

ГБОУ НПО ПУ № 57  
Ст. Ладожской, Краснодарского края

**Курс «Алгебра и начала  
анализа»**

Тема урока:  
**«Первообразная. Интеграл.»**



**Преподаватель математики  
Крымова А. В.**

### Цель урока:

- закрепление свойств первообразной, умение пользоваться таблицей первообразных, правилами нахождения первообразных, отработка вычислительных навыков интегралов, проверка умения в построении графиков, применение интегралов к вычислению площадей;
- Подготовка к итоговой аттестации в форме и по материалам ЕГЭ.

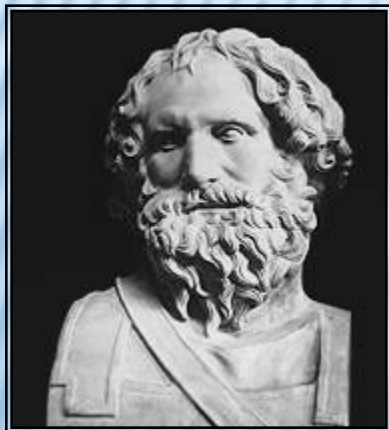
## Историческая справка

Вы познакомитесь в этой теме с самыми началами интегрального исчисления, служащего продолжением уже известного вам дифференциального исчисления.

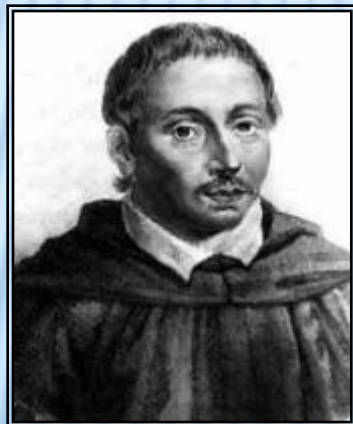
Первые работы по открытию интегрального исчисления принадлежат еще **Архимеду** – первому математику древности.

В средние века этой проблемой занимался итальянский ученый **Кавальери**.

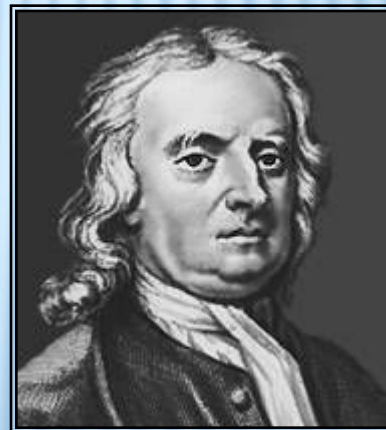
Но подлинное открытие интегрального исчисления принадлежит двум великим ученым XVII века – **Ньютону** и **Лейбницу**.



Архимед



Бонавентура  
Кавальери



Исаак Ньютон



Готфрид Вильгельм  
Лейбниц

## Повторение пройденного материала

# Неопределенный интеграл

**Дифференцирование** - это операция нахождения производной, если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ .

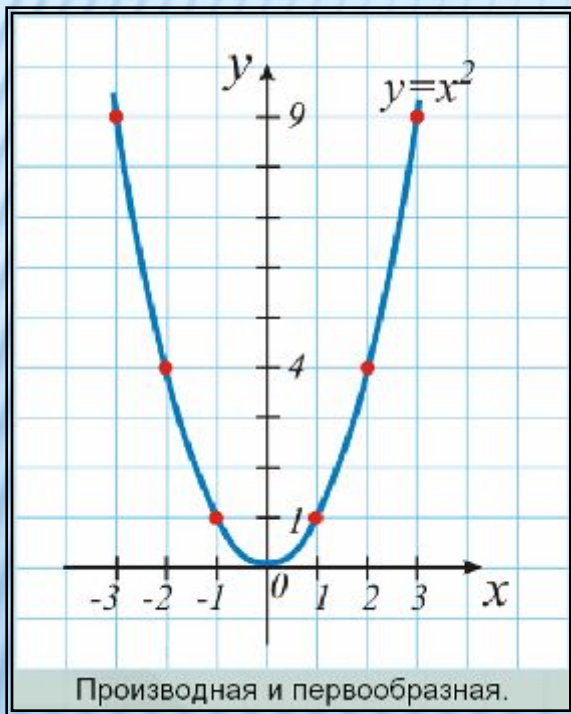
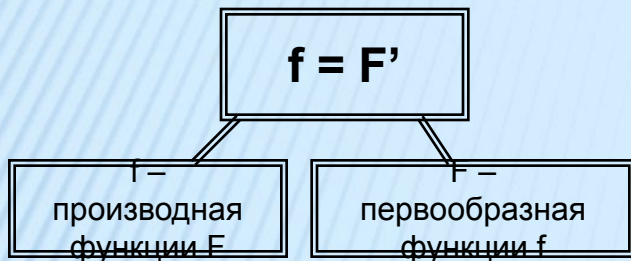
Сама функция называется дифференцируемой в этой точке.

