

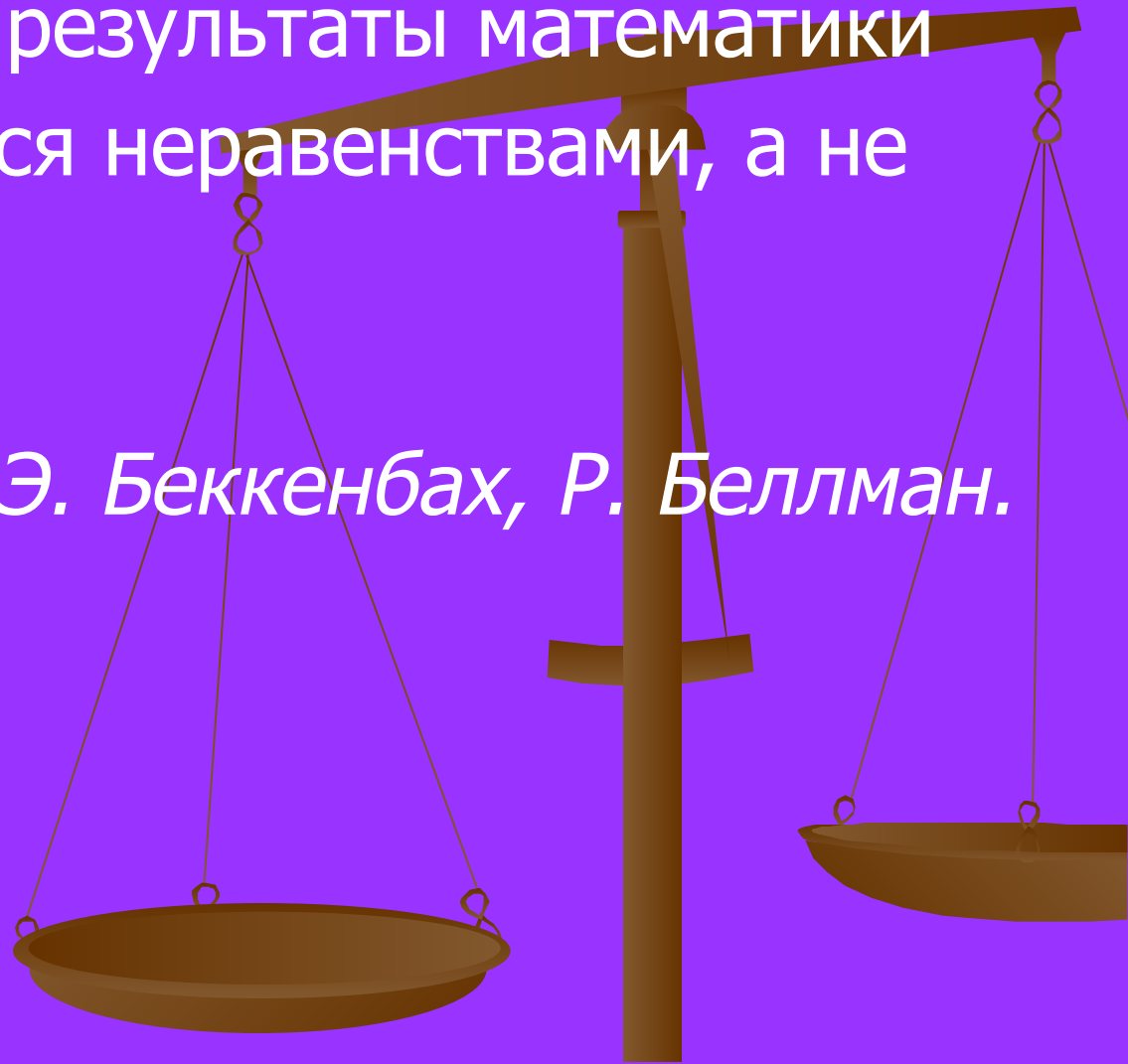
Доказательство неравенств



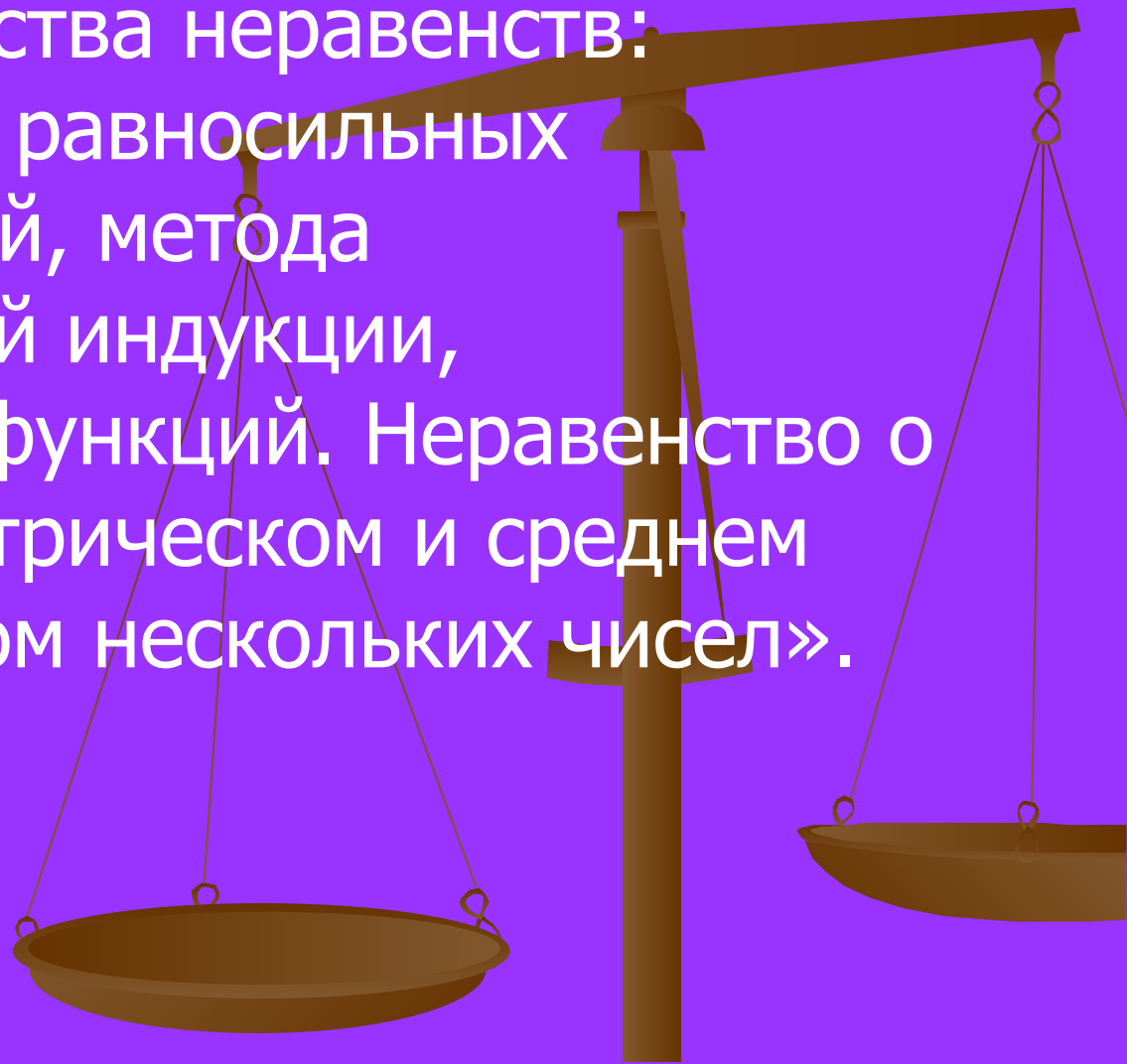
Презентация подготовлена
учителем математики МОУ Романовская СОШ
Атапиной Ириной Николаевной

«... Основные результаты математики
чаще выражаются неравенствами, а не
равенствами».

