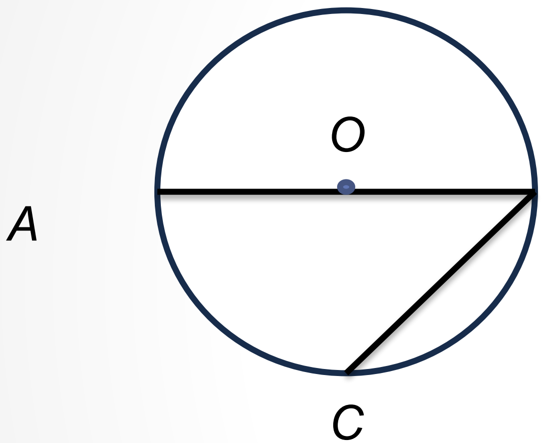
Окружность вписанная, описанная, вневписанная

МАОУ «Лицей» г. Балашиха
Учитель математики
Жирякова Л.В.

<u>Определение</u>



$d = 2r$

Окружность *– множество точек, равноудалённых от данной точки плоскости (центр)*
Радиус *(r) – отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности*
Хорда *– отрезок, соединяющий две лютые точки окружности*
Диаметр *(d) – хорда, проходящая через центр*

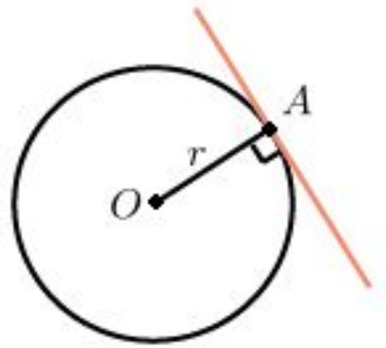
$C = \pi d$

$C = 2\pi r$

Длина окружности

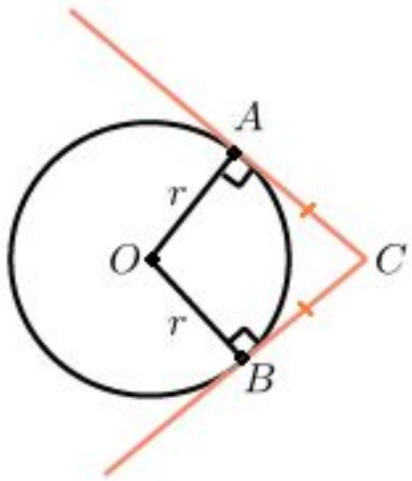
$\pi \approx 3{,}14 \approx \frac{22}{7}$

Касательная к окружности



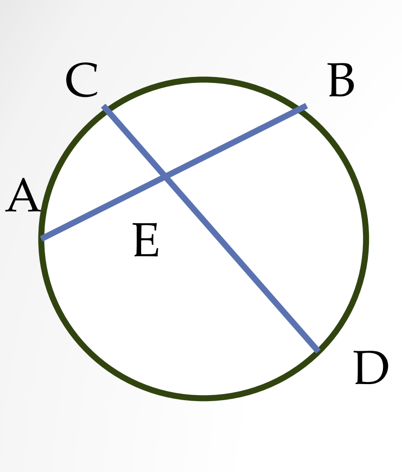
Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной.

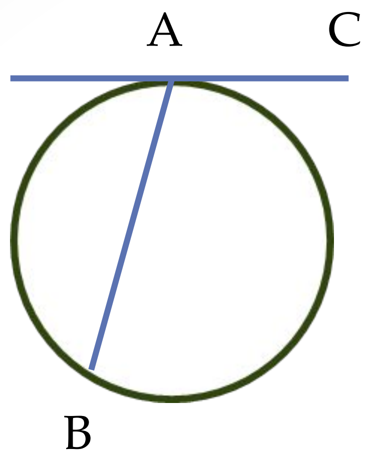
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

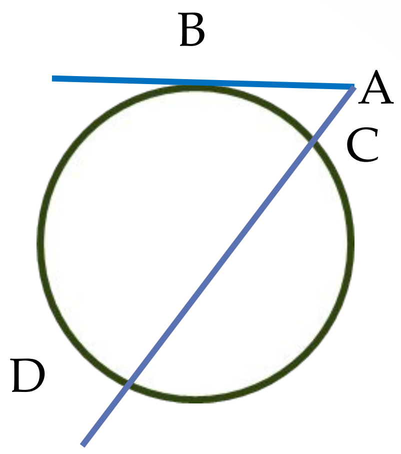


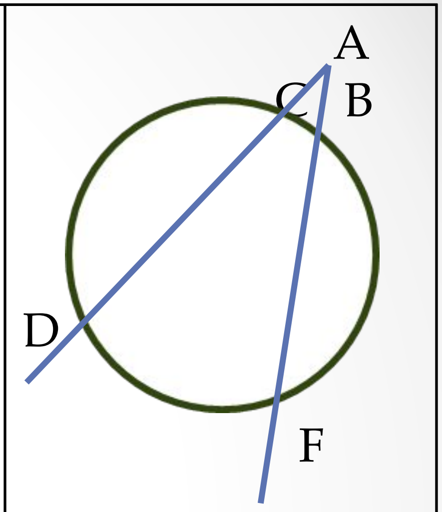
Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны.

