

МАЛОИЗВЕСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

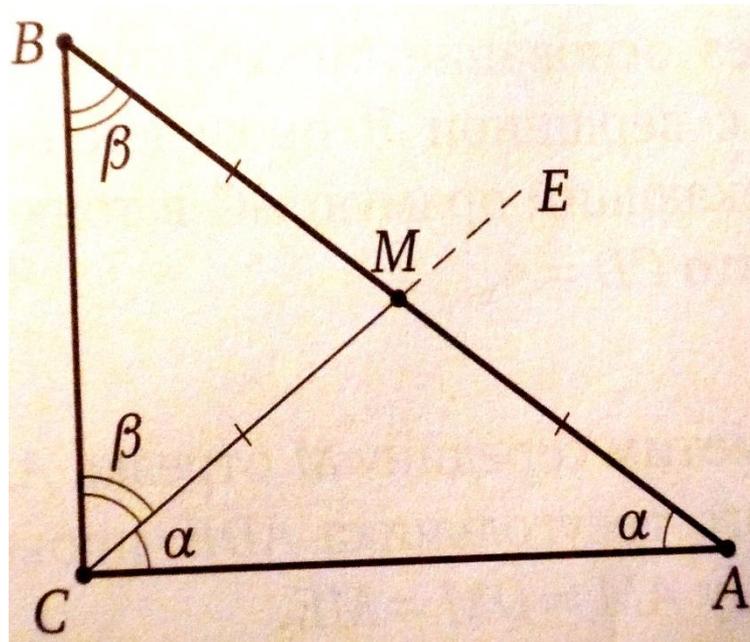
Методическая разработка

Учитель математики
Потапова Ф.Ф. .

2014-2015 уч. год.

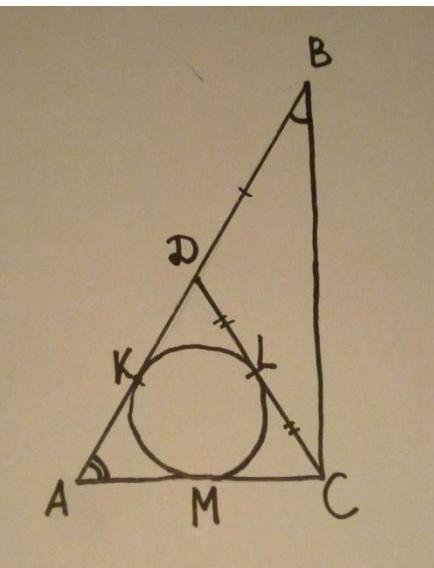
§ Медиана прямоугольного треугольника.

Теорема. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



Теорема (обратная). Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Пример: Точка D – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC .
 Окружность, вписанная в треугольник ACD , касается отрезка CD , в его середине.
 Найдите острые углы треугольника ABC .



Решение.

Пусть L – точка касания вписанной окружности с DC ;

K – точка касания вписанной окружности с AD ;

M – точка касания вписанной окружности с AC .

$\triangle ADC$ – равнобедренный, т.к. DC – медиана прямоугольного треугольника.

Известно, что $DL=LC$. При этом $KD=DL$

$AK=LC$, т.к. $\triangle ADC$ – равнобедренный.

$AK=AM$, $MC=LC$ – как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Тогда $KD=DL=LC=MC=AK=AM$, то есть треугольник равносторонний.

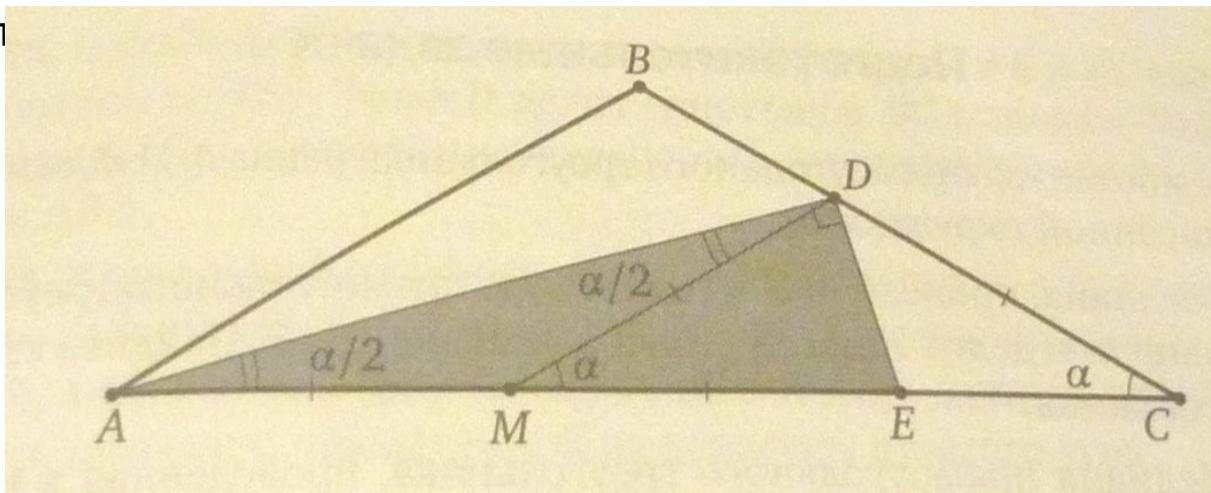
Тогда $AD=DC=AC$, $\angle DAC=\angle DCA=\angle ADC=60^\circ$.

