

# ***Показательные уравнения и способы их решения.***

Автор:

учитель математики МБОУ  
«Средняя (полная)  
общеобразовательная школа  
№8» Елабужского  
муниципального района РТ  
Шурыгина И.В.

## ***Определение:***

Показательные уравнения – уравнения, в которых переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Например,

$$4^{x-1} = 4,$$

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8},$$

$$0,5^{x+7} \cdot 0.5^{1-2x} = 2,$$

$$16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0.$$

# *Основные методы решения показательных уравнений*

1. Метод уравнивания показателей.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический ( он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции).

# Метод уравнивания показателей

Показательное уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , где  $a > 0, a \neq 1$

равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{8},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$2x + 1 = 3,$$

$$2x = 3 - 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

Ответ:  $x=1$ .

*Используя формулу*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Решим уравнение

$$\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^6,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^6,$$

$$-2x = 6,$$

$$x = 6 : (-2),$$

$$x = -3.$$

Ответ:  $x = -3$ .

*Продолжим*  $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^2,$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+6} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-6},$$

$$2x + 6 = -6,$$

$$2x = -6 - 6,$$

$$2x = -12,$$

$$x = -6.$$

Ответ:  $x=-6$ .

Решите уравнение и укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{2,25x-2} = 6.$$

1)  $(-3; -2]$     2)  $(-2; 0)$

3)  $[2; 5)$

4)  $[0; 2)$

Решение:

т.к.  $\frac{1}{36} = 6^{-2}$ , то получаем

$$(6^{-2})^{2,25x-2} = 6;$$

$$6^{4-4,5x} = 6^1;$$

$$4 - 4,5x = 1;$$

$$-4,5x = 1 - 4;$$

$$-4,5x = -3;$$

$$x = \frac{-3}{-4,5};$$

$$x = \frac{30}{45};$$

$$x = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \in [0; 2)$$

**Решите уравнение, используя свойство пропорции.**

**В ответе укажите меньший корень.**

$$\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}},$$

$$6^{x^2} \cdot 6^{8-5x} = 3^2 \cdot 2^2,$$

$$6^{x^2-5x+8} = 6^2,$$

$$x^2 - 5x + 8 = 2,$$

$$x^2 - 5x + 8 - 2 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Ответ: 2-меньший корень.

## *Метод разложения на множители.*

Решите уравнение  $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3 = 9,$

$$3^{x-1}(2 \cdot 3^2 - 6 - 3^1) = 9,$$

$$3^{x-1} \cdot 9 = 9,$$

$$3^{x-1} = 1,$$

$$3^{x-1} = 3^0,$$

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ:  $x=1.$

*Решите уравнения:*

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x} (64 + x) = 0,$$

*т.к.  $8^{2x} > 0$ , то*

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ:  $x = -64$ .

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 30$$

Т.к.  $0 < a < 1$  , то вынесем за скобку степень с наибольшим показателем

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot (1 + 5) = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 6 = 30,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5,$$

$$5^{-x} = 5,$$

$$-x = 1.$$

$$x = -1.$$

Ответ:  $x = -1$

Найти корни показательного уравнения, указать их сумму.

$$162^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 24,$$

$$2^x \cdot 81^x - 8 \cdot 81^x = 3 \cdot 2^x - 8 \cdot 3,$$

$$81^x \cdot (2^x - 8) = 3 \cdot (2^x - 8),$$

$$81^x \cdot (2^x - 8) - 3 \cdot (2^x - 8) = 0,$$

$$(2^x - 8) \cdot (81^x - 3) = 0,$$

$$2^x = 8 \quad \text{или} \quad 81^x = 3,$$

$$x_1 = 3.$$

$$3^{4x} = 3,$$

$$4x = 1,$$

$$x_2 = 0,25.$$

$$x_1 + x_2 = 3 + 0,25 = 3,25.$$

**Ответ: 3,25.**

## Решите уравнение методом введения новой переменной

$$2^{2x} + 2^x - 2 = 0;$$

Пусть  $2^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда  $t^2 + t - 2 = 0$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1, \text{ значит, } t_1 = -2 \text{ не удовлетворяет условию } t > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = -2 & t_2 = 1 \end{cases}$$

Если  $t = 1$ , то  $2^x = 1$ ,  
 $2^x = 2^0$ ,

$$x = 0.$$

Ответ:  $x=0$ .

