Основы физики прочности и пластичности

ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ

1.Зависимость между напряжением и деформацией в идеальных кристаллах. Двухатомная модель.

С развитием представлений о кристаллическом строении твердых тел и взаимодействии атомов (молекул) в кристаллической решетке металлов появилась возможность теоретически рассмотреть такое взаимодействие в терминах деформация – напряжение.

Выражение для сил связи в кристаллической решетке является частным случаем общего уравнения А.Иоффе:

$$U = -A\frac{e^2}{\Omega^{1/3}} + \frac{B}{\Omega^{2/3}} + C\frac{e^2}{\Omega} \qquad (2.1)$$

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 = \Omega$$

где Ω - атомный объем.

Отсюда металлическая связь может быть записана как

$$U = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}; \qquad (2.2)$$

$$n > m$$

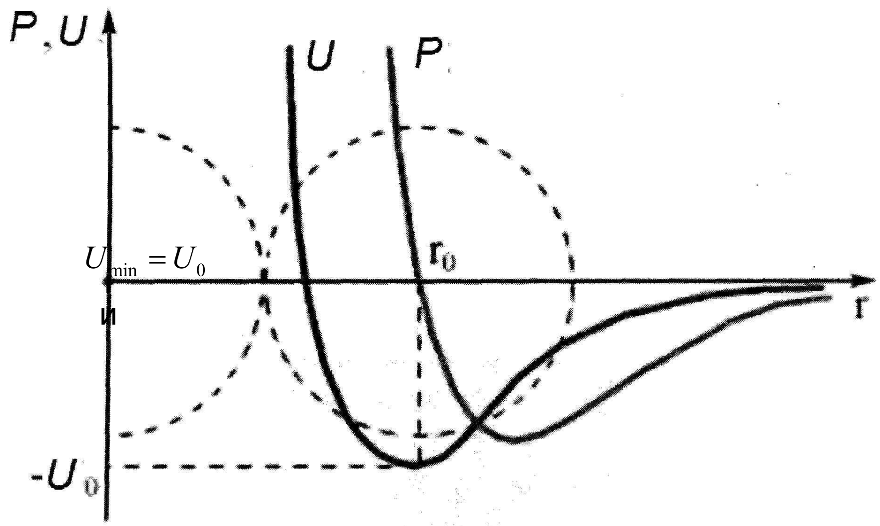

Рис. 2.1. Модель взаимодействия между частицами вещества

Условие минимума энергии взаимодействия:

$$U_{min} = U_0$$

и

$$\frac{dU}{dr} = 0 = \frac{A_m}{r^{m+1}} - \frac{B_n}{r^{n+1}} \qquad (2.3)$$

Отсюда

$$B = \frac{Am}{n}\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}$$

И выражение для *U* принимает вид:

$$U = -\frac{A}{r^m} + \frac{Am}{n}\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}\frac{1}{r^n} \qquad (2.4)$$

Сила взаимодействия *P*:

$$P = \frac{dU}{dr} = \frac{Am}{r^{m+1}} - \frac{Am}{n}\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}\frac{n}{r^{n+1}} = Am\left[\frac{1}{r^{m+1}} - \frac{1}{r^{n+1}}\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}\right] = \frac{Am}{r_0^{m+1}}\left[\frac{r_0^{m+1}}{r^{m+1}} - \frac{r_0^{n+1}}{r^{n+1}}\right] = \frac{Am}{r_0^{m+1}}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{m+1} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{m+1}\right]$$

(2.5)

Для взаимодействия всех *N*i –тых и *N*j –тых атомов, образующих пары в кристаллах,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad (2.6)$$

где $U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ - энергия взаимодействия пары атомов с координатами $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_j$

. При механическом воздействии $r = r_0 \pm \Delta r$

При одноосном растяжении величина внешнего приложенного напряжения не должна превышать σ_{max} *или* P_{max}*. Условие для* P_{max} *можно записать как*

$\vec{r}_i$

$$\frac{dP}{dr} = 0 = 0 + \frac{r_0^{m+1}}{r_0^{m+2}}(m+1)(-1) + \frac{r_0^{n+1}}{r^{n+2}}(n+1) = 0 \qquad (2.7)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}\left(\frac{n+1}{m+1}\right) = \frac{r^{n+2}}{r^{m+2}} \qquad (2.8)$$

и

$$r_0^{n-m}\left(\frac{n+1}{m+1}\right) = r^{n-m}; r_{max} = r_0 \sqrt[n-m]{\frac{n+1}{m+1}} \qquad (2.9)$$

"Мягкие" кристаллы имеют m=1, n=3 и для них

r_{max} = 1,41 r_o

При перекрытии электронных оболочек m=1, n=11 и

Δr=0,2 r_o.