Таким образом, в $\triangle ABC$ $\angle A=60^\circ$

$B=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ответ: 60° , 30° .

Пример. Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведен перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающей прямую AC в точке E . Найдите от



Решение.

Отметим середину M отрезка AE . Отрезок DM – медиана прямоугольного треугольника ADE ,

проведенна $\angle BAC = \angle BCA = \angle \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника

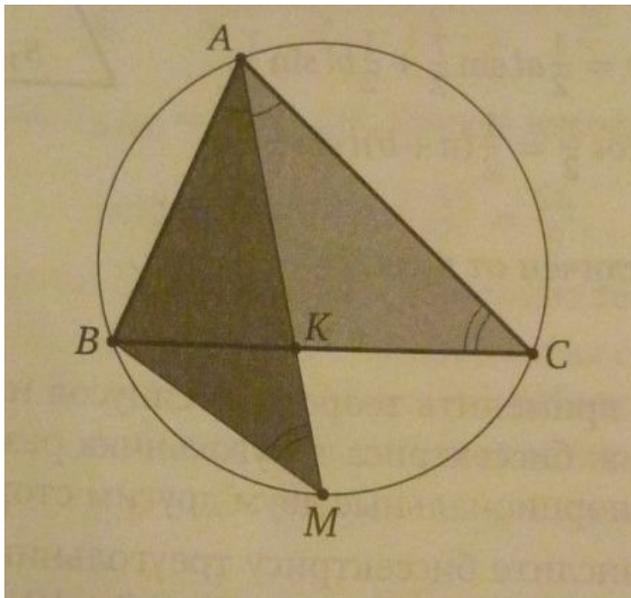
Обозначим, $\angle DME = \angle DAC + \angle ADM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = \angle DCM$,

значит, треугольник CDM равнобедренный. Следовательно, $AE=2DM=2DC=8$.

Ответ: 8.

§ Биссектриса.

Утверждение. Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.



Доказательство.

Пусть M – точка пересечения продолжения биссектрисы AK треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью. Тогда треугольник ACK подобен треугольнику AMB по двум углам.

Поэтому $\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AM}$, или $AK(AK + KM) = AB \cdot AC$,
 $AK^2 + AK \cdot KM = AB \cdot AC$.

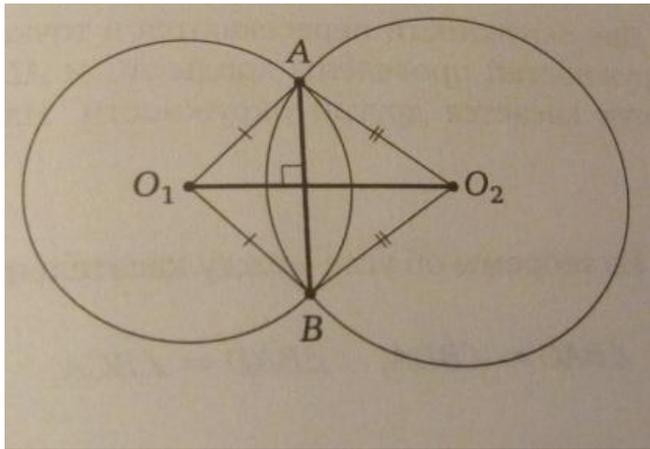
Следовательно,

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KM = AB \cdot AC - BK \cdot KC$$

$AK \cdot KM = BK \cdot KC$ (по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд), что и требовалось доказать.

§ Пересекающиеся окружности.