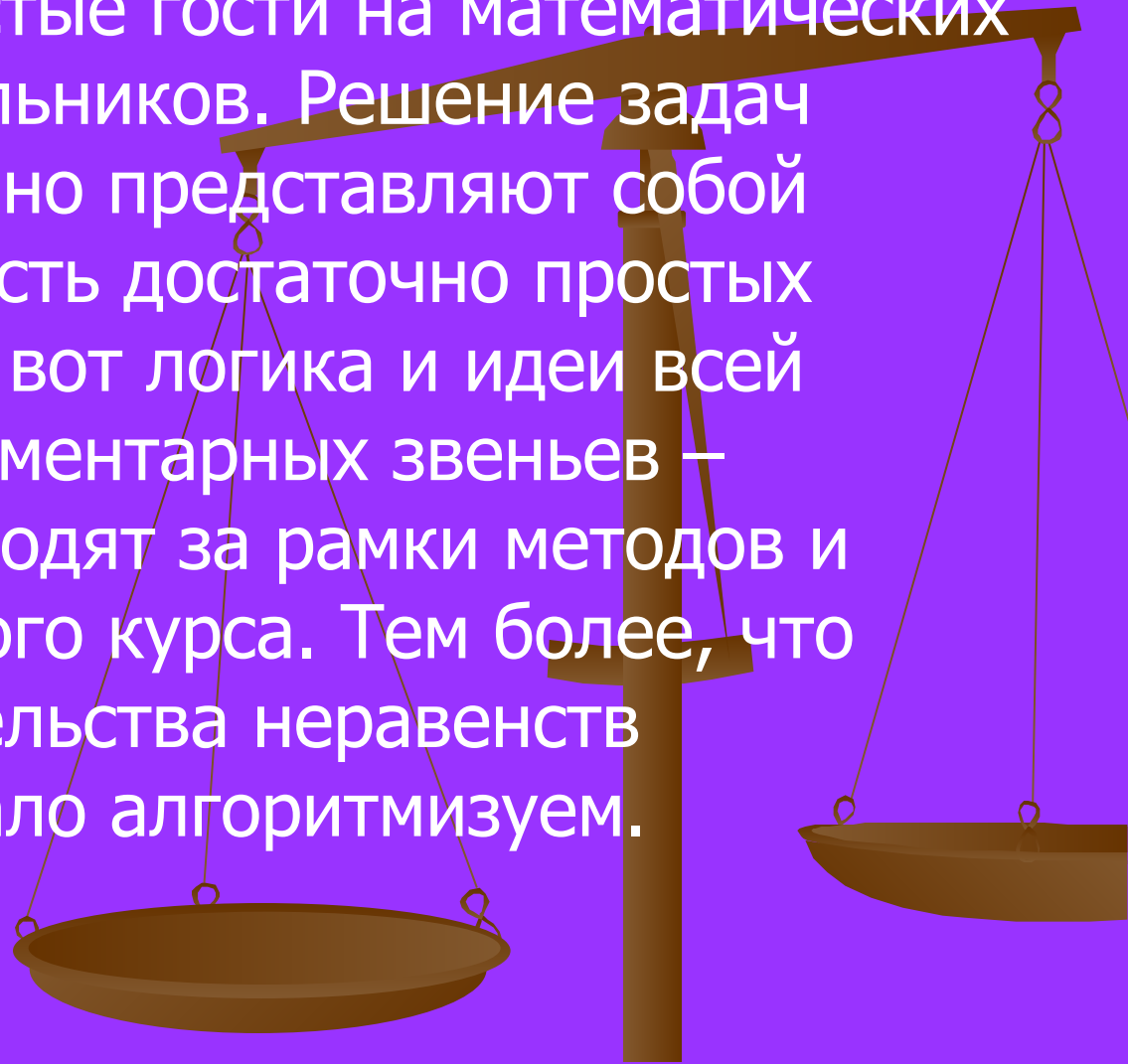
Э. Беккенбах, Р. Беллман.



«Доказательства неравенств:
использование равносильных
преобразований, метода
математической индукции,
исследования функций. Неравенство о
среднем геометрическом и среднем
арифметическом нескольких чисел».



Задачи решение которых весьма затруднительно без применения классических неравенств, - частые гости на математических олимпиадах школьников. Решение задач такого типа обычно представляют собой последовательность достаточно простых рассуждений. Но вот логика и идеи всей цепочки этих элементарных звеньев – рассуждений выходят за рамки методов и приемов школьного курса. Тем более, что процесс доказательства неравенств неформален и мало алгоритмизуем.



Теоретические аспекты темы: «Доказательства неравенств»

Историческая справка.
Общие сведения о неравенствах.
Основные свойства неравенств.
Некоторые важные неравенства.