Свойства хорд, секущих и касательных





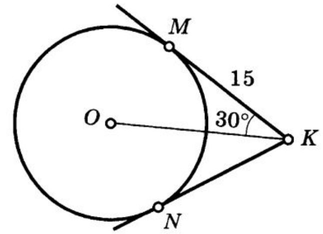




AB CD хорды AB ∩ CD = E AE · BE = CE · DE	AC - касательная AB – хорда угол CAB равен половине дуги AB		AD - секущая AF - секущая AC · AD = AB · AF УголDAF равен полуразности дугDF и CB

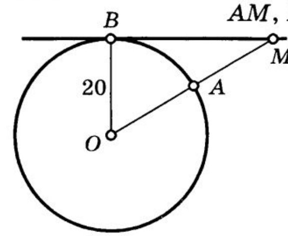
9

MN — ?



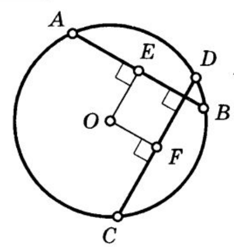
10

$OM = 30$
AM, BM — ?



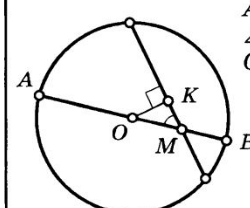
11

$AO = 10$
$OE = 8$
$OF = 6$
AB, CD — ?



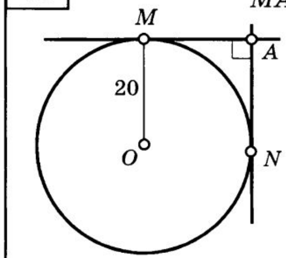
12

$MB = 4$
$AM = 12$
$\angle OMK = 30°$
OK — ?



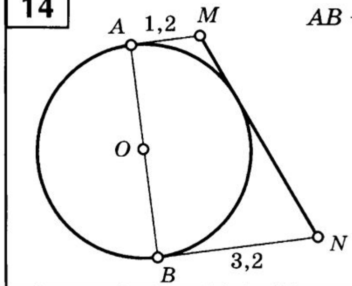
13

MA, NA — ?



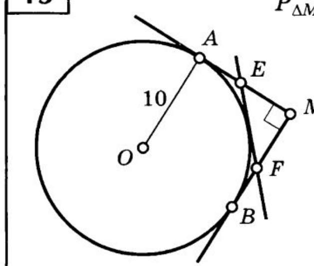
14

AB — ?



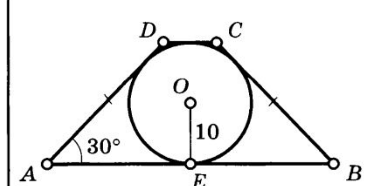
15

$P_{\Delta MEF}$ — ?



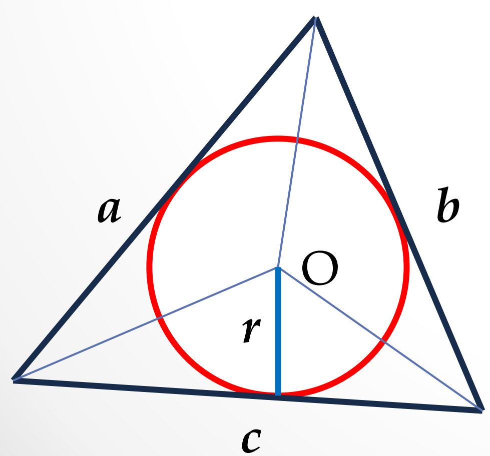
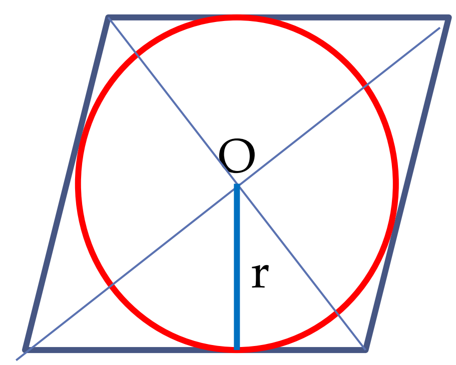
16

$ABCD$ — трапеция
AD, BC — ?

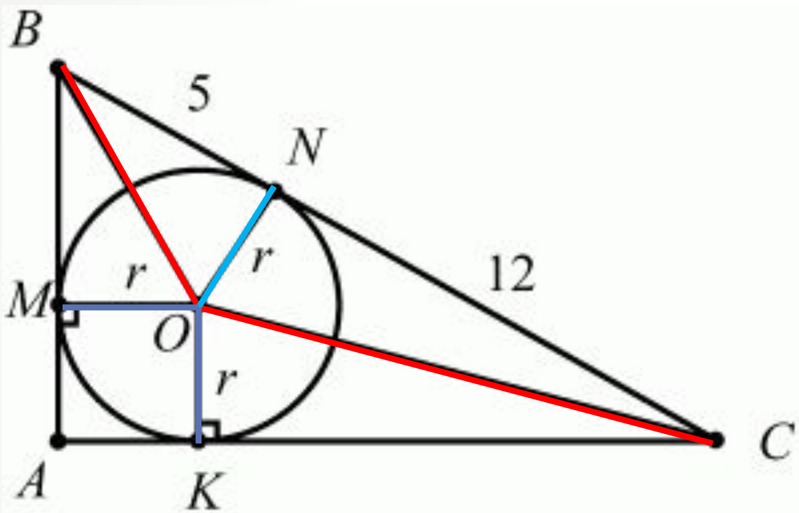


Вписанная окружность

определение	Окружность вписана в многоугольник, если она касается всех сторон многоугольника
центр	*лежит на пересечении биссектрис углов многоугольника*
радиус	Перпендикуляр, опущенный из центра на сторону многоугольника

треугольник	четырёхугольник
В любой треугольник можно вписать окружность и только одну	В четырёхугольник можно вписать окружность, если суммы его противолежащих сторон равны
	

Задача 1.
В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найдите катеты треугольника



1. Впишем в треугольник ABC окружность и соединим её центр O с вершинами B, C. Проведём также перпендикуляры OK, ON, OM. Они являются радиусами вписанной в треугольник окружности.

