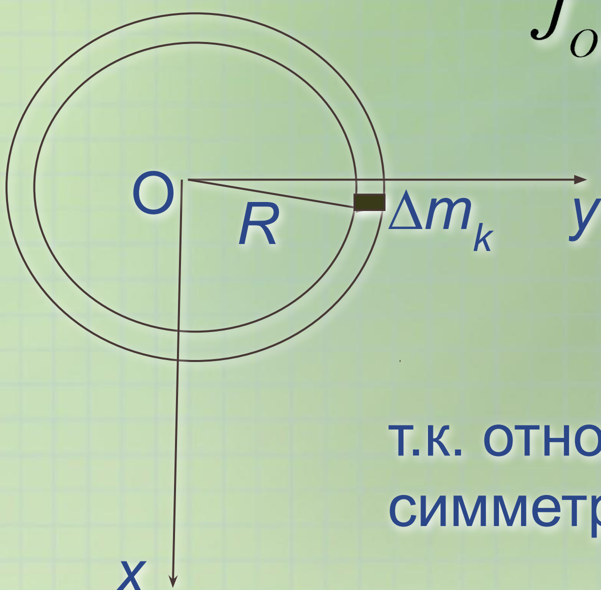
$$\boxed{J_O = J_Z = m \cdot R^2}$$

- полярный момент инерции обруча

- Найдем осевые моменты инерции диска относительно оси X или Y

По определению полярный момент инерции

$$J_O = \sum_k m_k \cdot r_k^2 = \sum_k m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \right)$$



По второму свойству моментов инерции

$$J_X + J_Y + J_Z = 2J_O,$$

т.к. относительно осей X и Y есть симметрия, то

$J_X = J_Y$ и

$$\boxed{J_X = J_Y = \frac{J_Z}{2} = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$

2’. Тонкая цилиндрическая оболочка радиусом R и массой m

- Осевой момент инерции такой оболочки относительно оси Z получается аналогичным образом, как и для кольца

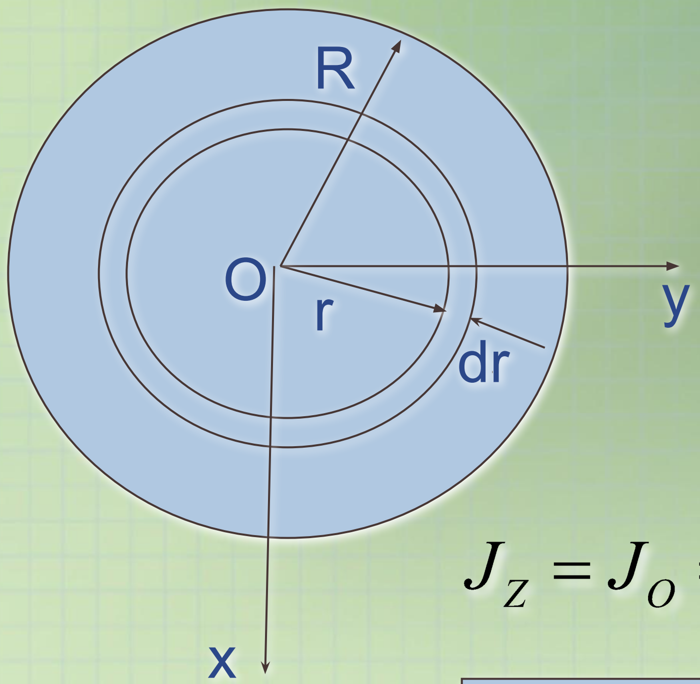
$$J_Z = m \cdot R^2$$

3. Тонкий круговой диск радиусом R и массой m

- Определим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr

Площадь этого кольца S = 2 πrdr, масса dm = ρ2 πrdr, где ρ – масса единицы площади пластины

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$



Для выделенного элементарного кольца

$$dJ_Z = dJ_O = r^2 dm = 2\pi\rho r^3 dr$$

Чтобы получить для всей пластины, проинтегрируем

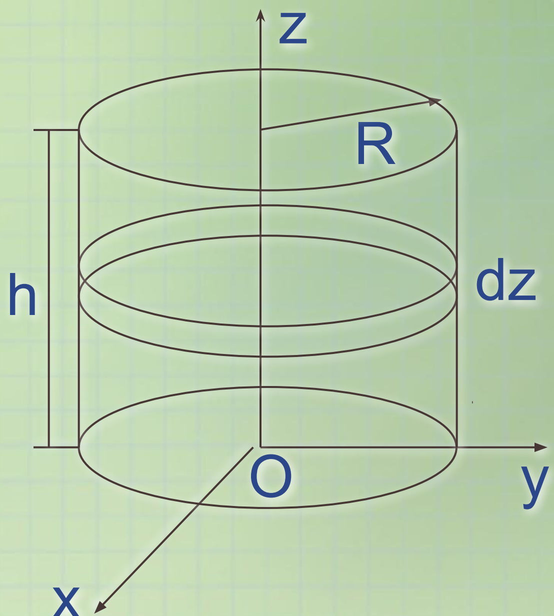
$$J_Z = J_O = 2\pi\rho\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho R^4}{2}$$