Операция, обратная дифференцированию, называется **интегрированием**.

Если мы ищем скорость пути, мы дифференцируем функцию  $s(t)$  и получаем  $s'(t)=v(t)$ . Если же функция  $v(t)$  нам известная, а требуется найти функцию  $s(t)$ , то мы будем интегрировать функцию  $v(t)$ .

Чтобы хорошо разобраться в материале этой темы, нужно вспомнить, что такое дифференцирование, геометрический смысл производной, Механический смысл производной и формулы дифференцирования.

# Первообразная



Функция  $F(x)$  называется первообразной функции  $f(x)$ , если

функция  $f(x)$  является производной функции  $F(x)$ .  
У одной и той же функции  $f(x)$  много первообразных.

Например,

Если  $x^2$  – первообразная функции  $2x$ , то и  $x^2+5$  – тоже первообразная функции  $2x$ .

Это легко проверить дифференцированием:  $(x^2+5)'=2x$ .

Да и любая функция вида  $x^2+C$ , где  $C$  – любое число, является

~~первообразной функции  $2x$  и  $x^2+C$  – другая функция.~~

**Теорема.** Если  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ , то и любая

функция  $F(x)+C$ , где  $C$  – число, является первообразной той же функции.

**Доказательство.**  $(F(x)+C)'=(F(x))'=F(x)$ . Верно и обратное:

если  $F(x)$  и  $G(x)$  – две первообразные одной и той же функции

$f(x)$ , то  $G(x)=F(x)+C$ . И в самом деле, так как  $G(x)-F(x)=C$  или  $G(x)=F(x)+C$ , что и требовалось доказать.

# Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции  $f(x)$  называется множество первообразных этой функции.

Неопределенный интеграл функции  $f(x)$  обозначается символом  $\int f(x)dx$ . Знак дифференциала  $dx$  указывает, какая переменная, входящая в выражение  $f(x)$ , является аргументом.

Например,  $\int a^b db$  – интеграл показательной функции,  $\int a^b da$  – интеграл степенной функции.

Первый равен  $\frac{a^b}{\ln a} + C$ , а второй равен  $\frac{a^{b+1}}{b+1} + C$ .

Чтобы найти интеграл от данной функции, нужно найти любую ее первообразную и прибавить к ней произвольное число  $C$ .

Так,

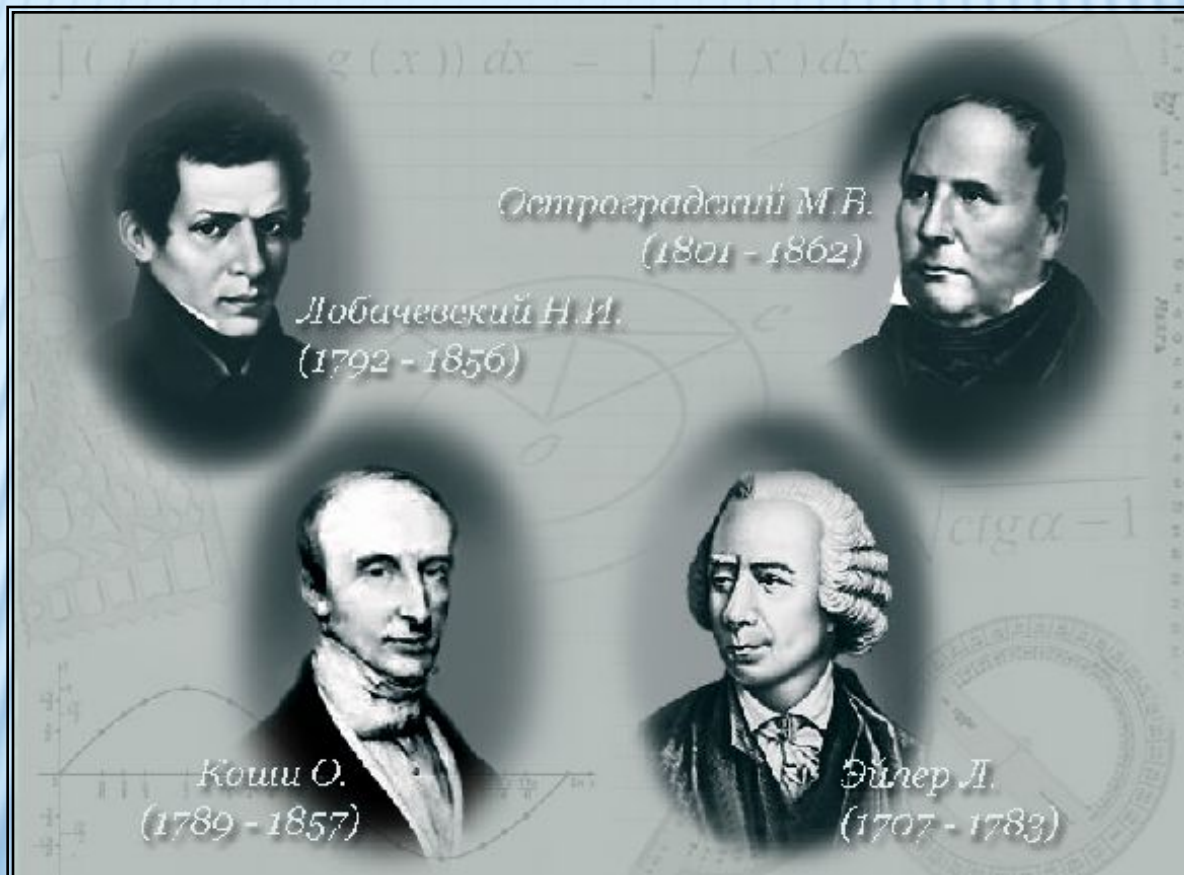
$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