2. ΔBMO = ΔBNO (по гипотенузе и острому углу), следовательно BM = BN = 5.

Аналогично, ΔOKC = Δ ONC

Значит KC = NC = 12.

3. AMOK– квадрат, значит, AM = AK = r.
4. Получаем, что AB = AM + MB = r + 5, AC = AK + KC = r + 12
5. По теореме Пифагора получаем: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$;

$r^2 + 10r + 25 + r^2 + 24r + 144 = 289$;

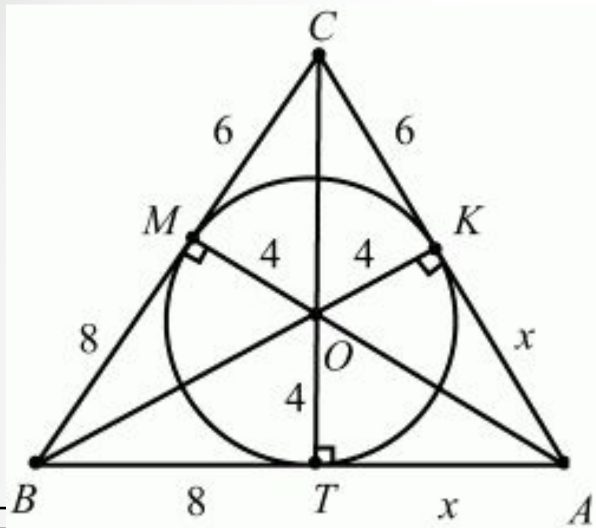
$2r^2 + 34r – 120 = 0$;

$r^2 + 17r – 60 = 0$; $r = 3$.

Катеты равны 5 + r = 8 и 12 + r = 15. Ответ: 8 см; 15 см.

Задача 2.

В треугольник вписана окружность с радиусом 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, длины которых 6 и 8. Найдите длины сторон треугольника



Решение.

1. Изобразим вписанную в треугольник окружность и соединим центр окружности O с вершинами треугольника. Проведем также перпендикуляры OM, OT, OK, являющиеся радиусами окружности.
2. Получим: Δ OAK = Δ OAT, Δ OBM =Δ OBT, ΔOCM = ΔOCK. (по гипотенузе и острому углу)
3. По условию CM = 6 и BM = 8. Тогда BT = BM = 8, CK = CM = 6.
4. Длины отрезков AK и AT обозначим через x Для нахождения величины x воспользуемся формулой ***S = pr***

По формуле Герона

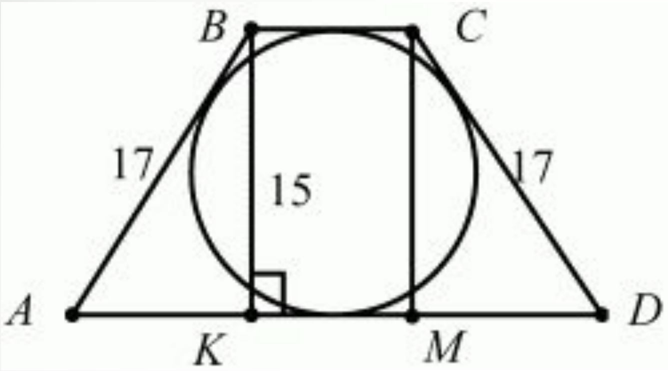
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. В нашем случае $a = BC = 14$, $b = AC = $ $= x+6, c = AB = x+8.$ $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 14 + x; p-a = x; p-b = 8; p-c = 6.$

$$S = \sqrt{(14+x)x\cdot 8\cdot 6} = \sqrt{48\cdot x\cdot(14+x)} = (14+x)\cdot 4;$$

$$48\cdot x\cdot(14+x) = (14+x)^2\cdot 16; 3x = 14+x; x = 7; AC = 13; AB = 15.$$

Ответ: 13, 14, 15

Задача 3.
Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найдите основания трапеции



1. Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности.

Высота BK = 15 см;

2. из прямоугольного Δ ABK

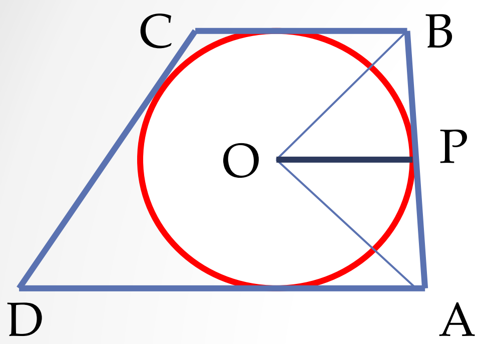
$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см.}$$

3. Пусть BC = x, тогда AD = 8 + x + 8 = x + 16.

Так как в трапецию вписана окружность,
то AD + BC = AB + CD;
x + 16 + x = 17 + 17;
x = 9 см;
AD = 9 + 16 = 25 см.

Ответ: 9 см; 25 см.

Задача 4.
Окружность, вписанная в трапецию, делит её боковую сторону на отрезки *a* и *b*
Найти радиус окружности.