Если же преобладают силы Ван дер Вальса, , то

Δr=0,115 r_o.

В лагранжевых представлениях т.е $r = r_0(1+\varepsilon)$ $\varepsilon = \dfrac{\Delta r}{r_0}$

и из (2,5) получаем величину

напряжения:

$$\sigma = \frac{A_1 m}{r_0^{m+1}}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}}\right] \quad (2.10)$$

Реально ε = 0,005-0,2%. При $\varepsilon = 10^{-4}$ – *2* 10^{-3} *уже появляется остаточная деформация.*

Небольшие смещения или деформации могут вызвать остаточную деформацию только в том случае, если в реальном кристалле есть причины, повышающие его энергетический уровень, в частности, внутренние напряжения. Это наводит на мысль о существовании дефектов кристаллической решетки.

Разлагая в биноминарный ряд выражение (2.10), получаем

$$\sigma = \frac{A_1}{r_0^{m+1}}(n-m)\left[\varepsilon + \frac{(m+1)(m+2)-(n+1)(n+2)}{(m-n)2!}\varepsilon^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(n+1)(n+2)(n+3)}{(m-n)3!}\varepsilon^3 + \ldots\right] \qquad (2/11)$$

Здесь

$$\frac{A_1 m}{m+1}(n-m) = E$$

E − аналог модуля упругости.

Это одна из форм записи закона Гука. Таким образом закон Гука справедлив только для очень малых деформаций. Иеншем предложил такую связь между напряжение и деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 + k^2\left(\frac{\sigma}{E}\right)^3 + \ldots \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) можно получит из (2,10), полагая, что m=1, n=3.и пренебрегая *ε*^{2}, *ε*^{3}, *ε*^{4} *и т.д.*

$$\sigma = \frac{A_1 \cdot 1}{r_0^2}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^4}\right] = \frac{A_i \cdot 1}{r_0^2}\left[\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2+2\varepsilon+4\varepsilon^3+2\varepsilon^2+\varepsilon^2+2\varepsilon^3+\varepsilon^4}\right] = \frac{A_i 2\varepsilon}{r_0^2(1+4\varepsilon)} = E\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon}$$

$$E = \frac{2A_i}{r_0^2} \qquad \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{E}4\varepsilon = \varepsilon \qquad \frac{\sigma}{E} = \varepsilon\left(1 - 4\frac{\sigma}{E}\right) \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - 4\frac{\sigma}{E}\right)^{-1}$$

Разлагая $\frac{1}{1-4\frac{\sigma}{E}}$ в биноминальный ряд, получаем

$$\left[\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots\right]\rightarrow\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+4\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2+4^2\left(\frac{\sigma}{E}\right)^3+\ldots \quad (2.13)$$

Отсюда можно определить значение коэффициентов в формуле Иеншема.

Таким образом закон Гука оправдан только для $\sigma \ll E$

Исходя из анализа сил связи в кристаллической решетке, особенностью деформации кристаллов является неидентичность их поведения при растяжении и сжатии. При растяжении Δ_{rmax} достигается при P_{max}, а при сжатии ($-\Delta r$) нет.

Теоретическую прочность в двухатомной модели можно оценить
следующим образом. Подставим $P = P_{\max}$

$$P_{\max} = \frac{Am}{r_0^{m+1}}\left[\left(\frac{r_0}{r_{\max}}\right)^{m+1} - \left(\frac{r_0}{r_{\max}}\right)^{n+1}\right] \qquad (2.14)$$

Отсюда

$$r_{\max} = r_0 \sqrt[n-m]{\frac{n+1}{m+1}} \qquad (2.15)$$

Следовательно, можно представить напряжение $\sigma_{\max}$ *как*

$$\sigma_{\max} = \frac{A_1 m(n-m)}{r_0^{m+1}}\left[\frac{r_0^{m+1}}{r_0^{m+1}\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{n-m}}} - \frac{r_0^{n+1}}{r_0^{n+1}\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{n+1}{n-m}}}\right] \qquad (2.16,\ a)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{A_1 m(n-m)}{r_0^{m+1}}\left[\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-n}} - \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{n+1}{m-n}}\right] \qquad (2.16,\ б)$$

Тогда можно записать

$$\frac{A_1 m(n-m)}{r_0^{m+1}} = E = 2G(1+\mu) \qquad (2.17)$$

Здесь *μ − коэффициент Пассона.*
В этом случае

$$\sigma_{\max} = 2G(1+\mu)\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-n}}\left[1-\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\frac{n+1}{m+1}}\right] \qquad (2.18)$$

