

**Именно математика дает надежнейшие правила:
кто им следует – тому не опасен обман чувств.**

Л. Эйлер

Применение производной к исследованию функций

(готовимся к экзамену)



Вспомним.

ПРОИЗВОДНАЯ, скорость изменения величины математической функции относительно изменений независимой переменной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Смысл производной.

геометрический

угловой коэффициент касательной к графику функции

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

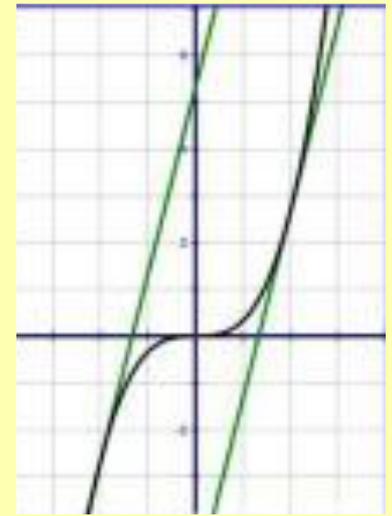
физический (механический)

мгновенная скорость, т. е. скорость в данный момент времени

$$V = S'(t_0)$$

№1678

Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найти абсциссу точки касания.



Решение:

Так как к графику функции проведена касательная, то ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

Так как касательная к графику функции параллельна прямой $y = -4x - 8$, то ее угловой коэффициент $k = -4$.

1. Найдем производную данной функции

$$y'(x) = 3x^2 - 6x - 1$$

2. Так как касательная к графику данной функции параллельна прямой $y = -4x - 8$, то

$$k = -4$$

3. Составим и решим уравнение

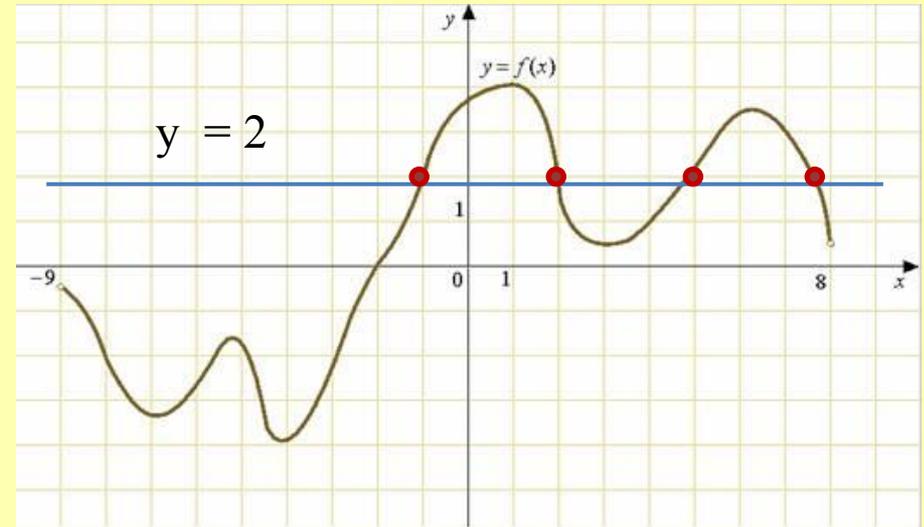
$$3x^2 - 6x - 1 = -4$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

№1679

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



Решение:

Так как касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2x + 5$, то ее угловой коэффициент $k = 2$.

Так как к графику функции проведена касательная, то ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$, то есть $f'(x_0) = 2$

Так как дан график производной функции $f(x)$, то надо узнать, сколько точек пересечения имеет данный график с прямой $y = 2$.