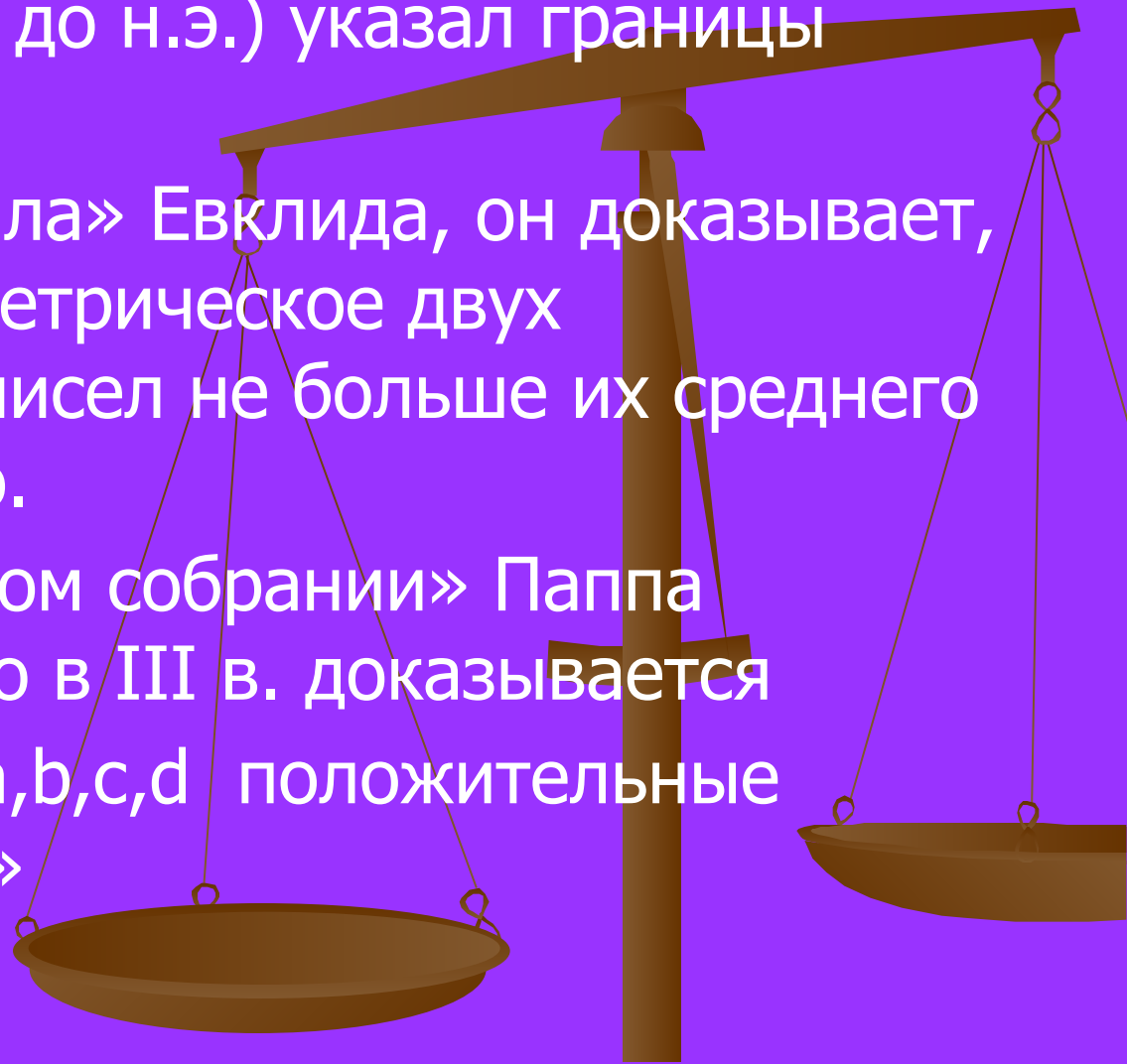


Историческая справка.

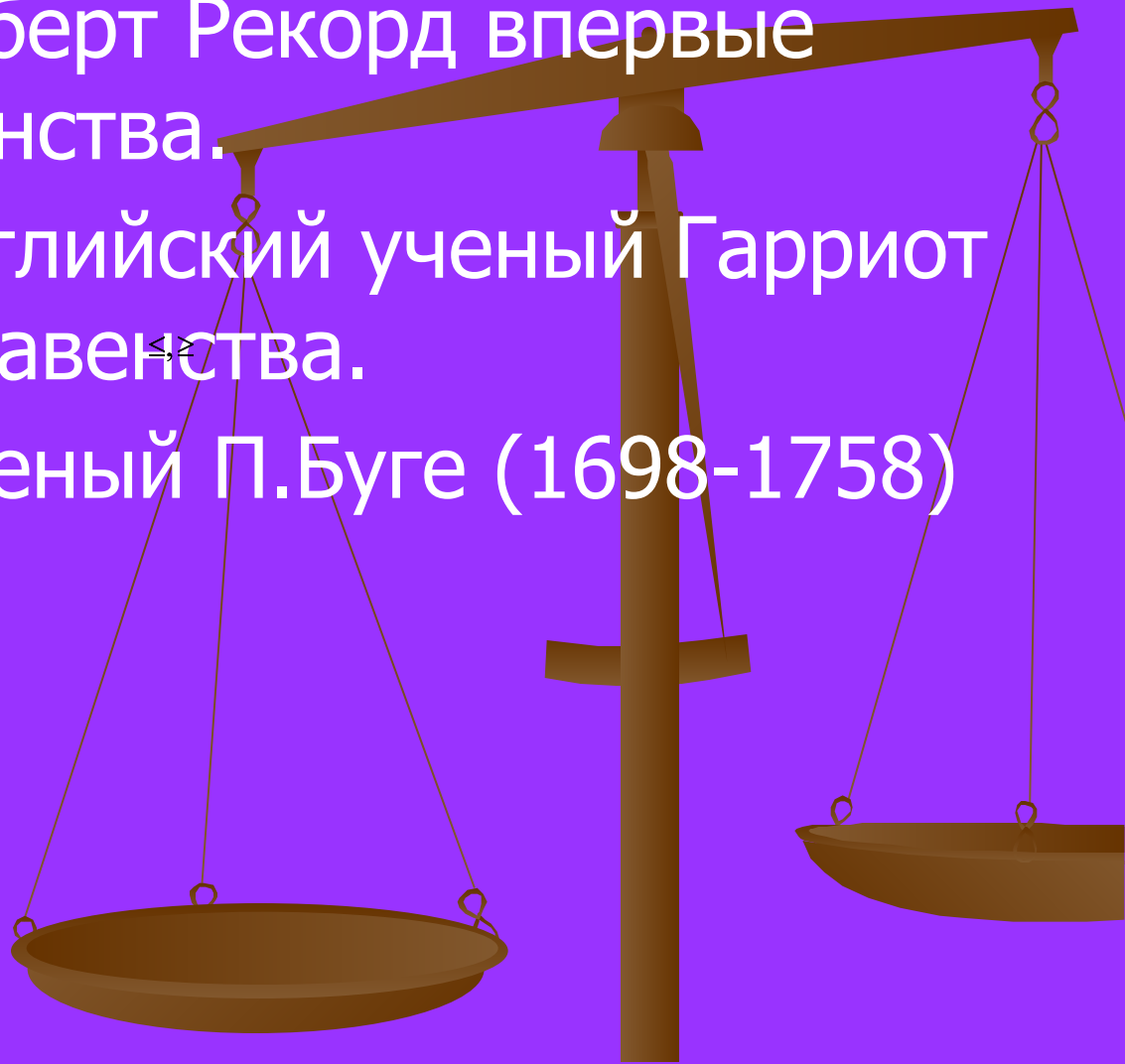
- Понятия «больше» и «меньше» наряду с понятиями равенство возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины.