При m=1 n=3 $\sigma_{\max}$ =*0,325 G*.
При m=1 n=11 $\sigma_{\max}$ =*0,105 G*
При m=6 n=11 $\sigma_{\max}$ =*0,15 G*

Теоретическая прочность на сдвиг кристалла впервые была вычислена Френкелем, исходя из простой модели двух рядов атомов, смещаемых друг относительно друга под действием напряжения сдвига (рис. 2.2). Межплоскостное расстояние (расстояние между рядами) равно *a,* а расстояние между атомами в направлении скольжения равно *b.*

Под действием напряжения сдвига т эти ряды атомов смещаются друг относительно друга, попадая в равновесные позиции в таких точках, как *A* и *B,* где напряжение сдвига, необходимое для сохранения данной конфигурации, равно нулю.

Точно так же это напряжение равно пулю, когда атомы в обоих рядах располагаются точно друг над другом в положениях *C* и *D.* В промежуточных положениях напряжение имеет конечные значения, которые, периодически меняются в объеме решетки. Если для напряжения сдвига т смещение равно *x,* то напряжение будет периодической функцией *x* с периодом *b.* Проще всего предположить, что эта зависимость является синусоидальной (рис. 2.2)

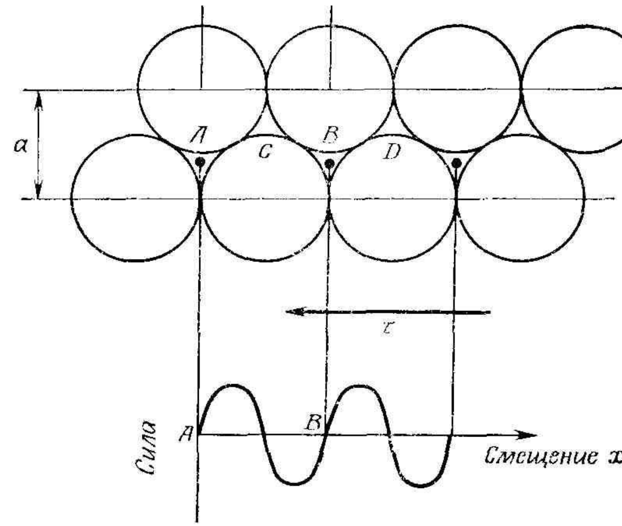

Рис. 2.2. К расчету прочности по А.Френкелю

$$\tau = k \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right). \quad (2.19)$$

Для малых смещений

$$\tau = k\frac{2\pi x}{b}.$$

Используя закон Гука, где *G* — модуль сдвига, получаем другое выражение

$$\tau = \frac{Gx}{a},$$

где *G* – модуль сдвига, а *x/a* — деформация сдвига.

Приравнивая приведенные выражения для т, получаем

$$k = \frac{Gb}{2\pi a}$$

Подставляя это значение *k* в соотношение (2.19), имеем

$$\tau = \frac{Gb}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right). \quad (2.20)$$

Максимальное значение т, отвечающее напряжению, при котором решетка переводится в неустойчивое состояние, достигается при смещении *b/4,* откуда

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{Gb}{2\pi a} = \tau_0, \quad (2.21)$$

где $т_0$ –– критическое напряжение сдвига.

напряжение сдвига приближенно равно G/2π. Для кристаллов меди G = 4000 кгс/мм^2; таким образом, теоретическое значение τ_0 составляет 760 кгс/мм^2 по сравнению со значением 100 гс/мм^2 для реальных кристаллов (табл. 2.2). Отсюда ясно, что теоретическое значение прочности на несколько порядков величины больше наблюдаемого значения.

Таблица 2.1

Модули Юнга некоторых веществ

Неметаллы	Модуль Юнга, ГПа	Металлы	Модуль Юнга, ГПа
Резина	0,7	Al	70
Пластик	17	Cu	125
Древесина	15	W	415
Стекло	55	Mo	320
Алмаз	400	Fe	210
Волокно бора	480	Mg	45

Такое расхождение воспринимается вначале как свидетельство того, что проведенный анализ является ошибочным, по более детальные исследования показывают, что, хотя упрощающие предположения приводят к получению лишь приблизительного ответа, общие выводы являются правильными. Расчет может быть уточнен главным образом за счет использования более близкого к действительности закона периодического изменения τ в зависимости от *x;* кроме того, следует учесть тот факт, что в реальных плотно упакованных металлических структурах могут быть устойчивые положения атомов, отличные от *A* и *B,* например двойниковая конфигурация. Однако даже с учетом этих факторов значение τ_0 *уменьшается только до величины* $G/30$, что все еще на несколько порядков величины больше наблюдаемого значения.

