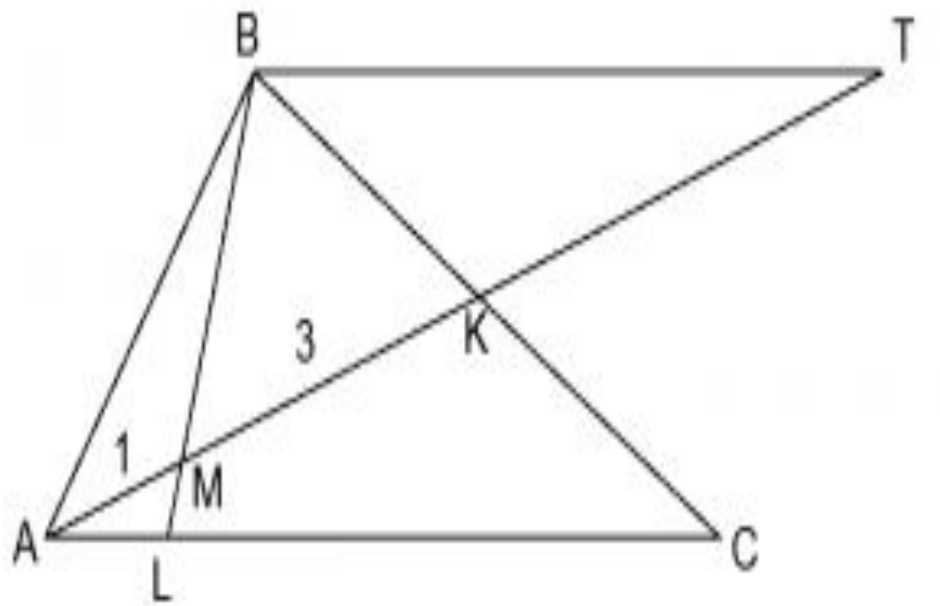
Кружковое занятие
Тема : Решение задач с помощью проведения прямой, параллельной одной из сторон данного треугольника.
.

Учитель : Гагиева А.О.
МКОУ СОШ с. Н.Батако

- Рассмотрим несколько геометрических задач, каждая их которых легко решается с помощью одного и того же дополнительного построения: проведения прямой, параллельной одной из сторон данного треугольника.

Задача 1.

- На медиане AK треугольника ABC взята точка M, причем $AM : MK = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?



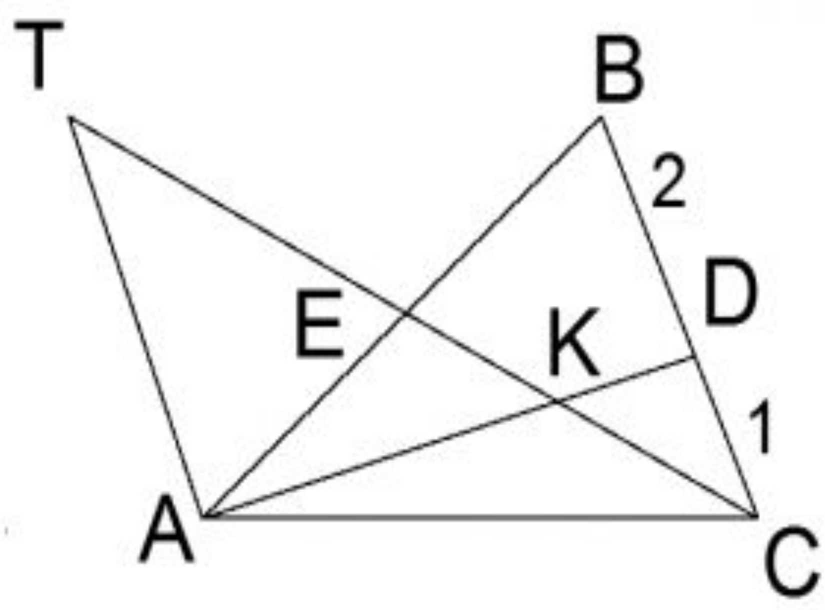
Решение:

- Через вершину B проведем прямую, параллельную AC, продлим медиану AK до пересечения с этой прямой в точке T. Из равенства треугольников KBT и AKC (по стороне и двум прилежащим углам: $BK = KC$, т. к. AK — медиана, $\angle BKT = \angle AKC$ — вертикальные, $\angle KBT = \angle KCA$ — накрест лежащие при параллельных прямых AC, BT и секущей BC) следует, что $BT = AC$ и $AK = KT$.