Ответ: 4

№1683

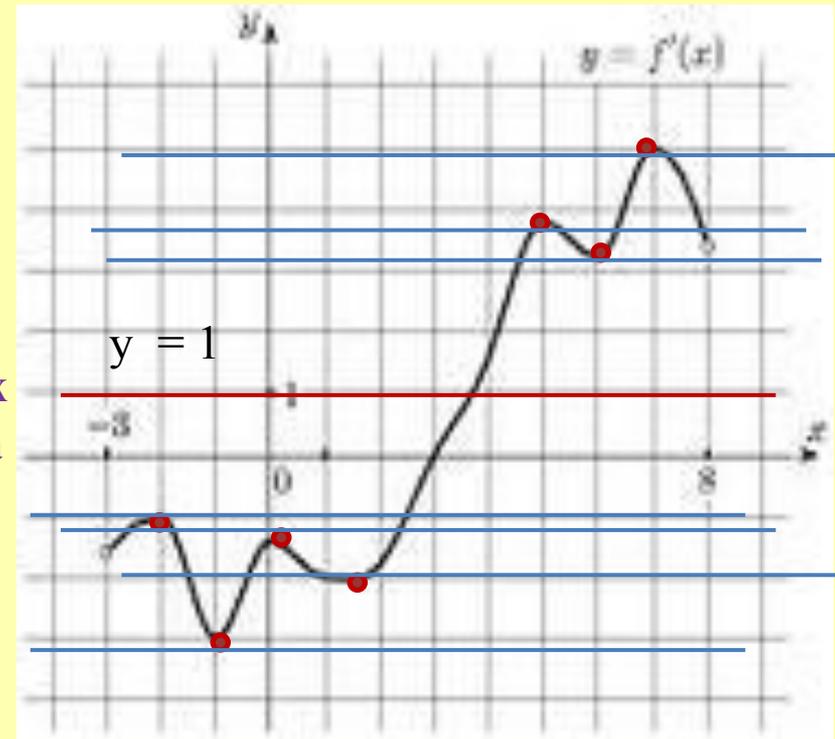
На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.

Решение:

Прямая $y = 1$ параллельна оси абсцисс.

Значит, надо найти количество точек графика, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

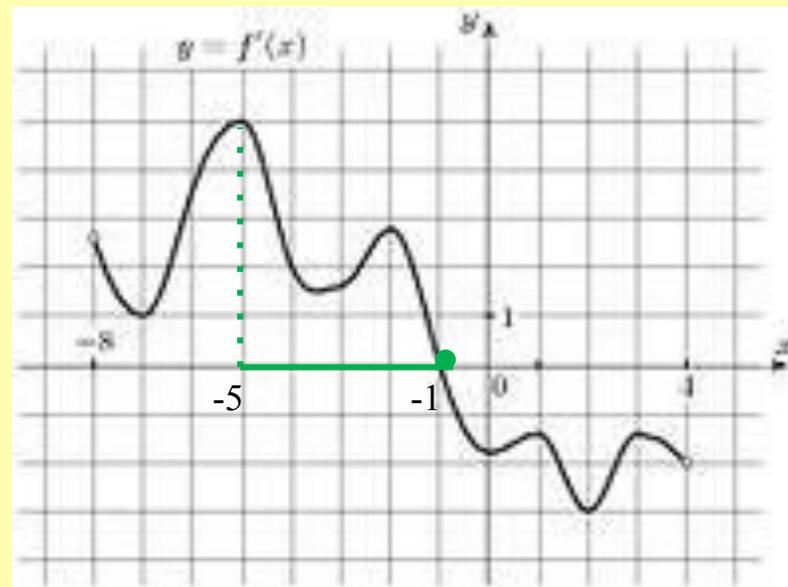
Ответ: 7



№1723

На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция принимает наибольшее значение?

Решение:



Рассмотрим функцию на отрезке $[-5; -1]$.

На данном отрезке график располагается в верхней полуплоскости, значит $f'(x) > 0$.

Следовательно, функция на данном промежутке возрастает.

Значит, наименьшее значение функция принимает в точке $x = -5$,

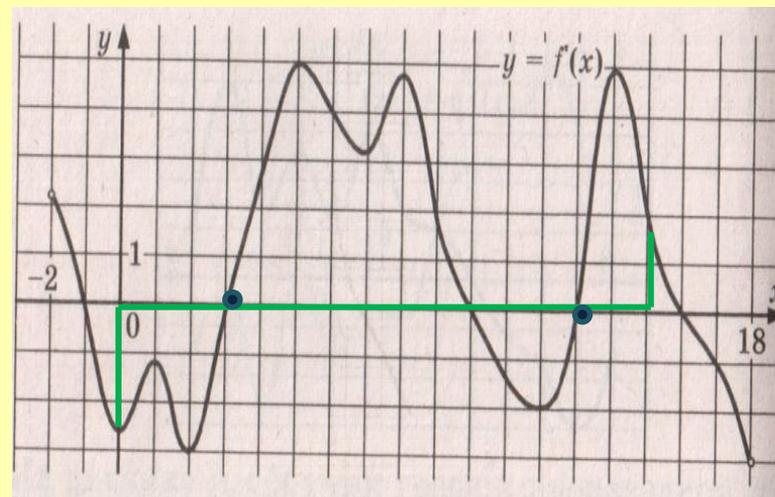
а наибольшее значение функция принимает в точке $x = -1$.