Из такого теоретического рассмотрения неизбежно следует заключение, что использованная простая модель не соответствует поведению реальных кристаллов, которые в действительности должны содержать дефекты, уменьшающие механическую прочность.

Еще в 1921 г. Гриффитс предположил, что относительно малая прочность хрупких твердых тел, таких, как стекло, объясняется наличием в них микроскопических трещин, на которых напряжение разрушения падает до значительно более низкого уровня, чем предсказанный теоретически. Однако лишь в 1934 г. Поляни, Орован п Тейлор независимо друг от друга ввели представление о дислокациях в кристаллическом твердом теле.

Дислокация является линейным дефектом, пли нарушением непрерывности смещения между двумя частями кристалла, из которых одна претерпела сдвиг, а другая нет; таким образом, деформация осуществляется последовательным прохождением дислокаций по плоскости скольжения, а не путем одновременного однородного сдвига по всему кристаллу.

$$\sigma_{\max} = \frac{G}{2\pi} = 0.16G$$

Реальные значения предела прочности $\sigma_{в}$ = *400 – 1500 – 3500 МПа*, $\sigma_{теор}$ = *10000 МПа*

2. Некоторые понятия механики твердого деформируемого тела

Напряженное состояние

Схема напряженного состояния элемента упругого континуума в условиях равновесия с окружающим объемом представлена на рис 2.3.

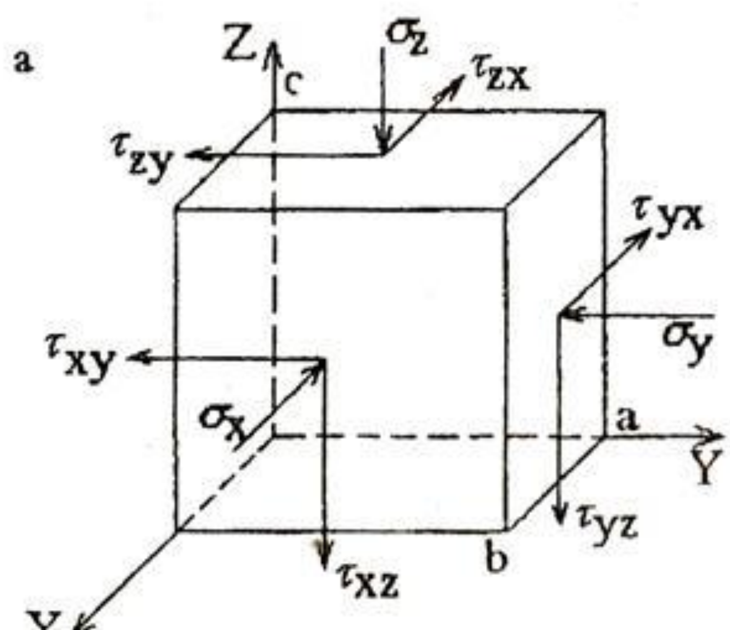

Рис. 2.3. Схема напряженного состояния элемента упругого континуума
в условиях равновесия с окружающим объемом

В этом случае тензор напряженного состояния можно записать

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

где σх . σ_y. σ_z – нормальные напряжения, τ_{ij} – *касательные напряжения.*

Согласно правилу Онзагера $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zy} = \tau_{yz}; \tau_{zx} = \tau_{xz}$

Когд
а $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

то $\sigma_x = \sigma_1; \sigma_y = \sigma_2; \sigma_z = \sigma_3$

Среднее гидростатическое напряжение можно записать

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \qquad (2.23)$$

Соответственно главные касательные напряжения можно определить как:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad (2.24)$$

Тогда тензор деформации можно представить как сумму шарового тензора и девиатора поля напряжение

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_n - \tau_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_n - \tau_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_n - \tau_z \end{vmatrix} \qquad (2.25)$$

Гидростатическое напряжении шарового тензора равно нулю

$$\frac{(\sigma_n - \sigma_x) + (\sigma_n - \sigma_y) + (\sigma_n - \sigma_z)}{3} = \frac{3\sigma_n}{3} - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 0 \qquad (2.26)$$

Шаровой тензор характеризует деформацию тела без изменения его формы.

Девиатор отвечает за дефолиацию, связанную с изменением формы твердого тела.