- Из подобия треугольников AML и MBT (по двум углам: $\angle MAL = \angle BTK$, $\angle ALB = \angle LBT$ — накрест лежащие при параллельных прямых AC, BT и секущих BL, AT) следует, что $AL : BT = AL : AC = AM : MT$. Поскольку $AK = KT$, то $AM : MT = 1 : 7$. Тогда $AL : AC = 1 : 7$, а $AL : LC = 1 : 6$.

Задача 2.

- В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

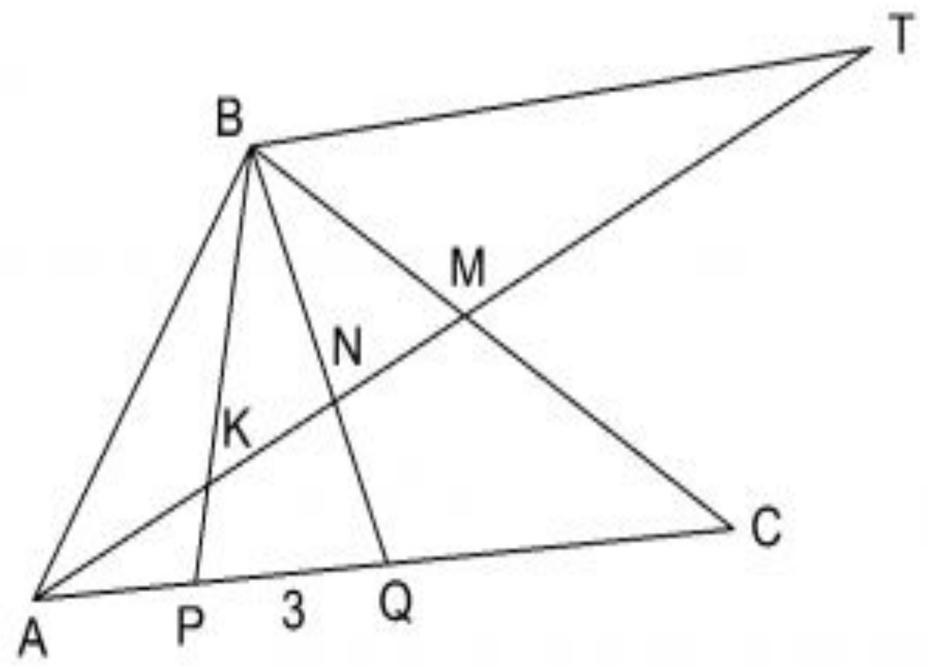


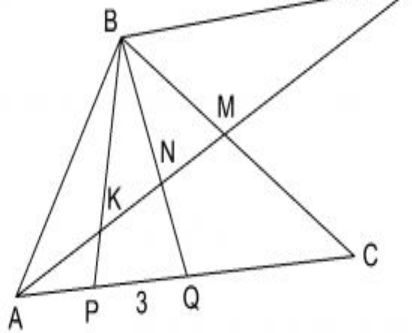
Решение:

- Через вершину A проведем прямую, параллельную стороне BC, продлим медиану CE до пересечения с этой прямой в точке T. Треугольник TEA равен треугольнику EBC по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AE = EB$, т. к. CE — медиана, $\angle AET = \angle CEB$— вертикальные, $\angle TAB = \angle ABC$ — накрест лежащие при параллельных прямых TA, BC и секущей AB). Следовательно $BC = TA$ и $TA = 3DC$.
- Треугольники TKA и DKC подобны по двум углам ($\angle TAD = \angle KDC$, $\angle TCD = \angle ATC$ — накрест лежащие при параллельных прямых TA, BC и секущих AD, TC), следовательно KD : KA = DC : TA = 1 : 3.

Задача 3.

- В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$.
  Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC.