$$\boxed{J_Z = J_O = \frac{m\cdot R^2}{2}}$$

3’. Однородный круглый цилиндр массы m и радиусом R

- Разобьем цилиндр на элементарные диски толщиной dz, масса каждого из этих дисков dm = mdz/h

Тогда момент инерции каждого диска $dJ_Z = \frac{dmR^2}{2} = \frac{mR^2}{2h}dz,$



просуммируем моменты инерции всех элементарных дисков

$$J_Z = \int dJ_Z = \int \frac{mR^2}{2h}dz = \frac{m\,R^2}{2h}\int_0^h dz = \frac{m\,R^2}{2}$$

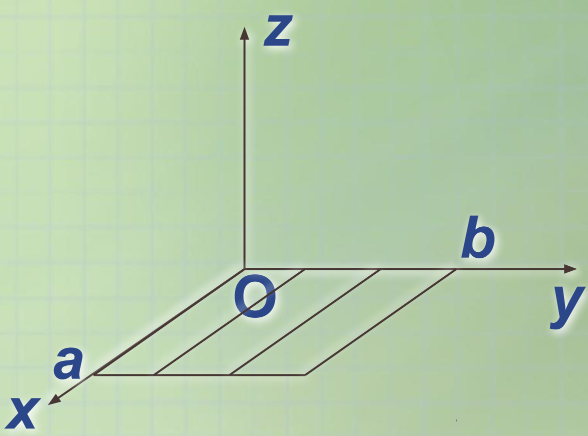
$$\boxed{J_Z = J_O = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$

Моменты инерции цилиндра относительно осей X и Y определяются опять по 2-му свойству и равны

$$\boxed{J_X = J_Y = \frac{m \cdot R^2}{4}}$$

4. Тонкая прямоугольная пластина со сторонами *a* и *b* и массой *m*

- Направим оси *X* и *Y* вдоль сторон прямоугольной пластины



Тогда осевые моменты инерции пластины будут определяться так же, как и для стержней

$$J_X = \frac{mb^2}{3} \quad \text{и} \quad J_Y = \frac{ma^2}{3}$$

а

$$J_Z = \frac{m \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{3}$$

$$\boxed{J_O = J_Z = \frac{m \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{3}}$$

- полярный момент инерции пластины

5. Прямой сплошной круглый конус массы *m* и радиусом *R*

$$J_Z = 0.3mR^2$$

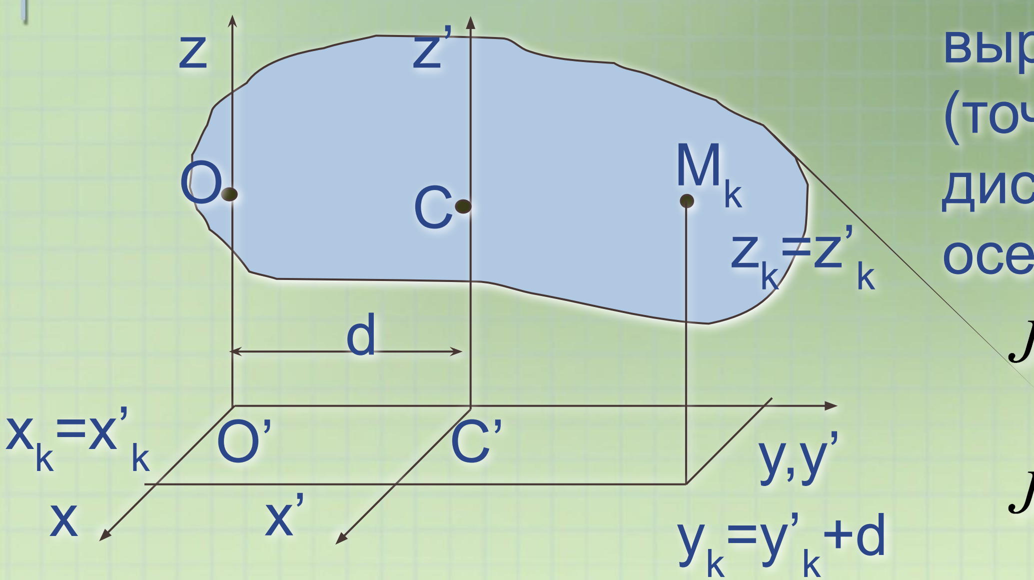
6. Сплошной однородный шар массы *m* и радиуса *R*

$$J_Z = 0.4mR^2$$

§ 7. Теорема Гюйгенса-Штейнера

Момент инерции зависит от положения оси, относительно которой этот момент вычисляется