Утверждение. *Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.*

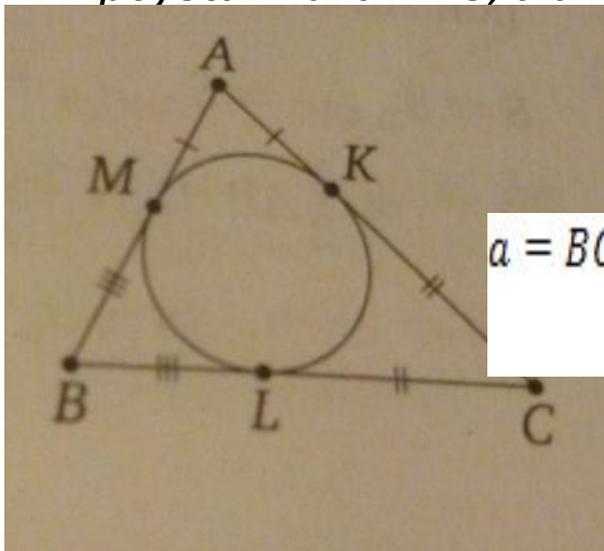


Доказательство.

Пусть AB – общая хорда пересекающихся окружностей с центрами O_1 и O_2 . Точки O_1 и O_2 равноудалены от концов отрезка AB , поэтому O_1O_2 – серединный перпендикуляр к отрезку AB , чтд.

§ Окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником.

Утверждение 1. Если вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M , то $AM = p - a$, где p – полупериметр треугольника ABC , а $a = BC$.



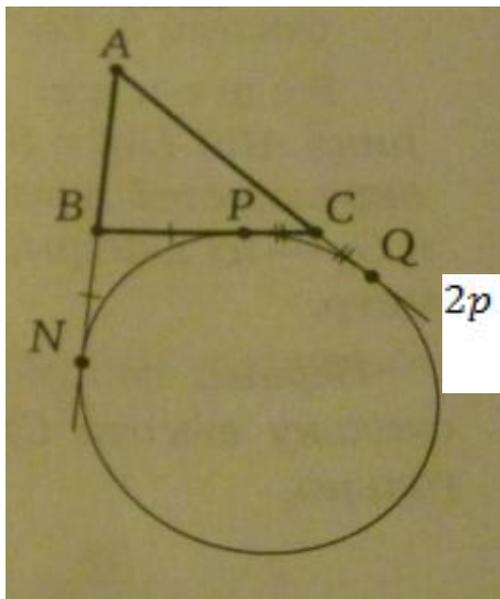
Доказательство. Обозначим $AC = b$, $AB = c$. Пусть K и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC соответственно. Тогда,

$$\begin{aligned} a &= BC + LC = BM + CK = (AB - AM) + (AC - AK) = (c - AM) + (b - AM) \\ &= b + c - 2AM, \end{aligned}$$

откуда

$$AM = \frac{b + c - a}{2} = p - a, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Утверждение 2. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC , продолжения стороны AB в точке N и продолжения стороны AC , то $AN=r$, где r – полупериметр треугольника.

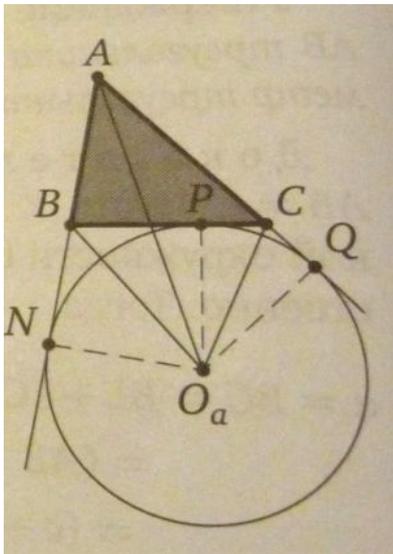


Доказательство. Пусть окружность касается стороны BC в точке P , а продолжения стороны AC – в точке Q . Тогда

$$\begin{aligned} 2p &= AB + BC + AC = AB + (BP + CP) + AC = AB + (BN + CQ) + AC \\ &= (AB + BN) + (CQ + AC) = AN + AQ = 2AN \end{aligned}$$

откуда $AN=r$.

Утверждение. Если p – полупериметр треугольника, r – радиус его вписанной окружности, a – радиус внеписанной окружности, касающейся стороны, равной a , то

$$S = pr, \quad S = (p - a)r_a.$$


Доказательство (формулы 2). Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть O_a – центр внеписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны BC ; P , N и Q – точки касания этой окружности со стороной BC и продолжениями сторон AB и AC соответственно. Тогда

$$S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AO_a B} + S_{\triangle AO_a C} + S_{\triangle BO_a C} =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot O_a N + \frac{1}{2}AC \cdot O_a Q - \frac{1}{2}BC \cdot O_a P =$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{c + b - a}{2} \cdot r_a = (p - a)r_a, \quad \text{чтд.}$$