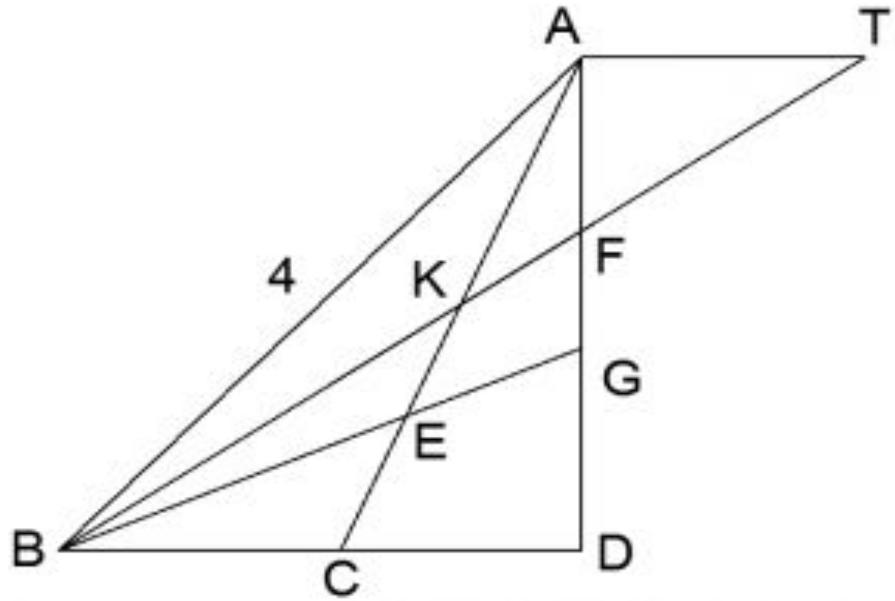
Решение:

- Проведем через вершину B прямую, параллельную AC, и продолжим медиану AM до пересечения с этой прямой в точке T. Из равенства треугольников AMC и BMT (по стороне и двум прилежащим к ней углам: $BM = MC$, т. к. AM — медиана, $\angle AMC = \angle BMT$ — вертикальные, $\angle TBM = \angle MCA$ — накрест лежащие при параллельных прямых AC, BT и секущей BC) следует, что $AC = BT$ и $MT = AM$. Тогда $AK = 1/6\ AT$, $AN = 1/3\ AT$.

- Из подобия треугольников AKP и KBT (по двум углам: $\angle TAP = \angle BTA$, $\angle APB = \angle TBP$ — накрест лежащие при параллельных прямых AC, BT и секущих AT, BP) следует, что $AP = 1/5BT = 1/5AC$, а из подобия треугольников ANQ и BNT: $AQ = 1/2BT = 1/2AC$. Поскольку $AQ — AP = PQ = 3$, то $1/2AC — 1/5AC = 3$. Отсюда находим, что $AC = 10$.

Задача 4.

- В треугольнике ABC проведена высота AD. Прямые, одна из которых содержит медиану BK, а вторая — биссектрису BE, делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что $AB = 4$. Найдите сторону AC.



Решение:

- BE — биссектриса треугольника ABC, а потому BG — также биссектриса треугольника BDA. Из условия следует, что $AG = 2GD$, поэтому по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $AB = 2BD$, следовательно $BD = 2$.

- Через вершину A проведем прямую, параллельную стороне BC. Продлим медиану BK треугольника ABC до пересечения с этой прямой с точке T. Из равенства треугольников AKT и BKC (по стороне и двум прилежащим к ней углам: $AK = KC$, т. к. BK — медиана, $\angle KBC = \angle ATK$ — вертикальные, $\angle BCK = \angle KAT$ — накрест лежащие при параллельных прямых BC, AT и секущей AC) следует, что $BC = AT$.

- Из подобия треугольников ATF и FBD (по двум углам: $\angle ATF = \angle FBD$ - накрест лежащие при параллельных прямых BD, AT и секущей BT, $\angle TAF = \angle BDF$ - прямые, коэффициент подобия $AF : FD = 1 : 2$) следует, что $BD = 2AT$, а значит $AT = BC = CD = 1$. Из теоремы Пифагора для треугольника ABD следует, что $AD = 2\sqrt{3}$. И из теоремы Пифагора для треугольника ACD окончательно следует, что $AC = \sqrt{13}$.