# Три правила интегрирования

Техника интегрирования – сложный раздел математики. В нем сделали свои открытия такие корифеи, как **Эйлер**, **Лобачевский**, **Коши**, **Остроградский**.

Вам предстоит ознакомиться с тремя самыми простыми правилами интегрирования.



# Три правила интегрирования

## Первое правило интегрирования:

Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций:  $\int$

$$(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Доказательство: Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  – первообразные функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Тогда  $P(x)=f(x)$ ,  $G'(x)=g(x)$ .

Но известно, что  $(F(x)+G(x))'=P(x)+G'(x)$ , то есть  $(F(x)+G(x))'=f(x)+g(x)$ . Тем самым доказано, что функция  $F(x)+G(x)$ -первообразная функции  $f(x)+g(x)$ . Отсюда получаем  $\int$

$$(f(x)+g(x))dx = F(x)+G(x)+C^1,$$

$\int (f(x)dx + \int g(x)dx) = F(x)+C_2 + G(x)+C_3$ . И так как  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – произвольные числа, то окончательно

имеем:  $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ , что и требовалось доказать.

## Второе правило интегрирования:

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:  $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$ .

Доказательство: Пусть  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ . Тогда  $P(x)=f(x)$ , а значит,  $cP(x)=cf(x)$ , откуда и следует доказываемое равенство.

## Третье правило интегрирования:

Если  $F(x)$  первообразная функции  $f(x)$ ,  $k \neq 0$ , то

### Доказательство:

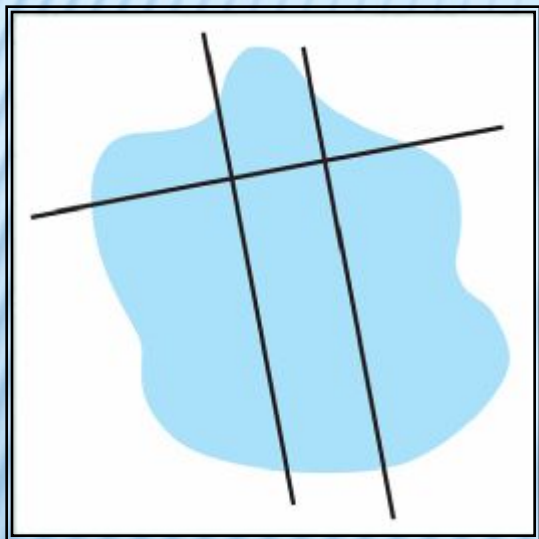
Пусть  $F(x)$  первообразная функции  $f(x)$ . Тогда  $P(x)=f(x)$ , а  $P(kx+b)=f(kx+b)$ , откуда и получается доказываемое равенство.



# Определенный интеграл

Пусть  $\int v(t)dt = s(t) + C$ . Зная это, можно найти путь, пройденный от момента времени  $a$  до момента времени  $b$ . Путь равен разности значений функций  $s$  при  $t=b$  и при  $t=a$ , то есть  $(s(b)+C) - (s(a)+C)$ . При этом безразлично, какую из первообразных мы возьмем: ведь  $(s(b) + C) - (s(a) + C) = s(b) - s(a)$ . Моделью интеграла может служить не только формула пути, но и формула площади любой плоской фигуры.