## Решите однородное уравнение

$$3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0 \quad | : (2^x \cdot 3^x),$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0,$$

Пусть  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ ,  $t > 0$ , тогда

$$3t + 1 - 2 \frac{1}{t} = 0 \quad | \cdot t,$$

$$3t^2 + t - 2 = 0,$$

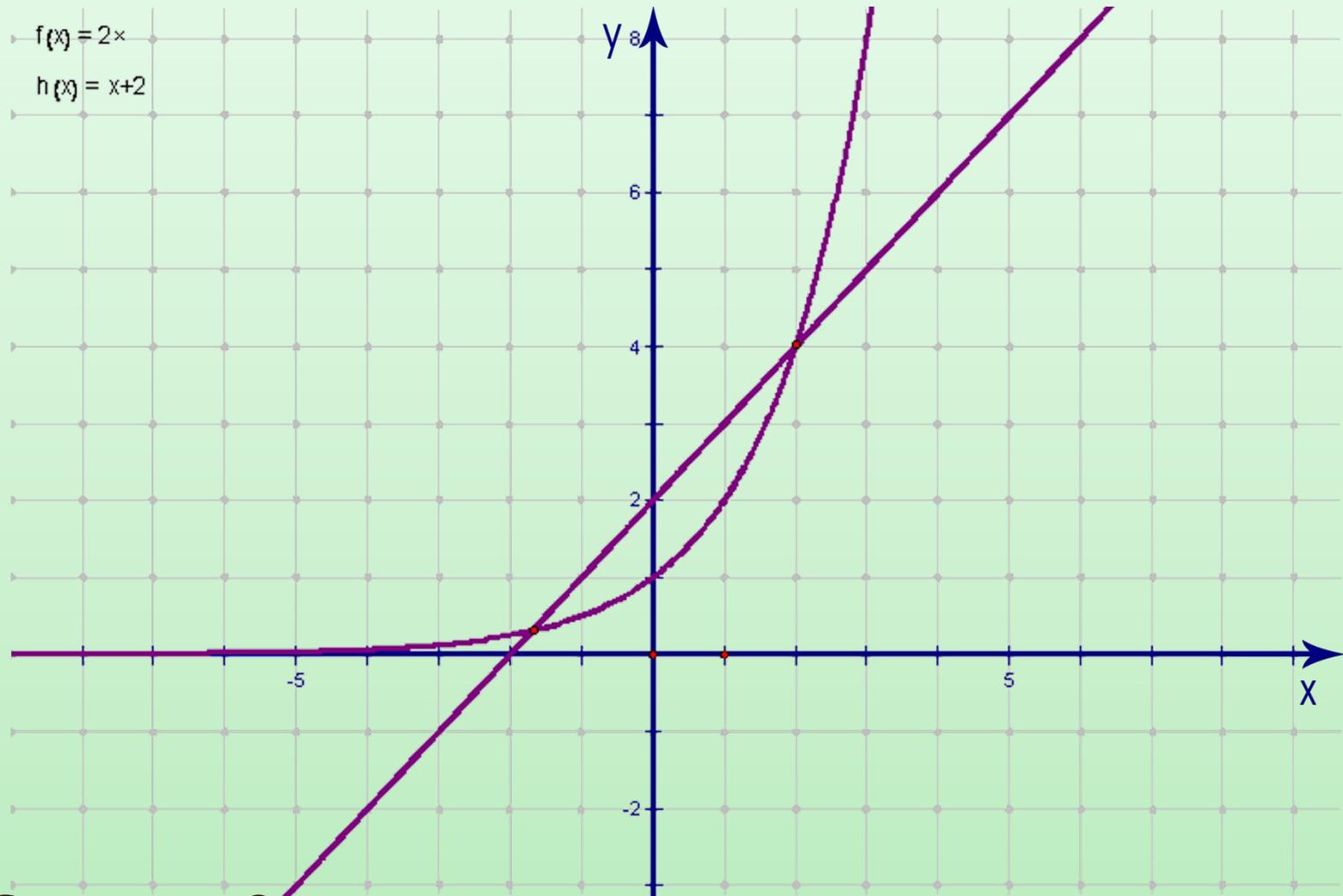
$t_1 = -1$ , не удовлетворяет условию  $t > 0$

$$t_2 = \frac{2}{3},$$

Если  $t = \frac{2}{3}$ , то  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ ;  $x = 1$ .