Для тензора поля напряжений можно записать

$$\sigma^3 - J_i\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \qquad (2.27)$$

где J_1. J_2. J_3 – инварианты тензора напряжения:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad J_2 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z \qquad J_3 = \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z$$

Деформации в поле напряжений

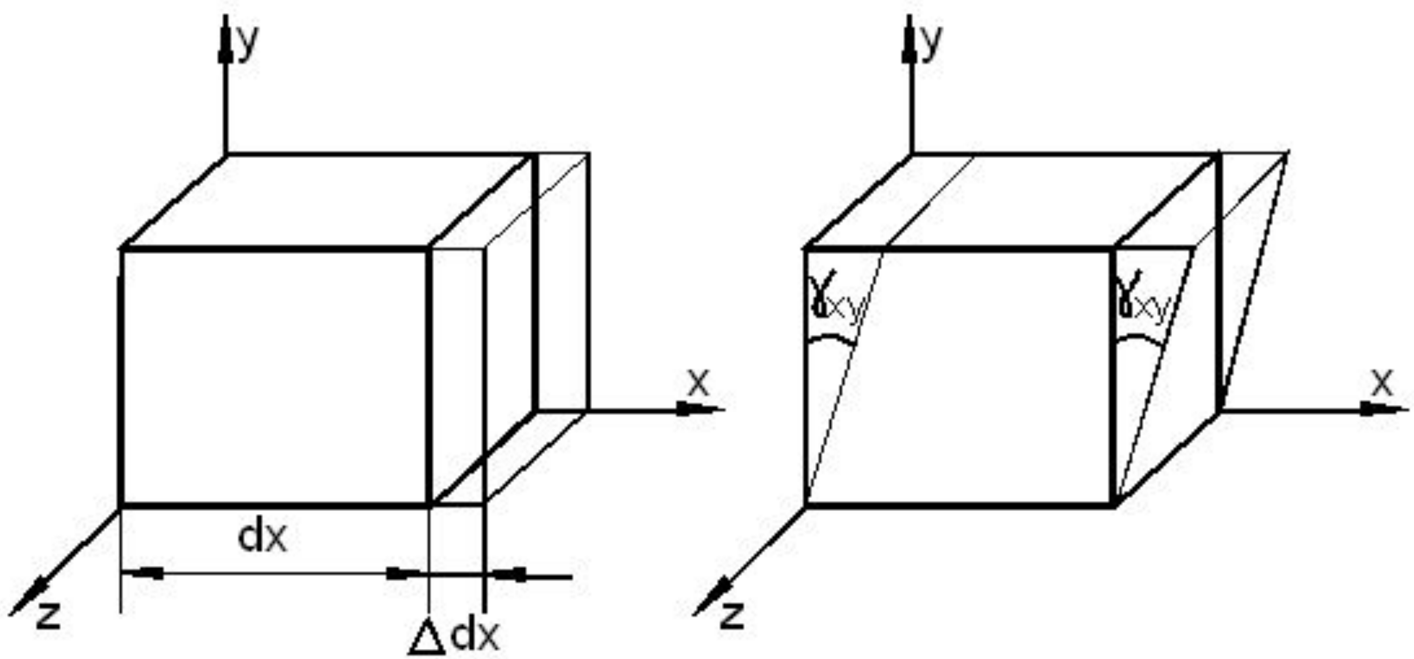

Рис. 2.4. К определению деформаций в поле напряжений

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_0}{l_1} = \frac{\Delta l}{l} \qquad (2.28)$$

Истинная деформация описывается уравнением:

$$\varepsilon = \int \frac{\Delta l}{l} = \int \frac{dl}{l} = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} \qquad (2.29)$$

Если считать, что при деформации объем тела не изменяется (V = const), то удлинение тела в одном направлении должно сопровождаться его сокращением в двух других направлениях. Это учитывается коэффициентом Пуассона μ.

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x; \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x$$

Обычно μ = 0,25-0,5. Для абсолютно не сжимаемого тела μ = 0,5.

Средняя (гидростатическая) деформация определяется как

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \qquad (2.30)$$

Сдвиговую деформацию для чистого сдвига определяют как показано на рис.2.4.

В этом случае тензор поля деформаций можно записать как

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_n & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_n - \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_n - \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_n - \varepsilon_z \end{vmatrix} \qquad (2.31)$$

Здесь шаровой тензор отвечает за деформацию без изменения формы, девиатор – за деформацию с изменением формы.