## *Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции*

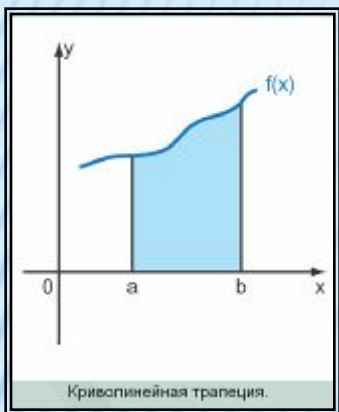


*Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции*

Итак, перед нами стоит задача научиться находить площадь плоской фигуры. Фигура определяется ограничивающей ее линией. Если эта линия состоит из прямолинейных отрезков, то ее площадь – площадь многоугольника, которую можно найти деля фигуру на прямоугольники и треугольники. Плохо, если фигура со всех сторон ограничена кривыми. Но в этом случае ее можно разбить на более мелкие фигуры, ограниченные с трех сторон прямыми, пересекающимися под прямыми углами. И только с одной стороны такие фигуры будут иметь неустранимо криволинейную границу.

# Разбиение плоской фигуры на криволинейные трапеции

Расположим такую фигуру над осью абсцисс, как это сделано на рисунке.



Получилась так называемая криволинейная трапеция.

Определение. Криволинейной трапецией называется фигура,

расположенная в прямоугольной системе координат и ограниченная

осью

абсцисс, прямых  $x=a$  и  $x=b$  и кривой  $y=f(x)$ , причем  $f(x)$  неотрицательна

на отрезке  $[a;b]$ . Если мы научимся находить площадь любой

криволинейной

трапеции, то можно считать решенной задачу об отыскании площади

любой

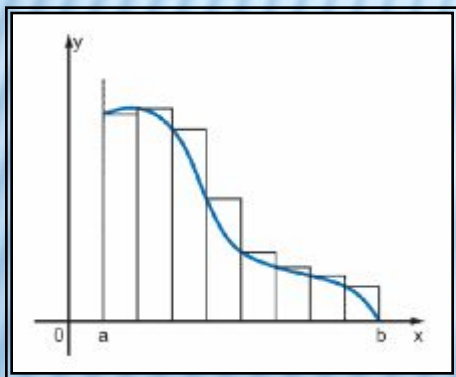
## Площадь криволинейной трапеции

плоской фигуры.

Приближенно площадь криволинейной трапеции можно найти так: разделить отрезок  $[a;b]$  оси абсцисс на  $n$  равных отрезков, провести через точки деления отрезки, перпендикулярные к оси абсцисс до пересечения с кривой  $f(x)$  заменить получившиеся столбики прямоугольниками с основанием  $\Delta x$  и высотой, равной

значению функции  $f$  в левом конце каждого отрезка, найти сумму площадей этих прямоугольников.

При достаточно большом  $n$  можно сделать эту сумму сколь угодно близкой к истинной площади, то есть сделать сколь угодно малой погрешность такого вычисления



# Площадь криволинейной трапеции

Можно найти площадь криволинейной трапеции и совершенно точно, пользуясь результатом, полученным в конце XVII века независимо друг от друга двумя великими учеными

**Ньютоном**  
и **Лейбницем**.

Для доказательства формулы, носящей их имена, докажем, что

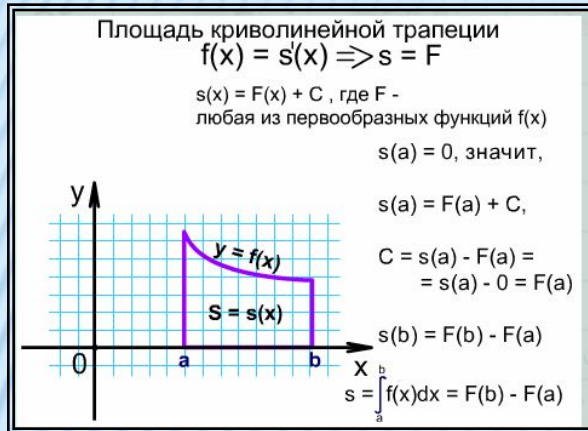
площадь криволинейной трапеции равна  $F(b)-F(a)$ , где  $F$ - любая из первообразных функции  $f$ , график которой ограничивает криволинейную трапецию

Теперь вычисление площади криволинейной трапеции будем записывать так:

- 1) Найдем любую из первообразных  $F$  функции  $f$ .
- 2) Запишем

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

и называется формулой Ньютона –Лейбница .



$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула

# Закрепление пройденного материала

Класс делится на 3 «семьи», выбирается глава «семьи».

На столе каждой команды лежит «Лист учета знаний», который заполняется по ходу урока.

По итогам каждого гейма подсчитываются очки. В строке напротив фамилии суммируются баллы и можно выставить оценку каждому ребенку на уроке.