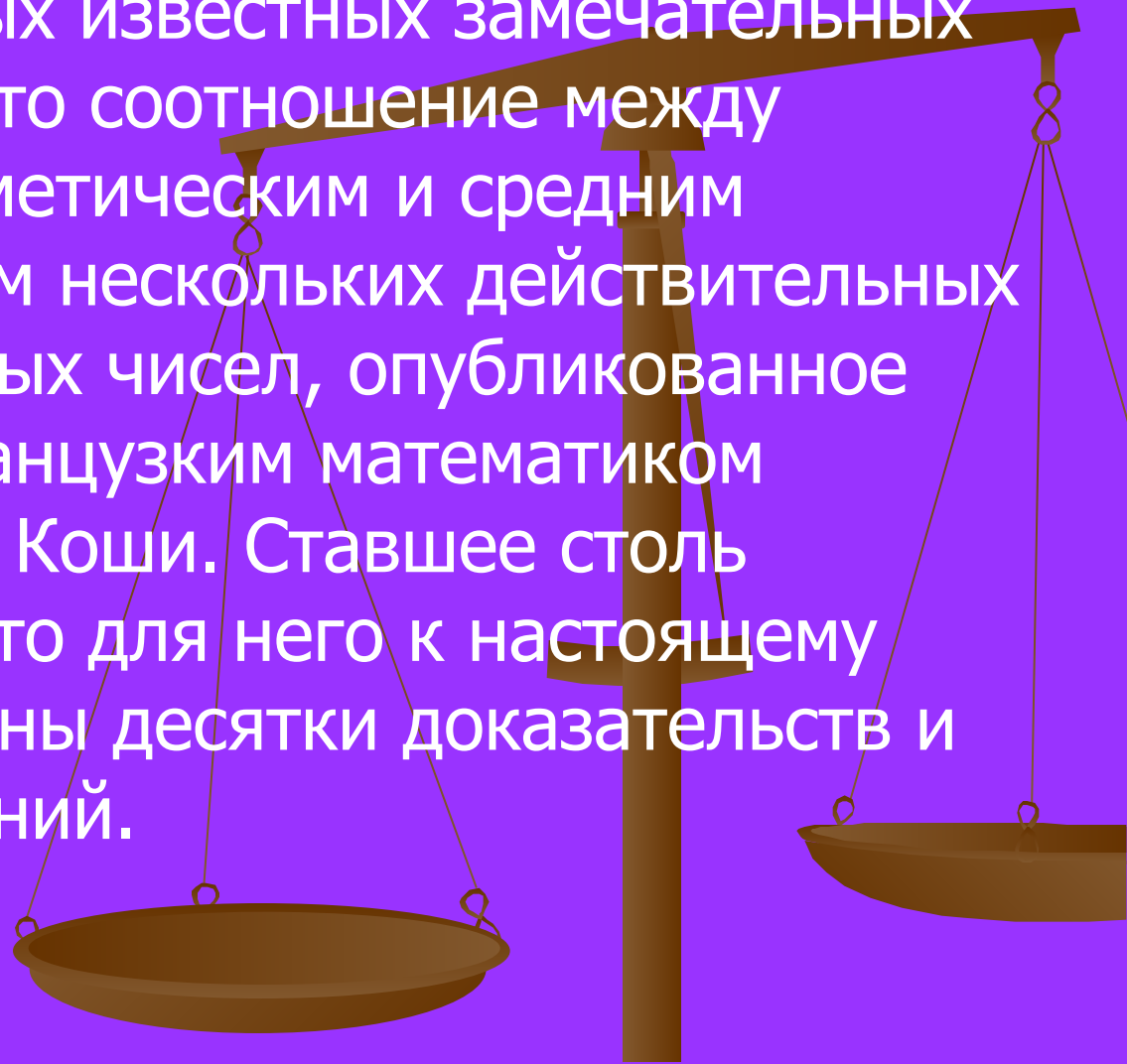
- Архимед (III век до н.э.) указал границы числа π
- В трактате «Начала» Евклида, он доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического.
- В «Математическом собрании» Паппа Александрийского в III в. доказывається
- «Если $a/b > c/d$ (a, b, c, d положительные числа), то $ad > cb$ »