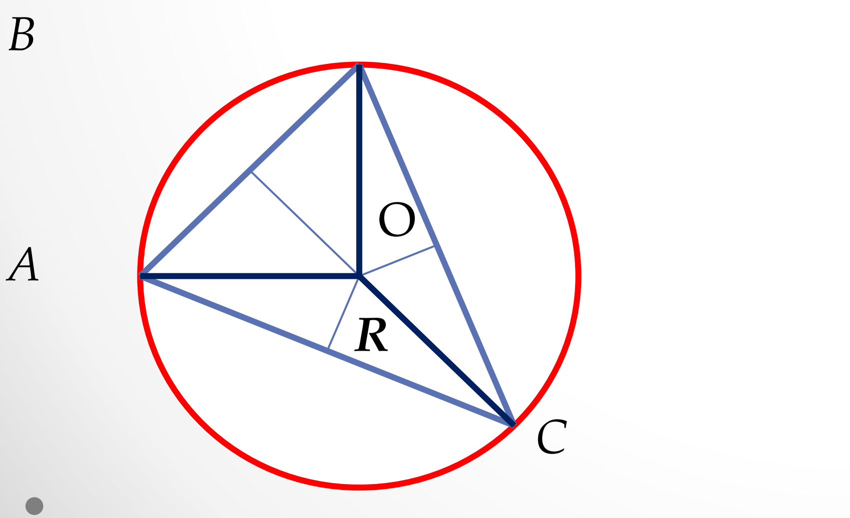
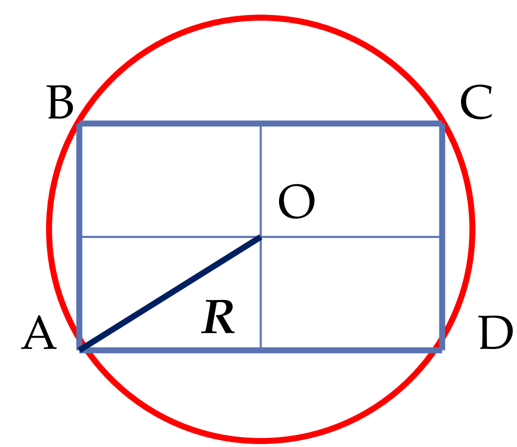
Решение:

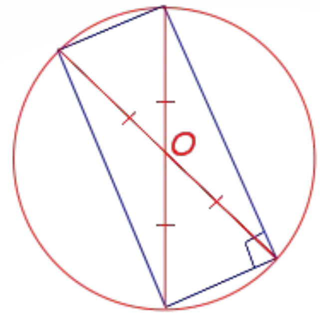
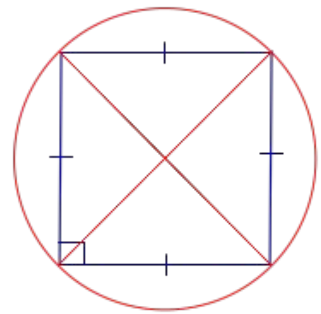
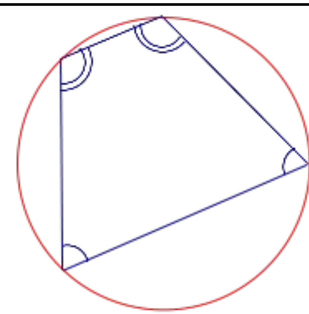
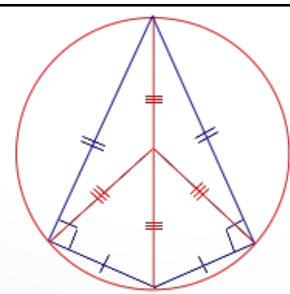
1. Найдём центр O вписанной окружности (BO, AO –биссектрисы углов A и B трапеции) и опустим перпендикуляр OP на сторону AB.

(OP = r)

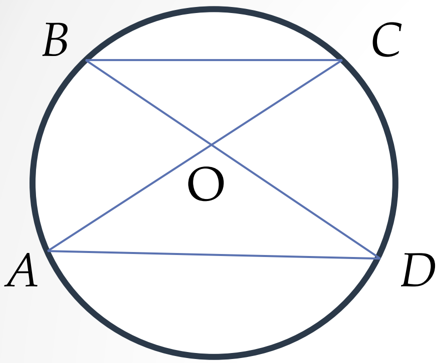
1. ΔAOB – прямоугольный, так как боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
2. Значит OP – высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника к гипотенузе

Описанная окружность

<table>
<tr><td>определение</td><td colspan="2">Окружность описана около многоугольника, если она проходит через все вершинымногоугольника</td></tr>
<tr><td>центр</td><td colspan="2">лежит на пересечении серединных перпендикуляров сторон многоугольника</td></tr>
<tr><td>радиус</td><td colspan="2">отрезок, соединяющий центр окружности с вершинами многоугольника</td></tr>
<tr><td colspan="2">треугольник</td><td>четырёхугольник</td></tr>
<tr><td colspan="2">Около любого треугольника можно описать окружность и только одну</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
</table>

фигура	рисунок	свойство
Окружность, описанная около параллелограмма		Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.
Окружность, описанная около ромба		Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.
Окружность, описанная около трапеции		Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной трапецией.
Окружность, описанная около дельтоида		Окружность можно описать около дельтоида тогда и только тогда, когда дельтоид ***состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников***.

Задача 1.
В окружности через середину О хорды АС проведена хорда BD так, что дуги АВ и CD равны. Докажите, что О – середина хорды BD.



Доказательство:

1. Вписанные углы ADB = ACB- опираются на дугу AB, вписанные углы DBC = DAC - опираются на дугу DC,

Если, по условию, дуги равны, то эти углы равны между собой.