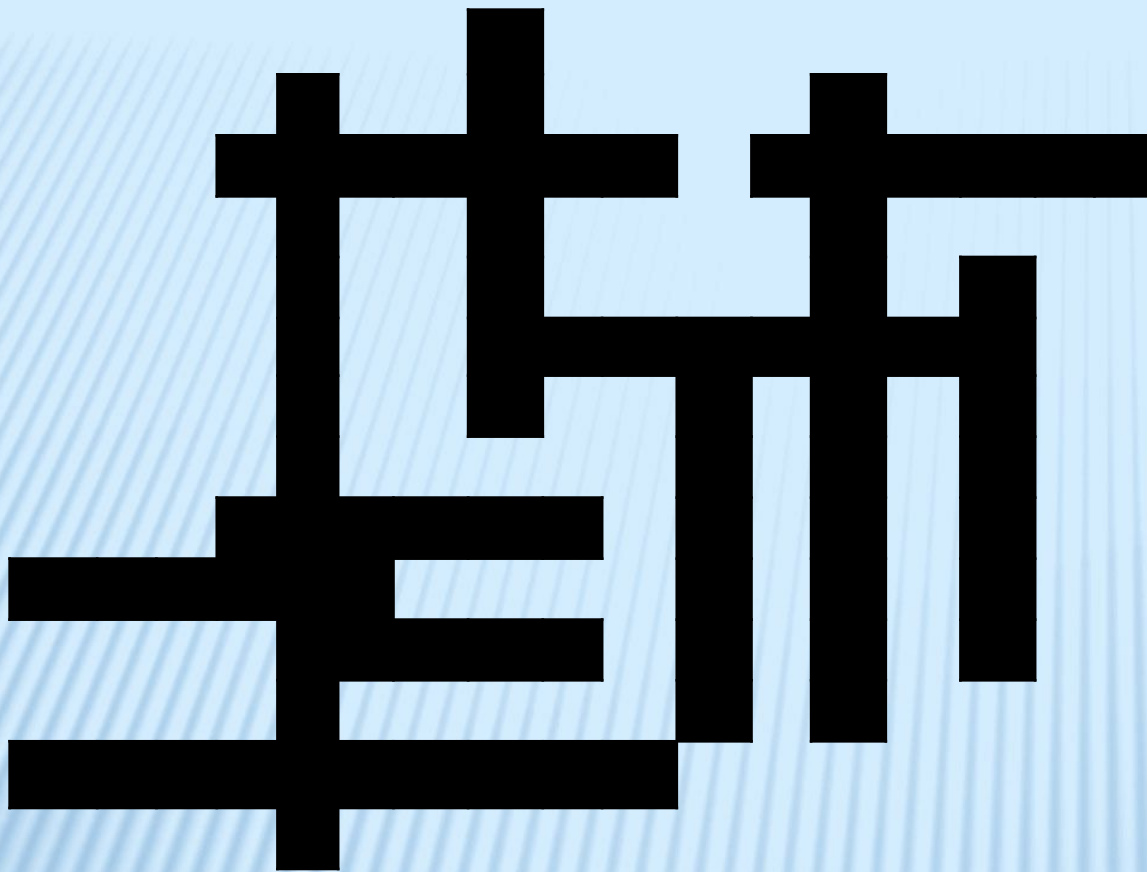
## **Лист учета знаний**

№ п\п	Ф.И.	г 1	е 2	й 3	м 4	ы 5	Сумма плюсов	Оценка на уроке

## **Первый гейм «Разминка».**

Отгадывание кроссворда. Здесь учащиеся должны показать свои теоретические знания на минимальном уровне. Кроссворд проецируется на экран через проектор. Вопросы задаются устно всем «семьям» по очереди. Если не смогла какая – то «семья» ответить, право на ответ передаётся другой «семье».

В листе учёта знаний ставится знак «+» напротив фамилии учащегося, который дал правильный ответ.