Ответ: - 1

№1741

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 18)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 15]$.

Решение:



Рассмотрим функцию на отрезке $[0; 15]$.

Так как дан график производной функции $f(x)$, то точки минимума это точки, в которых производная переходит с

« $-$ » на « $+$ ».

Значит эти точки лежат на

оси абсцисс,

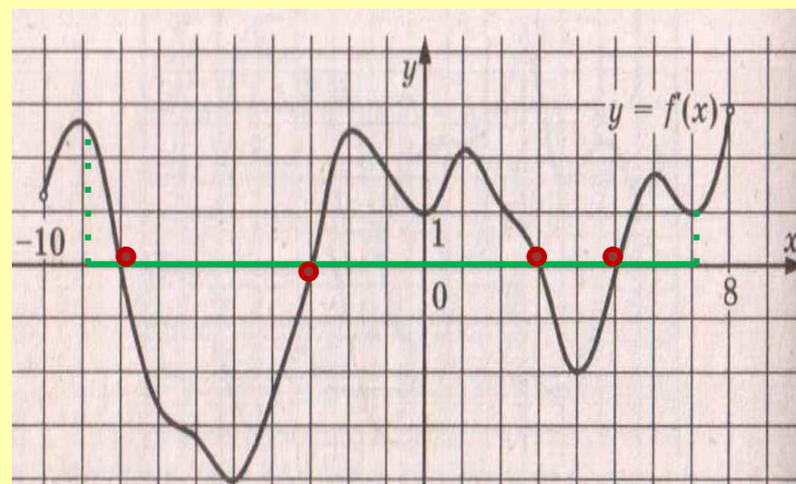
а график в этих точках переходит

из нижней полуплоскости в верхнюю.

Ответ: 2

№1741

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-9; 7]$.



Решение:

Точки экстремума это точки максимума и минимума.

В точках экстремума производная меняет знак.

Так как дан график производной функции $f(x)$, то точки экстремума лежат на оси абсцисс.

Рассмотрим функцию на отрезке $[-9; 7]$.

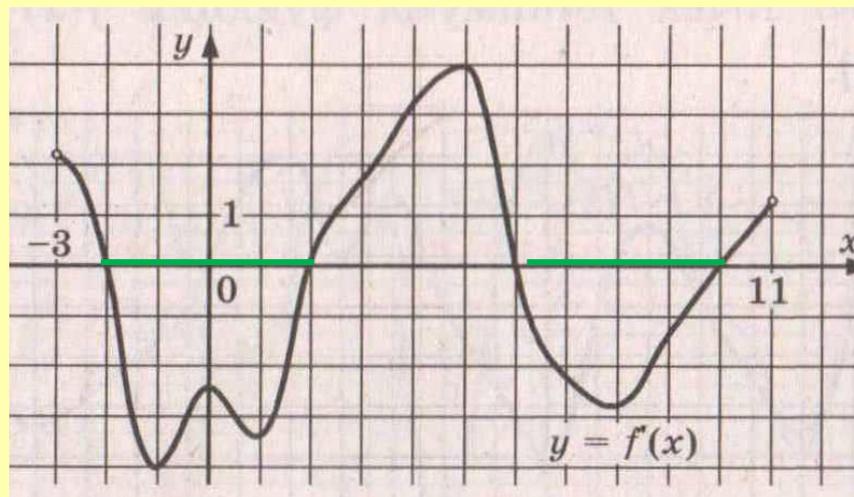
На этом отрезке 4 точки лежат на оси абсцисс.

Ответ: 4

№1772

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение:



Функция убывает, если производная $f'(x) < 0$.

Рассмотрим промежутки, на которых производная отрицательна.

Длина первого промежутка 4 ед. отр..