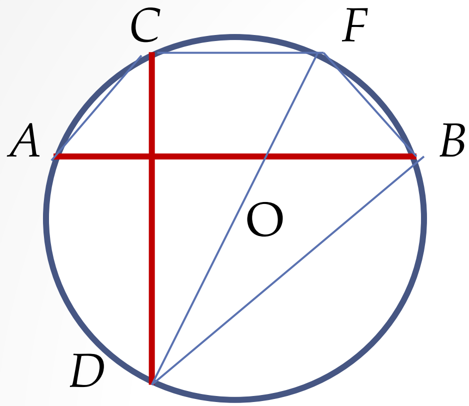
2. ΔAOD = ΔCOD , по стороне и двум прилежащим к ней углам (AO = OC; углы BOC= AOD – вертикальные; углы BCO = DAO – п.1) следовательно,

BO = OD, значит, О – середина BD. ч.т.д.

(Если бы точка О делила хорду АС не в отношении 1:1, то треугольники рассматривались бы с точки зрения подобия)

Задача 2.

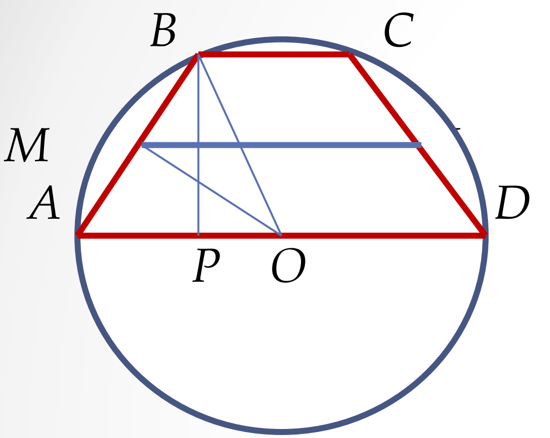
Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найти BD, если AC = a



Решение:

1. Проведём диаметр DF. Тогда, CF параллельна AB (угол DCF вписанный и опирается на диаметр)
2. Тогда ACFB – трапеция, которая вписана в окружность, следовательно она равнобокая.

Таким образом, AC = FB

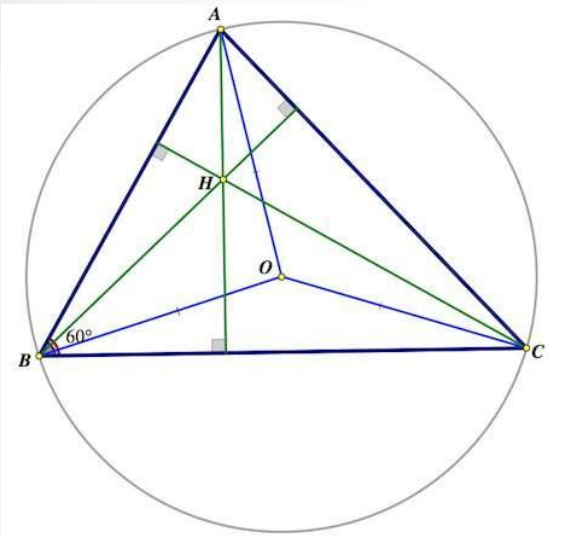


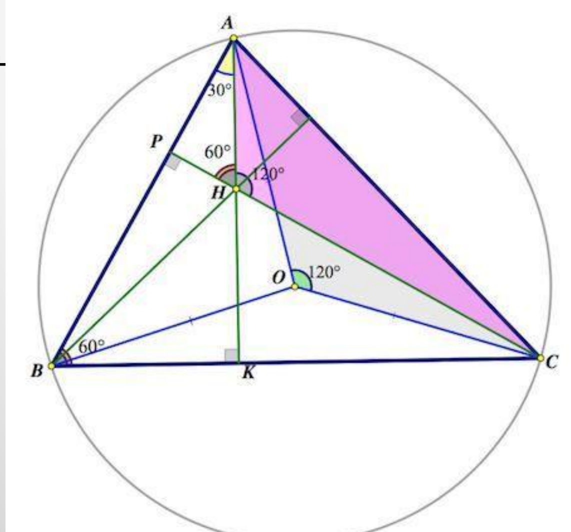
Решение: Пусть MN –средняя линия трапеции, AB – боковая сторона.

1. Трапеция ABCD – равнобедренная, т.к. вписана в окружность.
2. BC + AD = 2 MN (по свойству ср. линии трапеции)
3. ΔAOB – равнобедренный (AO = OB – радиусы), и т.к. M – середина AB, OM перпендикулярно AB

Задача 4.

В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°. Докажите, что точки A , C, центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности

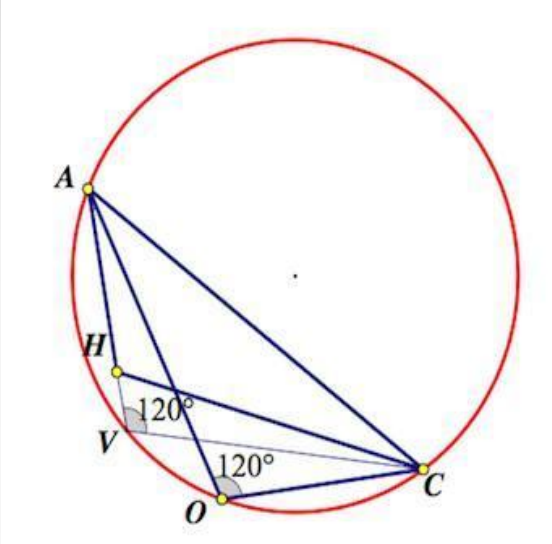




Решение: 1. Рассуждаем так:
Вокруг любого треугольника, в том числе вокруг ΔAOC , **всегда можно описать окружность**. Значит, нам остается доказать лишь тот факт, что точка пересечения высот ΔABC , точка H , также попадает на окружность, описанную около Δ AOC.