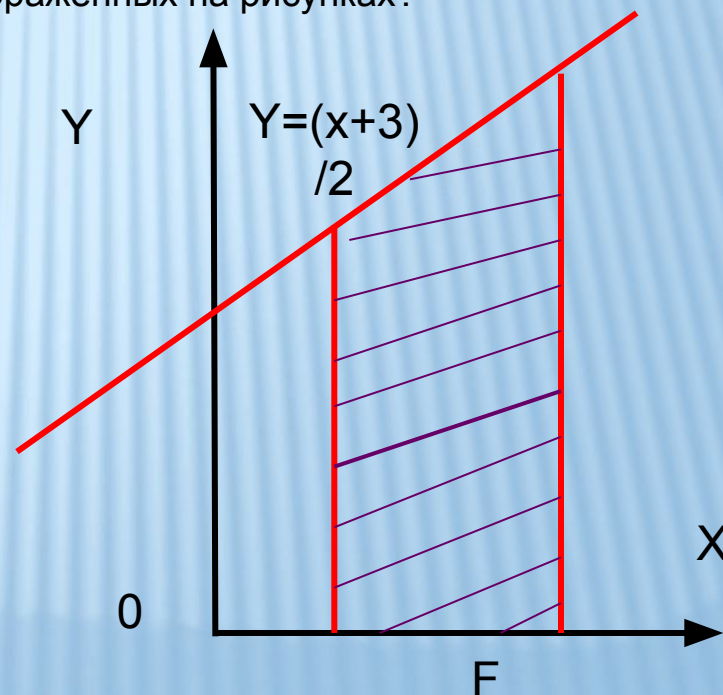
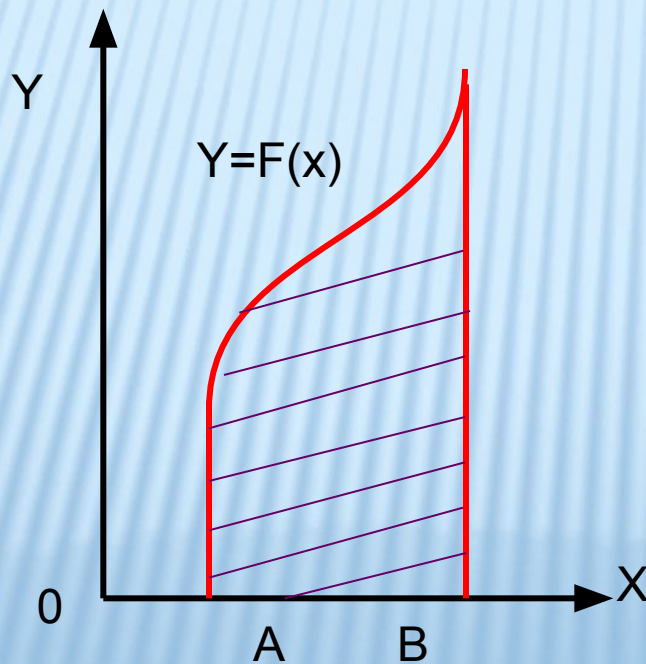
1. Как называется функция  $F(x)$ ?
2. Что является графиком функции  $y = ax + b$ ?
3. Самая низкая школьная оценка.
4. Какой урок проходит обычно перед зачетом?
5. Синоним слова «дюжина».
6. Есть в каждом слове у растения и может быть у уравнения.
7. Что можно вычислить при помощи интеграла?
8. Одно из важнейших понятий в математике?
9. Форма урока, на котором проводится проверка знаний?

10. Немецкий ученый, в честь которого названа формула, связывающая площадь криволинейной трапеции и интеграл.
11. Конь – лошадь – жеребенок, бык – корова – телёнок, король – королева – принц, граф – графиня - ....
12. Соответствие между множествами  $X$  и  $Y$ , при котором каждому значению из множества  $X$  поставлено в соответствии единственное значение из множества  $Y$ , носит название .....

## Второй гейм «Дальше, дальше...»

Этот гейм индивидуальный, т.е. каждый учащийся пишет ответы в своей тетради (ответы должны дать за 15 минут).

- 1) Что называются интегралом ?
- 2) Что называется первообразной ?
- 3) Как читается основное свойство первообразной ?
- 4) Верно ли, что интеграл от любой степенной функции будет снова степенной функцией?
- 5)  $F'(x)=f(x)$  - как это можно прочесть?
- 6) Как можно вычислить площадь криволинейной трапеции при помощи интеграла?
- 7) Запишите с помощи интегралов площадь фигур, изображенных на рисунках?



8. Найти первообразные для функций:

а)  $10x$     б).  $x^2$     в).  $\sin x^2$     г).  $\cos x$     д)  $x^4$     е)  $3x^2$

9. Истинны ли равенства:

а)  $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ ,    б)  $\int_0^5 x^2 dx = 2\frac{1}{3}$ ,    в)  $\int_2^4 x^2 dx = 2x$ ,    г)  $\int_0^3 5dx = \frac{5x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{5}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{45}{2}$ ,

д)  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3}$ ,    е)  $\int_1^4 (3 - 2x)dx = (\frac{3x^2}{2} - 2x)$

Ответы зачитываются сразу же. Правильный ответ учащиеся обводят в кружок и подсчитывают Количество баллов и заносят в «Лист учета знаний»

### Третий гейм «Спешите видеть»

Каждая команда за 5 минут должна изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

- а) графиком функции  $y=(x+1)^2$ , осью  $OX$  и прямой  $y=1-x$
- б) графиком функции  $y=4x-x^2$ , с осью  $OX$  и прямой  $y=4-x$
- в) графиком функции  $y=4-x^2$ , с осью  $OX$  и прямой  $y=4-x$

За верное построение команды получают баллы

## Четвертый гейм «Составь фразу»



Вычислите интеграл:

- 1)  $\int_2^3 (1-x)^4 dx = 6\frac{1}{5}$
- 2)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x) dx = 6$
- 3)  $\int_1^2 (2x-5) dx = -2$
- 4)  $\int_0^1 (x+1)^5 dx = 10,5$
- 5)  $\int_0^3 x^2 dx = 9$
- 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 x} dx = 6$
- 7)  $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = 1,5$
- 8)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x} dx = 4$
- 9)  $\int_0^1 (x^2 - 4x - 1) dx = -2\frac{2}{3}$
- 0)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (108 \sin 6x) dx = 18$

- 1)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos 2x) dx = 2$
- 2)  $\int_0^{\pi} (3 \sin \frac{1}{2} x) dx = 6$
- 3)  $\int_1^2 (4x^3 - 2x) dx = 18$
- 4)  $\int_{-1}^1 (6x^3 - 5x) dx = 0$
- 15)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 2$
- 6)  $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 10\frac{2}{3}$
- 7)  $\int_1^4 x^3 dx = 63,75$
- 8)  $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} (3x^3 - 2x) dx = 0$

- 2)  $\int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx = 0$
- 0)  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} dx = 4$
- 2)  $\int_1^4 (x^2 - 9) dx = 48$
- 1)  $\int_{-1}^2 3x^2 dx = 9$
- 2)  $\int_0^1 (1-2x)^4 dx = 24,5$
- 3)  $\int_1^3 2 dx = 4$
- 4)  $\int_0^2 (x^3 - x) dx = 2$
- 2)  $\int_2^3 x^2 dx = 6\frac{1}{3}$
- 6)  $\int_1^3 (3-2x) dx = -2$
- 2)  $\int_1^2 (3-2x) dx = -2$
- 7)  $\int_1^2 (3-2x) dx = -2$



## Ответы:

$(2\frac{2}{3}) - А;$   $(-2) - З;$   $0 - Т;$   $1,5 - Д;$   $2 - Р;$   $4 - О;$   $6\frac{1}{3} - А$   $6 - И;$   $6,2 -$   
 $Ж;$   $9 - Ь;$

$10,5 - Н;$   $10\frac{2}{3} - Я$   $18 - Е;$   $24,2 - К;$   $48 - Л;$   $63,75 - Ю$

**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17**  
**18**  
ж и з н ь и д о в е р и е т е р я ю

**19 20 21 22 23 24 25 26 27 28**  
т т о л ь к о р а з



## Пятый гейм «Гонка за лидером»

Каждая «Семья» получает карточку. В каждой карточке по два задания: одно – в форме теста,

другое – своеобразный кроссворд.

За верно решенные задания в карточке «семья» получает 2 балла.

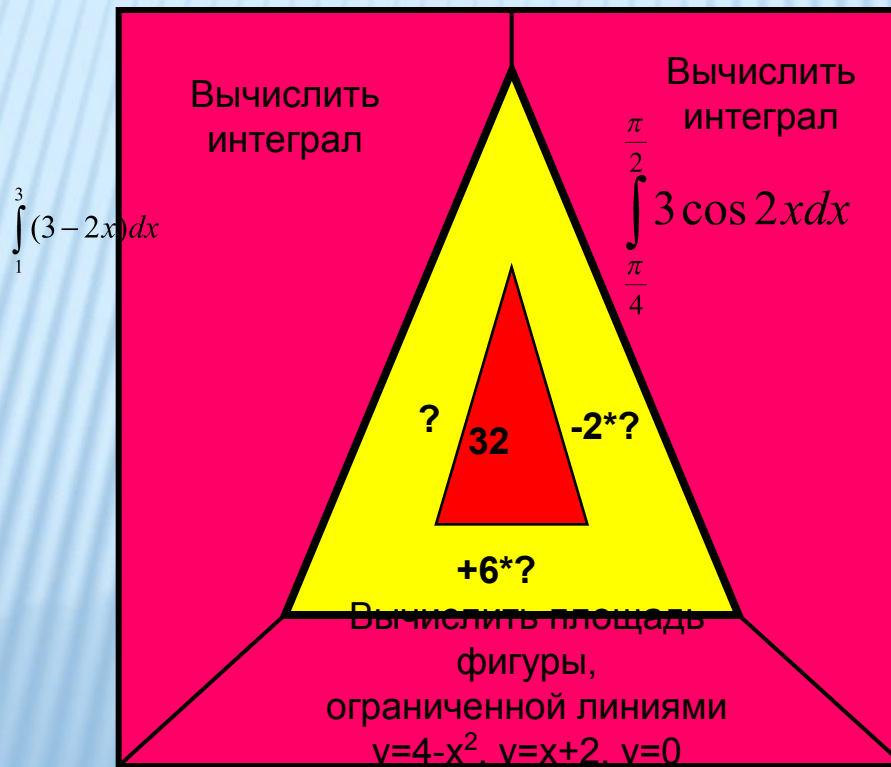
### Карточка 1.