$c_{ji} = c_{ij}$ В этом случае обобщенный закон Гука – Коши записывается как:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{yz} \\
\sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{xz} + c_{26}\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{xz} + c_{36}\gamma_{yz} \\
\tau_{xy} &= c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{xz} + c_{46}\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= c_{51}\varepsilon_x + c_{52}\varepsilon_y + c_{53}\varepsilon_z + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{xz} + c_{56}\gamma_{yz} \\
\tau_{yz} &= c_{61}\varepsilon_x + c_{62}\varepsilon_y + c_{63}\varepsilon_z + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{xz} + c_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

Здесь 36 const в соотношениях между напряженьями и деформациями. Если применить правило Онзагера $c_{ji} = c_{ij}$ то число const становится равным 21. А езди расположить оси по ребрам куба, то,

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} = c_{33} \\
c_{44} &= c_{55} = c_{66} \\
c_{12} &= c_{13} = c_{23}
\end{aligned} \qquad (2.33)$$

Константы Ламэ: модуль нормальной упругости, модуль Юнга − *E*: модуль сдвига, модуль Гука – *G*; коэффициент Пуассона - *μ*.

Соотношение между ними:

$$G = \frac{E}{2(1+2\mu)} \quad S=\frac{1}{c} \qquad\qquad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

K – объемный модуль упругости.

$$\tau_{xy} = c_{44}\gamma_{xy}$$

- напряжение действует в плоскости (100) в направлении 〈010〉 (ребро куба).

$$c' = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

- напряжение действует в плоскости (110) направлении 〈110〉 (диагональ грани куба).

Податливость *S*, величина, обратная модулю

$$S = \frac{1}{c}$$

$$S_{11} + 2S_{12} = \frac{1}{c_{11} + 2c_{12}}, S_{11} = \frac{1}{E}$$

$$S_{11} - S_{12} = \frac{1}{c_{11} - c_{12}}, -\frac{S_{12}}{S_{11}} = M$$

$$S_{44} = \frac{1}{c_{44}}, \frac{1}{S_{44}} = G$$

Анизотропия упругих свойств кристалла определяется константой анизотропии *A* из соотношением

$$\frac{c_{44}}{c_1'} = A = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$$

Константа анизотропии в некоторых металлах

Металл	Тип кр. решетки	Константа *A*
Al	гцк	1,2
Cu	гцк	1,2
Pd	гцк	4,0
Ni	гцк	2,1
Pt	гцк	1,0
Fe	оцк	2,4
Mo	оцк	0,8
Cd	гпу,1,886 А.	C_{13} 44,2 C_{33} 17,3
Mg	ГПУ, 1,638 А	C_{13} 21,3 C_{35} 61,5

В общем случае трехосного напряженного состояния результирующая деформация вдоль выбранного направления вычисляется из соотношения:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{E}\mu - \frac{\sigma_z}{E}\mu \qquad (2.34)$$

Таким образом

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)\right]$$

Ил
и

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)\right]$$

Объемная компонента деформации равна.

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

Если положить, что V= 1,
то

$$1 + \Delta V = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Пренебрегая члены более высокого порядка и зная что величина ε <<1, можно записать

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Работа упругой деформации

Пусть *F* площадь поперечного сечения образца, l_o - первоначальная длина. Тогда запасенная энергия *W* может быть представлена как

$W = Fl_0 \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$ и в единице объема $\Delta W = \int_0^{\varepsilon_1} \nabla d\varepsilon = E \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon d\varepsilon$ т.к. $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon$

Или $\Delta W_1 = \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2 = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}$

В общем случае $\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \to \Delta W = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right]$$

Часть энергии деформации связана с деформацией без изменения форумы, часть только с формоизменением. То есть,

$$\Delta W = \Delta W_S + \Delta W_V$$

Тогда после соответствующих преобразований получаем:

$$\Delta W_V = \frac{1}{2}\sigma_V \varepsilon_V = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \frac{1}{6E}\left[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) - 2\mu(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right] =$$

$$\frac{(1+2\mu)}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_2)^2$$

$$\Delta W_S = \Delta W - \Delta W_V = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right] -$$

$$= \frac{(1+2\mu)}{6E}\left[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_2)^2 + 2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right] =$$

$$= \frac{2}{6E}[3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 6\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) - (\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) -$$

$$2\mu(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) + 4\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)] =$$

$$= \frac{1}{6E}\left[2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) - 2\mu(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right] =$$

$$= \frac{2(1+\mu)}{6E}\left[2\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}{2}\right] =$$

$$= \frac{2(1+\mu)}{3E}\frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}{2} =$$

$$= \frac{2(1+\mu)}{3E}\left[\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\right]$$

Таким образом, в запасенной энергии, связанной с формоизменением объекта, входят только касательные напряжения, выраженные через разницу нормальных напряжений.