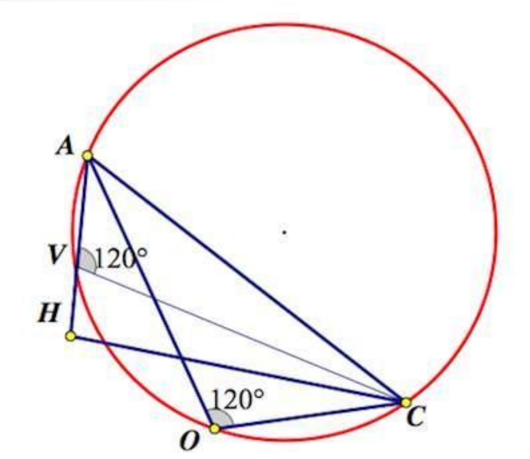
2. Заметим, что для вписанного в окружность (описанную около треугольника ABC) угла соответствующим центральным углом является угол AOC . Так как угол B равен 60°, по условию, то угол AOC = 120, по свойству вписанного угла.

3. ΔABK : угол A= 30, значит, из ΔAHP: угол AHP = 60, следовательно угол AHC = 120 (свойство смежных углов)



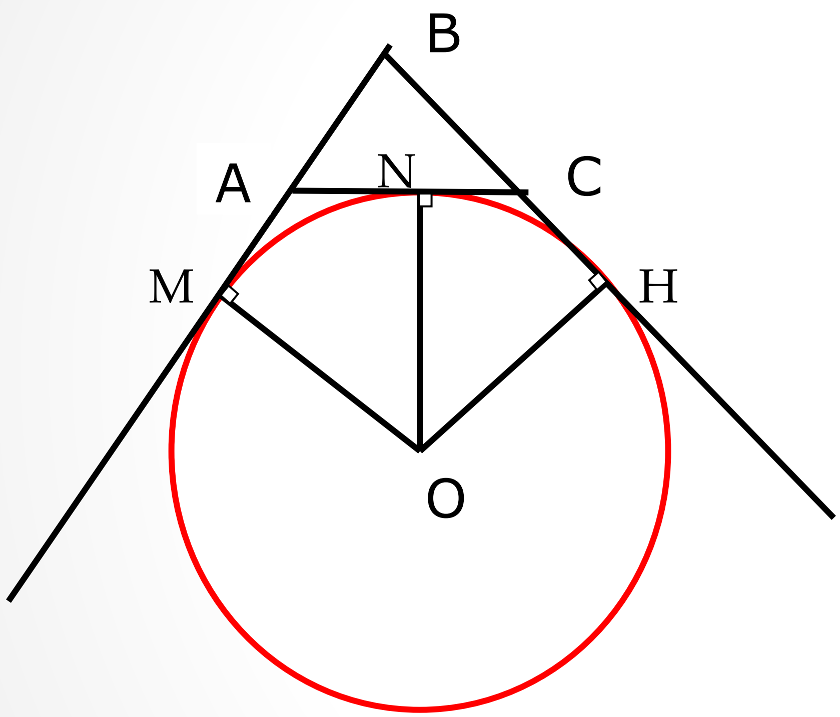
В отношении точки H у нас три ситуации:
(1): точка H лежит на окружности, описанной около треугольника AOC ;
(2): точка H лежит внутри окружности, описанной около треугольника AOC ;
(3): точка H лежит вне окружности, описанной около треугольника AOC ;
Рассмотрим ситуацию (2).
В этом случае угол AVC (где – точка пересечения прямой AH с окружностью), как опирающийся на ту же дугу AC , что и

вписанный угол AOC , равен 120. Тогда угол AHC , как внешний угол треугольника AVC , больше (ведь внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним). То есть мы пришли к противоречию. Ситуация (2) невозможна.



Аналогично приходим к противоречию и в ситуации (3).
Значит, единственно возможная ситуация (1)
ч.т.д.

Вневписанная окружность



определение 1

Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон

***Т1.* Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника. (1)**

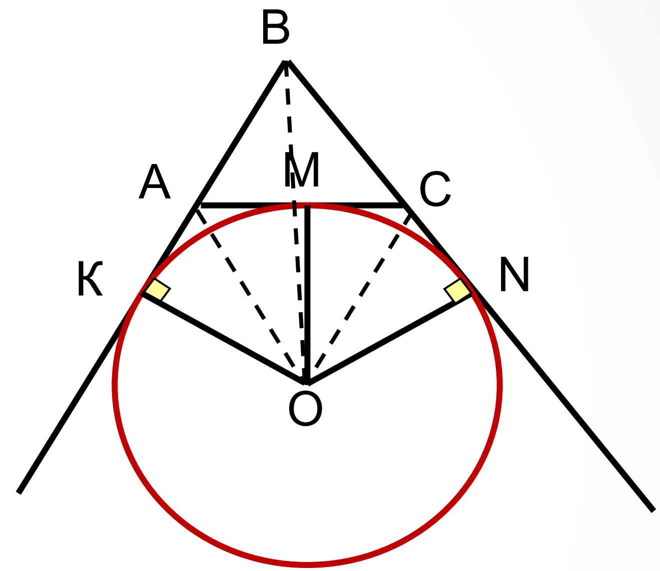
Дано:

△ ABC

Окр. (O; r)

M, N, K – точки касания

Доказать: (1)



Решение:

Т. к. окружность касается сторон угла CAK, то центр окружности O равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе угла CAK. Аналогично, точка O лежит на биссектрисе угла ACN. Т. к. окружность касается прямых BA и BC, то она вписана в угол ABC, а значит её центр лежит на биссектрисе угла ABC. ч.т. д.