Найдем зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей Z и Z’, одна из которых (Z’) проходит через центр масс C тела



Момент инерции диска , вырезанного в теле, (точка M_k принадлежит диску) относительно осей Z и Z’

$$J_{Z'} = \sum_k m_k\left(x'^2_k + y'^2_k\right)$$

$$J_Z = \sum_k m_k\left(x^2_k + y^2_k\right)$$

Подставим координаты точки M_k в выражения для моментов инерции

$$J_Z=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x_k^2+y_k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x'^2_k+y'^2_k+2y'_k d+d^2\right)=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x'^2_k+y'^2_k\right)}_{\Downarrow\; J_{Z'}}+2d\underbrace{\sum_{k=1}^{n}m_k y'_k}_{\Downarrow\; My'_C=0}+d^2\underbrace{\sum_{k=1}^{n}m_k}_{\Downarrow\; M}$$

$$\boxed{J_Z=J_{Z'}+Md^2}$$

Момент инерции системы материальных точек относительно какой-либо оси равен её моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс системы, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями

§ 8. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы называют векторную величину Q, равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы

$$\overline{Q} = \sum_k m_k \overline{V}_k$$

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс

$$\overline{Q} = M \cdot \overline{V}_C$$

Если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела (системы) равно нулю

При сложном движении количество движения не будет зависеть от его вращательного движения вокруг центра масс

Таким образом, *количество движения тела* можно рассматривать как характеристику поступательного движения тела

При сложном движении – как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс тела

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы можно записать основное уравнение динамики

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{a}_1=\vec{F}_1^{\,e}+\vec{F}_1^{\,i} \\ m_2\vec{a}_2=\vec{F}_2^{\,e}+\vec{F}_2^{\,i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\vec{a}_n=\vec{F}_n^{\,e}+\vec{F}_n^{\,i} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_k m_k\vec{a}_k=\sum_k \vec{F}_k^{\,e}+\sum_k \vec{F}_1^{\,i}$$

по свойству внутренних сил $\sum_k \vec{F}_k^{\,i}=0$

$$\sum_k m_k\vec{a}_k=\frac{d}{dt}\sum_k m_k\vec{V}_k=\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt}=\sum_k \vec{F}_k^{\,e}} \qquad (1)$$

(1) – теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил

В проекциях на координатные оси

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_k F_{kx}^{\,e}$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum_k F_{ky}^{\,e} \qquad (2)$$

$$\frac{dQ_z}{dt} = \sum_k F_{kz}^{\,e}$$

Проинтегрируем уравнение (1)

$$d\vec{Q} = \sum_k \vec{F}_k^{\,e} dt$$

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\vec{Q} = \sum_k \int_0^{t_1} \vec{F}_k^{\,e} dt \qquad \text{или} \qquad \boxed{\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^{\,e},} \quad (3)$$

где $\vec{S}_k^{\,e}$ – импульс внешних сил

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени

В проекциях на координатные оси

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{\ e};$$

$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^{\ e};$$

$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^{\ e}$$

Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения системы две разные формы одной и той же теоремы

Следствия

1. Если $\sum_k \vec{F}_k^e = 0,$ то $\sum_k \vec{S}_k^e = 0, \Rightarrow \vec{Q} = \overrightarrow{const}$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению

2. Если $\sum_k F_{kx}^e = 0,$ то $\sum_k S_{kx}^e = 0, \Rightarrow Q_x = const$

Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная

Для эффективного применения теорем изменения и сохранения количества движения необходимо систему координат выбирать так, чтобы неизвестные силы были внутренними

Примеры

1. Определить скорость отдачи ружья, если известна скорость $V_п$ и масса $m_п$ пули и масса $m_р$ ружья

X: $$Q_1 - Q_0 = 0 = m_n V_n - m_p V_p \quad \Rightarrow \quad V_p = \frac{m_n}{m_p} V_n$$

2. Ракета с реактивным двигателем выбрасывает струю газов со скоростью U, масса ракеты $m_р$ уменьшается на величину dm, а скорость ракеты возрастает на величину dV. Определить скорость ракеты

$$d\bar{Q} = \bar{U} \cdot dm_c + m \cdot d\bar{V}_p \quad \Rightarrow \quad dV_p = -U \frac{dm_c}{m}$$

$$\boxed{V_p = U \ln \frac{m_0}{m} + V_0}$$

– формула К.Э. Циолковского (1857–1935)