**Задание 1.** Для функции  $f(x)=e^x$  найти первообразную, график которой проходит через точку М (0;2).

а)  $F(x) = e+3$ ; б)  $F(x) = e^x$ ; в)  $F(x) = e^x+1$ ; г)  $F(x)=e^x-1$

**Ответ: В**

**Задание 2.**



## Карточка 2.

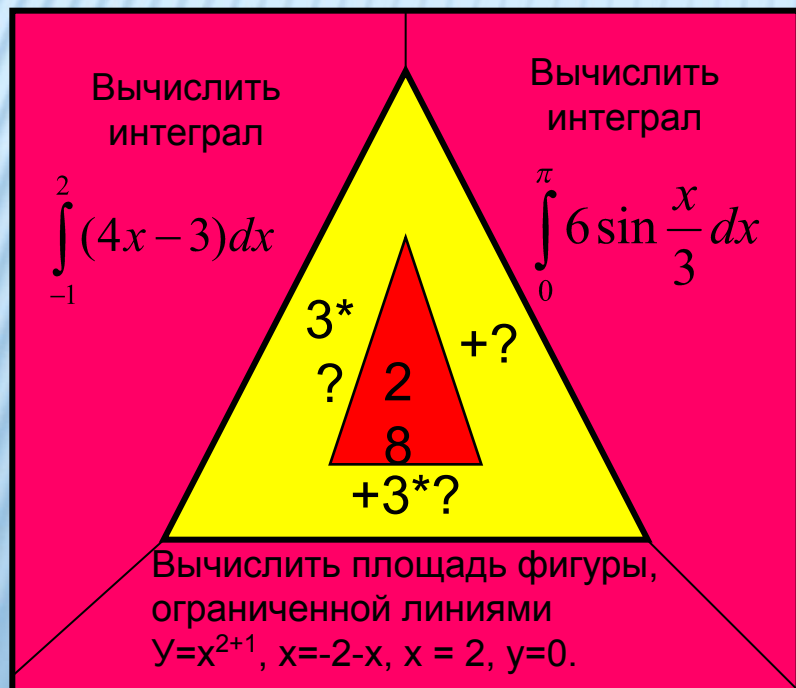
Задание 1. Для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  найти первообразную, график которой проходит через точку М (4;5)

- а)  $F(x) = \sqrt{x+3}$ ; б)  $F(x) = 2\sqrt{x}$ ;  
в)  $F(x) = 2\sqrt{x+3}$ ; г)  $F(x) = \sqrt{x+5}$ .

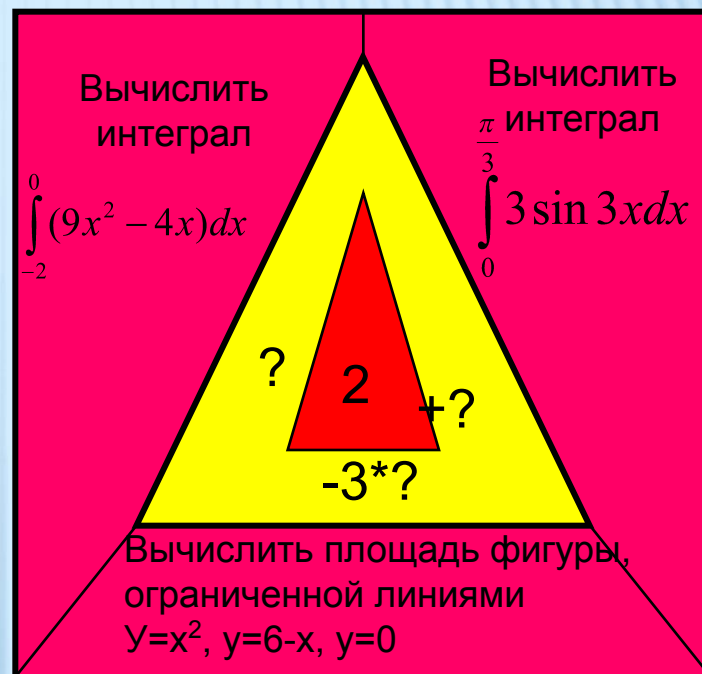
Ответ: Б

## Карточка 3.

Задание 2.



Задание 2.



Задание 1. Для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  найти первообразную, график которой проходит через точку М (1;3)

- а)  $F(x) = 4 + \frac{1}{x}$  б)  $F(x) = -\frac{1}{x} + 4$   
в)  $F(x) = -\frac{1}{x} + 4$  г)  $F(x) = x^3 - 4$

Ответ: В

## Подведение итогов

На табло подсчитываются баллы, полученные каждой «семьей» и распределяются места.

В «Листе учета знаний» суммируются все плюсы числа «семьи» и выводятся оценка за урок (из общей суммы исключаются плюсы за

гейм «Дальше, дальше...»).

Учащиеся отвечают на вопрос «Чему вы научились при изучении данной темы?»