Т2. Расстояния от вершины угла треугольника до точек касания вневписанной окружности со сторонами этого угла равны полупериметру данного треугольника

$$AB_1 = AC_1 = p$$

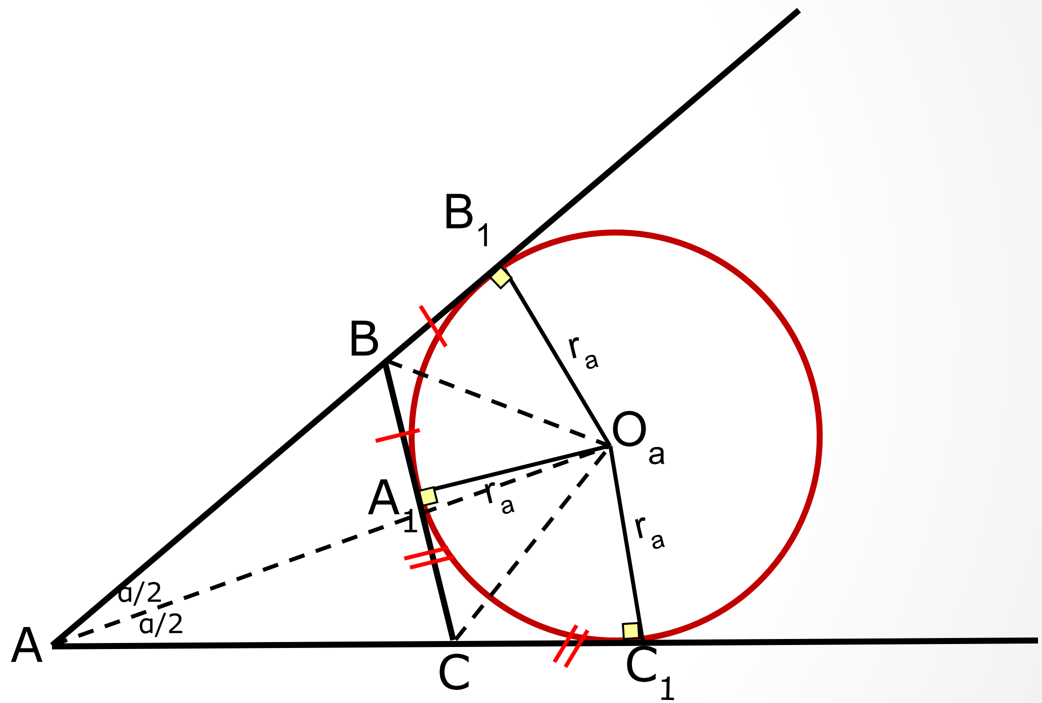
Дано:

$\triangle ABC$,

Вневписанная окр. $(O_a;\ r_a)$

Доказать:

$AB_1 = AC_1 = p$



Доказательство:

Т.к. O_a - центр вневписанной окружности, то касат., прове - денные к окружности из одной точки, равны между собой,

поэтому $BB_1 = BA_1$, $CA_1 = CC_1$, $AB_1 = AC_1$.

Значит, $2p = (AC + CA_1) + (AB + BA_1) = (AC + CC_1) + (AB + BB_1) = AC_1 + AB_1 = 2AC_1 = 2AB_1$ т.е. $AB_1 = AC_1 = p$.

Т3: **Радиус вневписанной окружности, касающейся сторон данного внутреннего угла треугольника, равен произведению полупериметра треугольника на тангенс половины этого угла, т. е.**

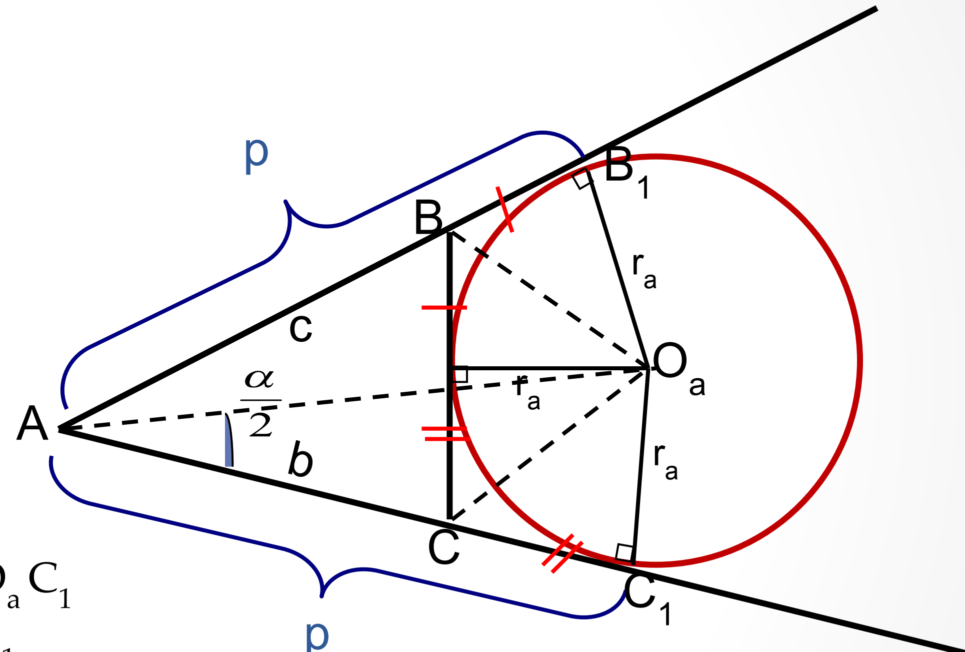
$$r_a = p\cdot tg\frac{\alpha}{2},\ r_b = p\cdot tg\frac{\beta}{2},\ r_c = p\cdot tg\frac{\gamma}{2} \quad (2)$$

Дано:

$\triangle ABC$

Вневписанная окр. $(O_a;\ r_a)$

Доказать (2)



Решение:

В прямоугольном треугольнике $A\,O_a\,C_1$ r_a и p – длины катетов, угол $O_a\,A\,C_1$ равен $\frac{\alpha}{2}$, поэтому $r_a = p\cdot tg\frac{\alpha}{2}$

_Т4._ Радиус вневписанной окружности, касающейся данной стороны треугольника, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны. т.е.