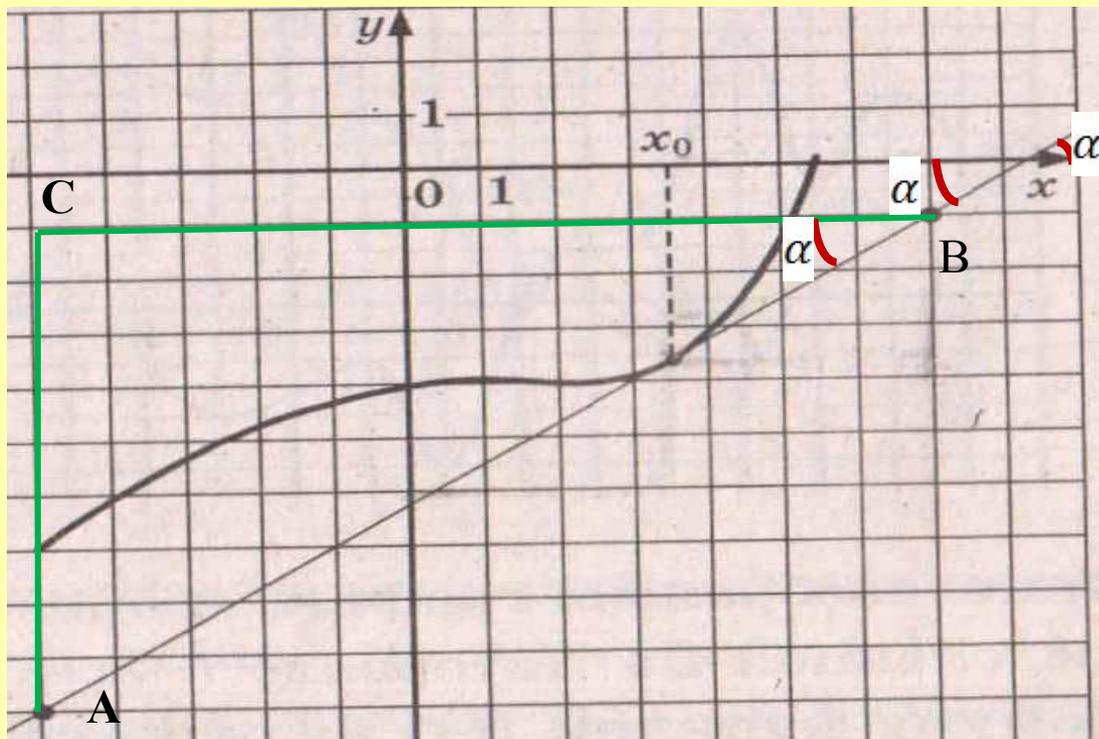
Длина второго промежутка 4 ед. отр..

Ответ: 4

№1864

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .
Найдите значение производной функции в точке x_0 .

Решение:



Значение производной в заданной точке это угловой коэффициент касательной к графику функции, т. е. тангенс угла наклона между касательной к графику и положительным направлением оси абсцисс.

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

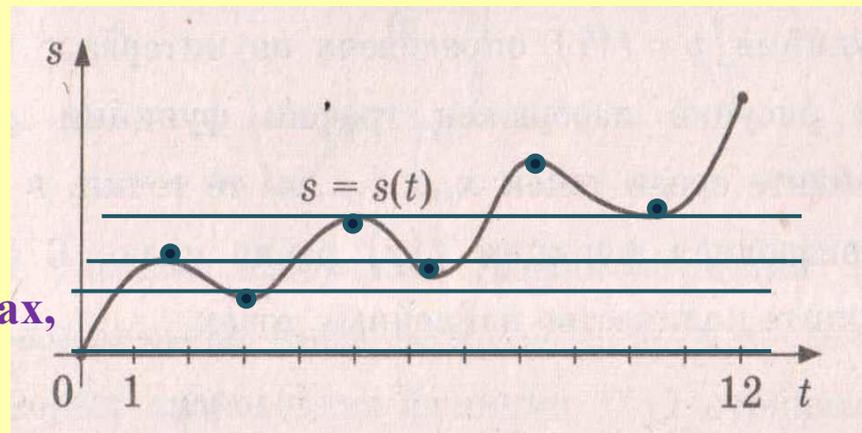
Чтобы найти тангенс угла наклона касательной, надо рассмотреть прямоугольный треугольник, в который входит этот угол.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC}$$

Ответ: 0,75

№1939

Материальная точка М начинает движение из точки А и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки А до точки М со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки М обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Решение:

Скорость материальной точки в данный момент времени это значение производной данной функции в данной точке.