Теории эквивалентности

При нагружении макроскопического тела в нем, как правило, возникает объемное напряженное состояние. Однако экспериментально можно определить только либо напряжение растяжения, либо напряжение сжатия. Поэтому предлагаются некоторые подходы, позволяющие получить представление об объемном напряженном состоянии по данным испытания на растяжение. Такие подходы называются гипотезами эквивалентности. Гипотезы эквивалентности показывают связь между линейным и пространственным напряженными состояниями. При этом делаются следующие допущения:

а). тело считается однородным и изотропным по всему объему;

б). материал заполняет весь объем без пор и трещин;

в). выполняется во всем объеме закон Гука;

г). отсутствуют в материале внутренние напряжения.

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений. Системы считаются эквивалентными, если наибольшие напряжения равны:

$$\sigma = \sigma_1 \qquad (2.36)$$

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\right) \rightarrow \sigma = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \qquad (2.37)$$

. 3. Гипотеза наибольших касательных напряжений. Состояние считается эквивалентным, если наибольшие касательные напряжения , возникающие в каждом из них, равны между собой. Критерий Мора.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \qquad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \rightarrow \sigma = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad (2.38)$$

4. Гипотеза одинаковой энергии формоизменения. Состояние считается эквивалентным, если энергия формоизменения элементарного объема при линейном и объемном напряженном состояниях равны. Критерий Генки и Мозеса.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]} \quad (2.39$$

Правая часть уравнения – приведенные (касательные) напряжения.

Схемы напряженного состояния

Диаграмма напряженного состояния Я.Б.Фридмана.

Коэффициент мягкости нагружения:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}^{np.}}$$

Наибольшие приведенные напряжения по второй гипотезе эквивалентности:

$$\sigma_{\max}^{np.} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \qquad \tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

То есть,

$$\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sigma_1 - 0,5(\sigma_2 + \sigma_3)} \qquad (2.40)$$