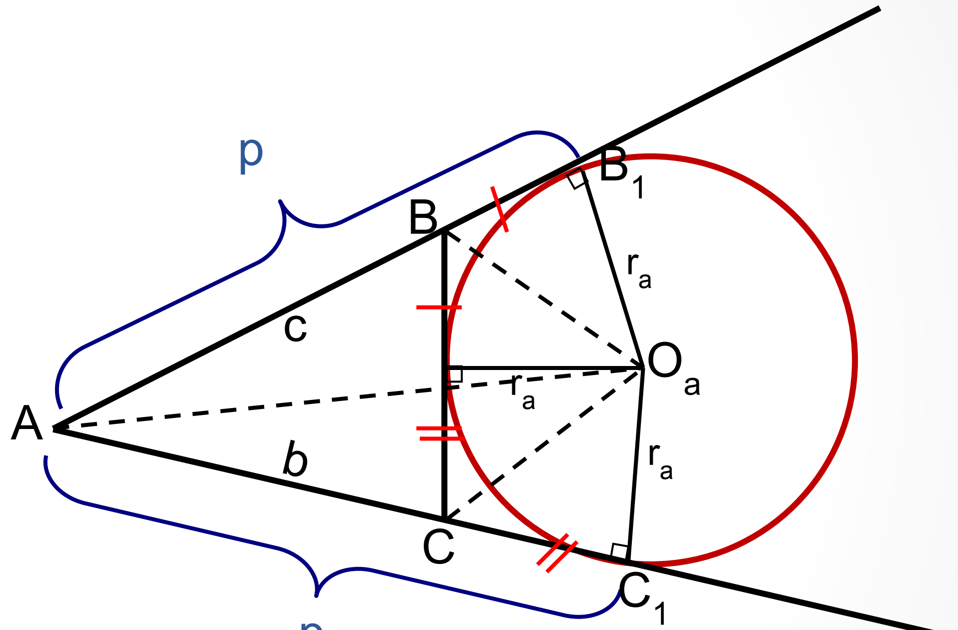
$$r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c} \qquad (3)$$

Дано:

$\triangle$ ABC

Вневписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать (3)



Решение:

Имеем

$$S = S_{ABC} = S_{AO_aC} + S_{BO_aC} - S_{BO_aC} = \frac{r_a}{2} \times (b + c - a) = r_a \times (p - a),\ \text{т.е.}$$

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

Т5. Сумма радиусов вневписанных окружностей равна сумме радиуса вписанной окружности и удвоенного диаметра описанной окружности, т. е.

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

Доказательство:

Выразим все радиусы через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$, $r_a = \frac{S}{p-a}$, $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$

Значит,

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} =$$

$$= S\frac{p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= S\frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R$$

Т6. **Сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной окружности, т. е.**

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

Доказательство:

Используем выражения радиусов через стороны и площадь треугольника:

$$r=\frac{S}{p},\ R=\frac{abc}{4S},\ r_a=\frac{S}{p-a},\ r_b=\frac{S}{p-b},\ r_c=\frac{S}{p-c}$$

Значит,

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

Т7. **Сумма всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей равна квадрату полупериметра треугольника, т. е.**

$$\mathbf{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2}$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами ранее доказанных радиусов через стороны и площадь треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Подставим

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-a)} =$$

$$= S^2 \frac{(p-c)+(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{3p-2p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Из формулы Герона следует

$(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{S^2}{p}$, поэтому

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2 \frac{p^2}{S^2} = p^2$$

Т8. **Произведение всех трех радиусов вневписанных окружностей равно произведению радиуса вписанной окружности на квадрат полупериметра треугольника, т.е.**

$$\mathbf{r_a r_b r_c = rp^2}$$

Доказательство:

Из ранее доказанных формул для радиусов и формулы Герона

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Тогда

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^3 p}{S^2} = Sp = pr \times p = rp^2$$

Следствие 1. **Площадь треугольника равна отношению произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей к полупериметру треугольника, т.е.**

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Доказательство:

Из $r_a r_b r_c = rp^2 = rp \times p = Sp$.

Следовательно

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Следствие 2. **Площадь треугольника равна квадратному корню из произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей и радиуса вписанной окружности, т.е.** $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$

Доказательство:

Из следствия 1, что $S = \dfrac{r_a r_b r_c}{p}$ и равенства S = pr,

получаем, перемножая их почленно,

$S^2 = \dfrac{r_a r_b r_c}{p} \times pr = r_a r_b r_c r$ Значит $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$

Т9. **Величина, обратная высоте треугольника, опущенной на его данную сторону, равна полусумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника, т.е.** , ,

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right) \qquad \frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right) \qquad \frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами $r_b=\dfrac{S}{p-b}$, $r_c=\dfrac{S}{p-c}$

Значит,

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{2p-b-c}{S}=\frac{a+b+c-b-c}{S}=$$

$$=\frac{a}{S}=\frac{a}{\frac{1}{2}ah_a}=\frac{2}{h_a} \qquad \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$$