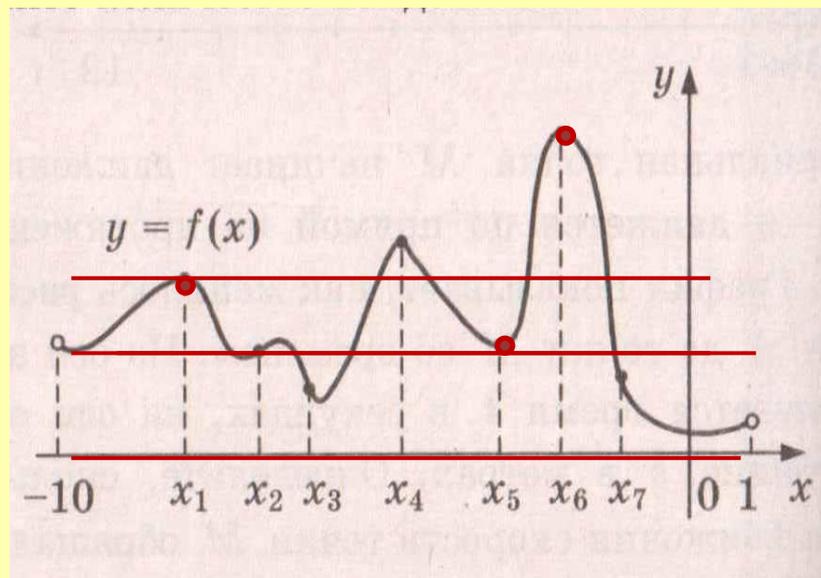
Производная данной функции равна нулю, если касательная к графику данной функции в данной точке параллельна оси абсцисс.

Значит, надо найти количество точек, в которых касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс.

Ответ: 6

№1942

Функция $y = f(x)$, определена на интервале $(-10; 1)$. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, \dots, x_7 те точки, в которых производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.



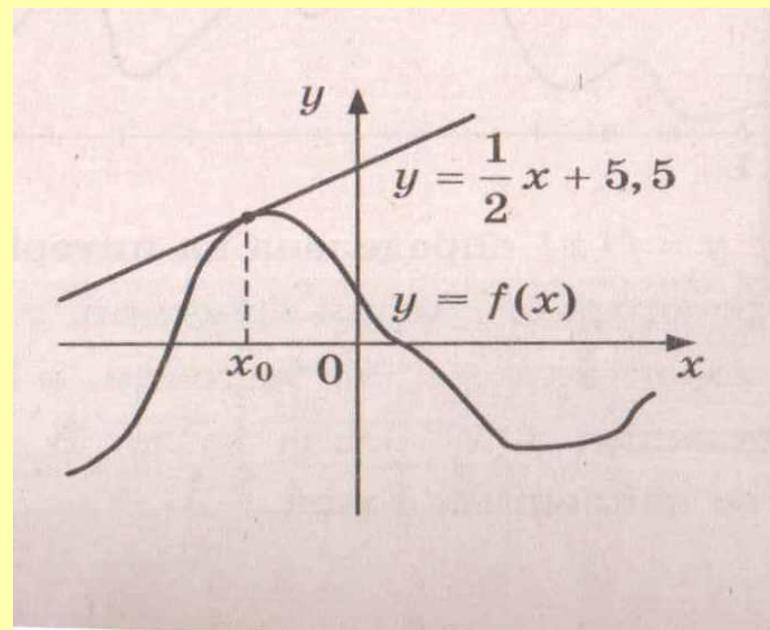
Решение:

Так как дан график функции, то производная данной функции равна нулю в тех точках, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Ответ: 3

№1943

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) + 7$ в точке x_0 .



Решение:

Значение производной исходной функции в точке x_0 равно
угловому коэффициенту касательной

Значит,
$$f'(x_0) = \frac{1}{2}$$

Искомая производная больше производной исходной функции в 4 раза.

Значит, искомая производная равна 2

Ответ: 2