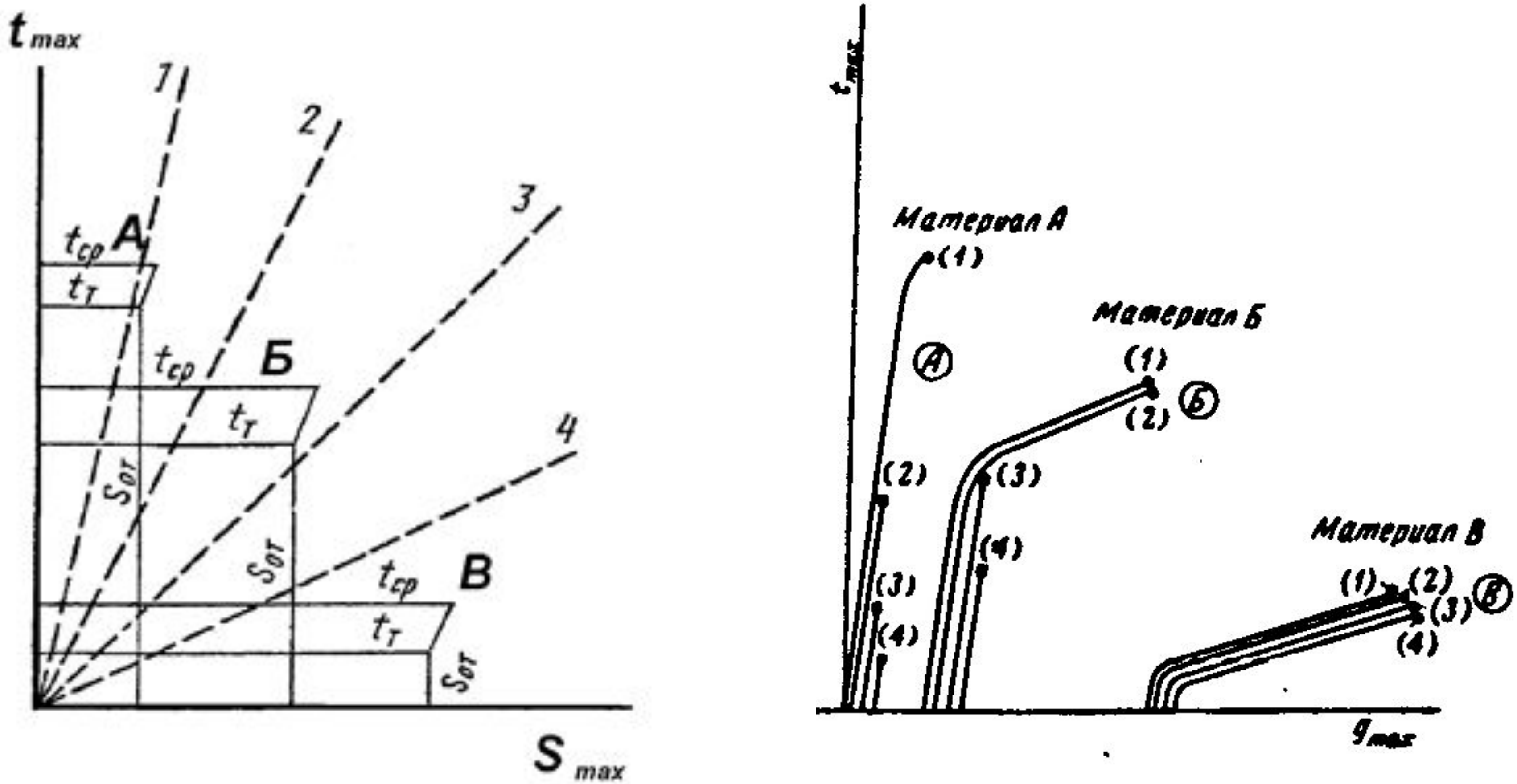

Рис.2.5. Диаграммы Я.Б.Фридмана.

t_{max} – наибольшие касательные напряжения; S – приведенные растягивающие напряжения.

1– вдавливание (царапание); 2 – сжатие; 3 – кручение;

4 - растяжение

Схема напряженного состояния	Коэффициент мягкости, α
Трехосное растяжение	0
Одноосное растяжение	0,5
Кручение	1
Одноосное сжатие	2
Трехосное сжатие	4

Уравнения пластичности

Все что ранее рассматривалось относилось к деформации в упругой области. Заманчиво рассмотреть ситуация на начальном участке деформационной кривой немного выше предела пропорциональности. В этом случае происходит переход в область пластических деформаций. Но поскольку захватывается только начальный этап этого процесса, полагают, что прежние соотношения между напряжениями и деформациями сохраняются с определенной степени отклонений.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_1 - \mu'(\sigma_2+\sigma_3)\right] \to d\varepsilon_{p_1} = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]dc \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_2 - \mu'(\sigma_1+\sigma_3)\right] \to d\varepsilon_{p_2} = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\right]dc \qquad (2.41) \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_3 - \mu'(\sigma_2+\sigma_1)\right] \to d\varepsilon_{p_3} = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_1)\right]dc
\end{aligned}
$$

Здесь *c* – свойство, зависящее от степени деформации.

$P_1 > P_2 > P_3$ – индексы компонент деформации по разным осям. $\mu \approx 0{,}5$

Работа пластической деформации на единицу объема

$$dW_p = \sigma d_1 d\varepsilon_{p_1} + \sigma d_2 d\varepsilon_{p_1} + \sigma d_3 d\varepsilon_{p_3}$$

$$\sigma_{d_1} = \sigma_1 - \sigma_v; \sigma_{d_2} = \sigma_2 - \sigma_v; \sigma_{d_3} = \sigma_3 - \sigma_v;$$

σ_v – объемные напряжения.

Уравнение Райса для этого случая:

$$dW_p = \frac{3}{2}\left(\sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2 + \sigma_{d_3}^2\right)dc \qquad (2.42)$$

Для одноосного растяжения

$$d\varepsilon_p = \sigma dc$$

Здесь σ - напряжение течения. Коэффициент деформационного упрочнения

$$k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

отсюда

$$dc = \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{\sigma}$$

Приближенные методы учитывают равенство объемов до и после деформирования

$$\Delta W_p = \int_{l_0}^{l_*} \sigma(l)\frac{dl}{l} = \sigma_* \ln\frac{l_*}{l_0} = \sigma_* \ln\frac{F_*}{F_0} \qquad (2.43)$$

Коэффициент процесса ψ =0,5 – 0,8.

$$\Delta W_p = \frac{\sigma_*}{\psi}\ln\frac{F_0}{F}$$

Если x – путь, P – сила. То работа на этом пути равна $P\,x$.
Объем тела равен $F_1\,x$.
В этом случае полная работа деформации равна:

$$\Delta W_p F_1 x = P_1 x \rightarrow \Delta W_p = \frac{P_1}{F_1} \rightarrow P_1 = \frac{\sigma_*}{\psi}\ln\frac{F_1}{F_2}\cdot F_1 \qquad (2.44)$$