- В 1557 году Роберт Рекорд впервые ввел знак равенства.
- В 1631 году английский ученый Гарриот ввел знаки неравенства.
- Французский ученый П.Буге (1698-1758) ввел знаки \leq, \geq



Одно из самых известных замечательных неравенств – это соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим нескольких действительных неотрицательных чисел, опубликованное в 1821 году французским математиком Огустеном Луи Коши. Ставшее столь популярным, что для него к настоящему времени найдены десятки доказательств и сотни применений.



Неравенство Коши

Для любых неотрицательных чисел их среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда все числа x_1, x_2, \dots, x_n равны между собой.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$



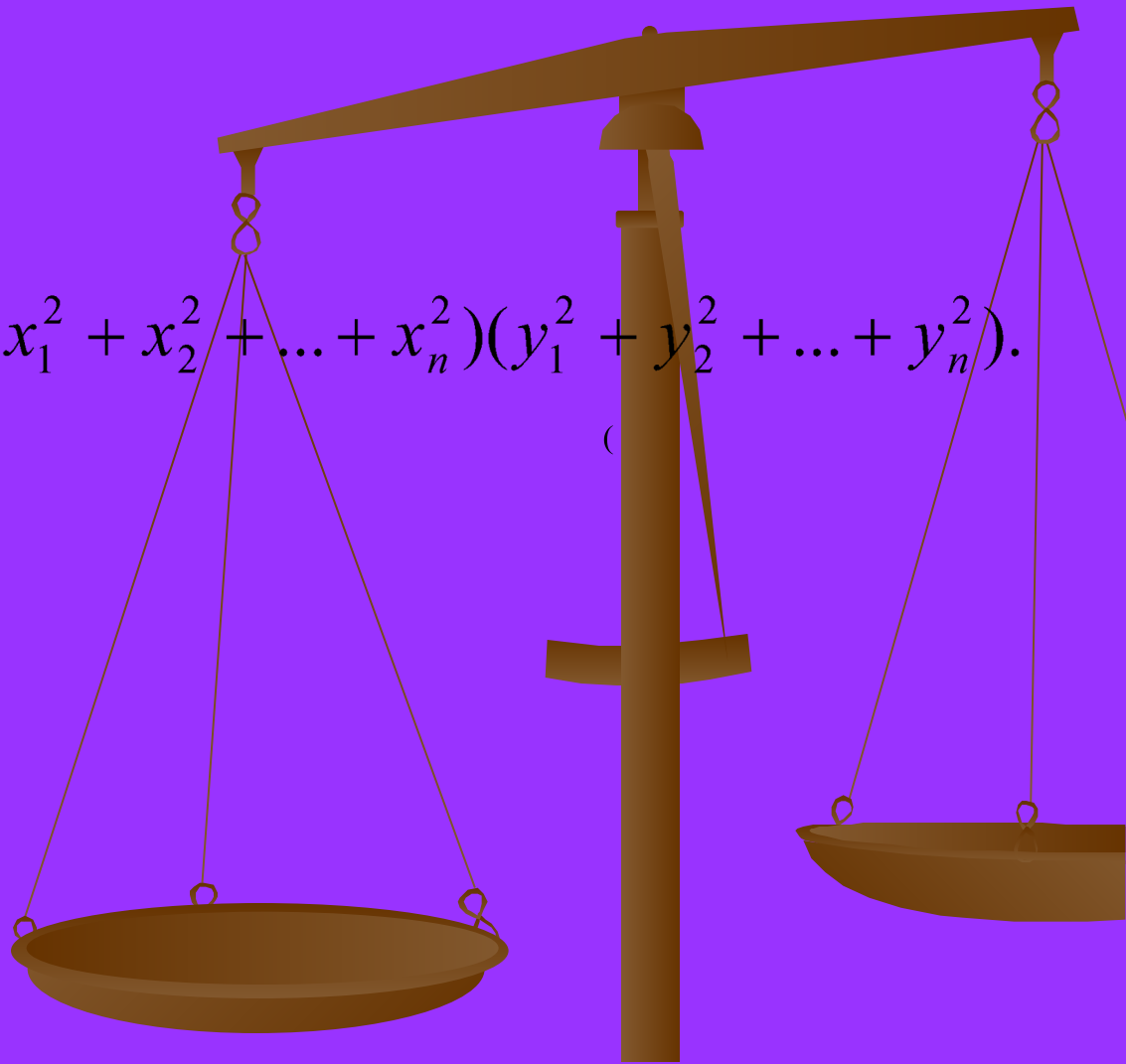
- Неравенство Коши – Буняковского.
- Неравенство Чебышева.
- Неравенство Бернулли.
- Неравенство Иенсона.