Ответ:  $x=1$ .

Решите графически  $2^x = x + 2$ , в ответ  
запишите положительный корень:



Ответ:  $x=2$

Уравнения, решаемые с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Решить уравнение  $7^{6-x} = x + 2$ ;

Рассмотрим функции:  $y = 7^{6-x}$  и  $y = x + 2$

Функция  $y = 7^{6-x}$  - показательная, монотонно убывающая на  $\mathbb{R}$ .

Функция  $y = x + 2$  -линейная, монотонно возрастающая на  $\mathbb{R}$ . Следовательно, графики данных функций могут пересекаться не более 1 раза. Значит, уравнение не может иметь более одного корня, который может быть найден подбором:  $x=5$ .

Ответ:  $x=5$ .

Решим уравнение  $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$

Решение:

разделим левую и правую часть уравнения на  $13^{\sqrt{x}}$ ,

так как  $13^{\sqrt{x}} \neq 0$ , получаем  $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}} = 1$ .

Рассмотрим функцию  $y = \left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}}$ , данная функция

монотонно убывает на множестве неотрицательных чисел, т.к. является суммой двух убывающих показательных функций при  $x \geq 0$ .

Следовательно, данная функция принимает каждое свое значение не более 1 раза, поэтому исходное уравнение имеет не более 1 корня, который можно найти подбором.

Зная, что  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , получаем  $\sqrt{x} = 2, x = 4$ .

Ответ:  $x = 4$ .

## Показательно-степенные уравнения вида

$$(a(x))^{b(x)} = (a(x))^{c(x)}$$

Данное уравнение эквивалентно уравнению  $a(x) = 1$  и системе:

$$\begin{cases} b(x) = c(x), \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Отдельно рассматривается случай  $a(x) = 0$  при условиях  $b(x) > 0, c(x) > 0$ .

Решите уравнение  $(x - 2)^{x^2 - 5x} = (x - 2)^{4 - 2x}$ .

Решение: 1)  $x - 2 = 1, x = 3$ .

$$2) \begin{cases} x^2 - 5x = 4 - 2x, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$$

3)  $x - 2 = 0$  при  $x = 2$ .

$$\begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 4, \\ x > 0. \end{cases} \text{ значит } x = 4.$$

При подстановке получаем при  $x=2$  равенство не имеет смысла.

Ответ: 3;4.

## Решить показательное уравнение с параметром

Решить уравнение  $2^{(a^2+10a+21)x} = 2^{2a^2+a-15}$ .

$$(a^2 + 10a + 21)x = 2a^2 + a - 15,$$

Разложим на множители квадратные трехчлены и получим:

$$(a + 3)(a + 7)x = (2a + 5)(a + 3)$$

1. Если  $a = -3$ , то  $0 \cdot x = 0, x \in R$

2. Если  $a = -7$ , то  $0 \cdot x = 36$ , решений нет.

3. Если  $a \neq -3, a \neq -7$ , то  $x = \frac{2a+5}{a+7}$ , один корень.

Ответ: 1. При  $a = -3$ ,  $x \in R$ .

2. При  $a = -7$ , нет решений.

3. При  $a \neq -3, a \neq -7$ ,  $x = \frac{2a+5}{a+7}$ ,

## Литература:

Г.И.Ковалева и др. «Математика, тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами», Волгоград, издательство «Учитель»;

А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Алгебраический тренажер», Москва, «Илекса» 2001г.;

И.С.Слонимская, А.И.Слонимский, «Математика, экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ, уравнения и неравенства», Москва, «АСТ Астрель» 2009г.;

Материалы из интернет-ресурсов.