Неравенство Коши – Буняковского

Для любых действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n

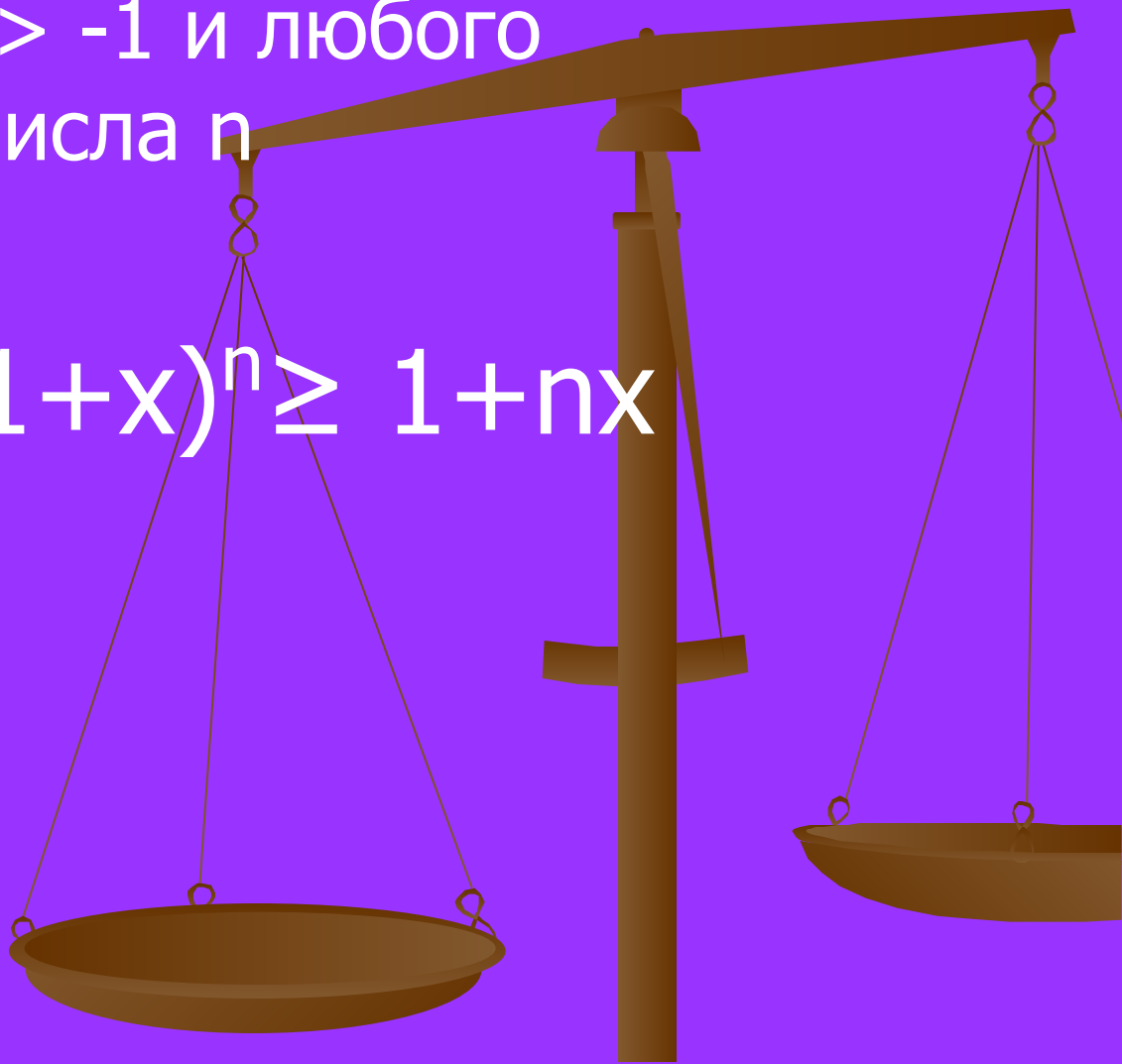
$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$



Неравенство Бернулли

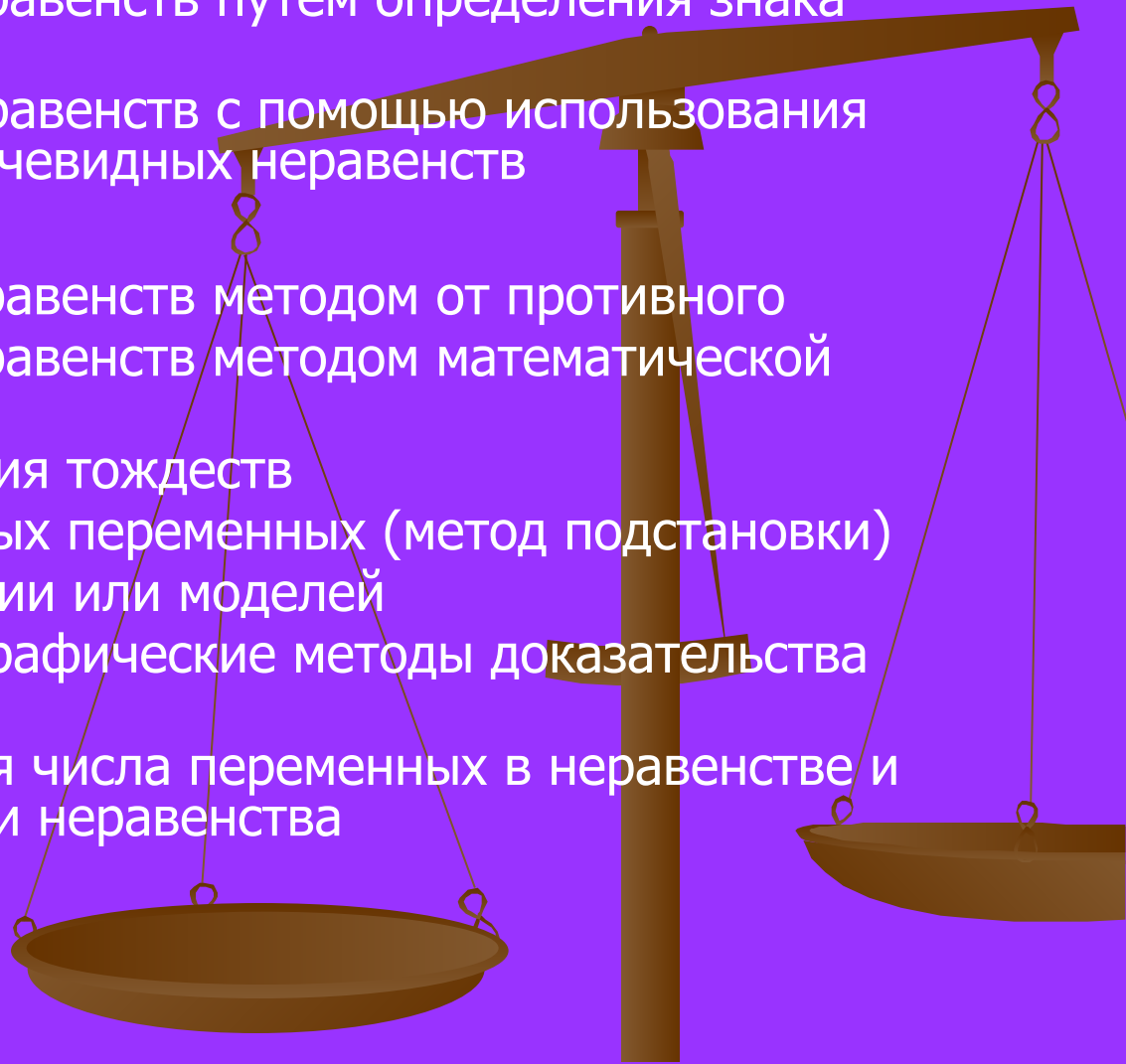
Для любого $x > -1$ и любого
натурального числа n

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$



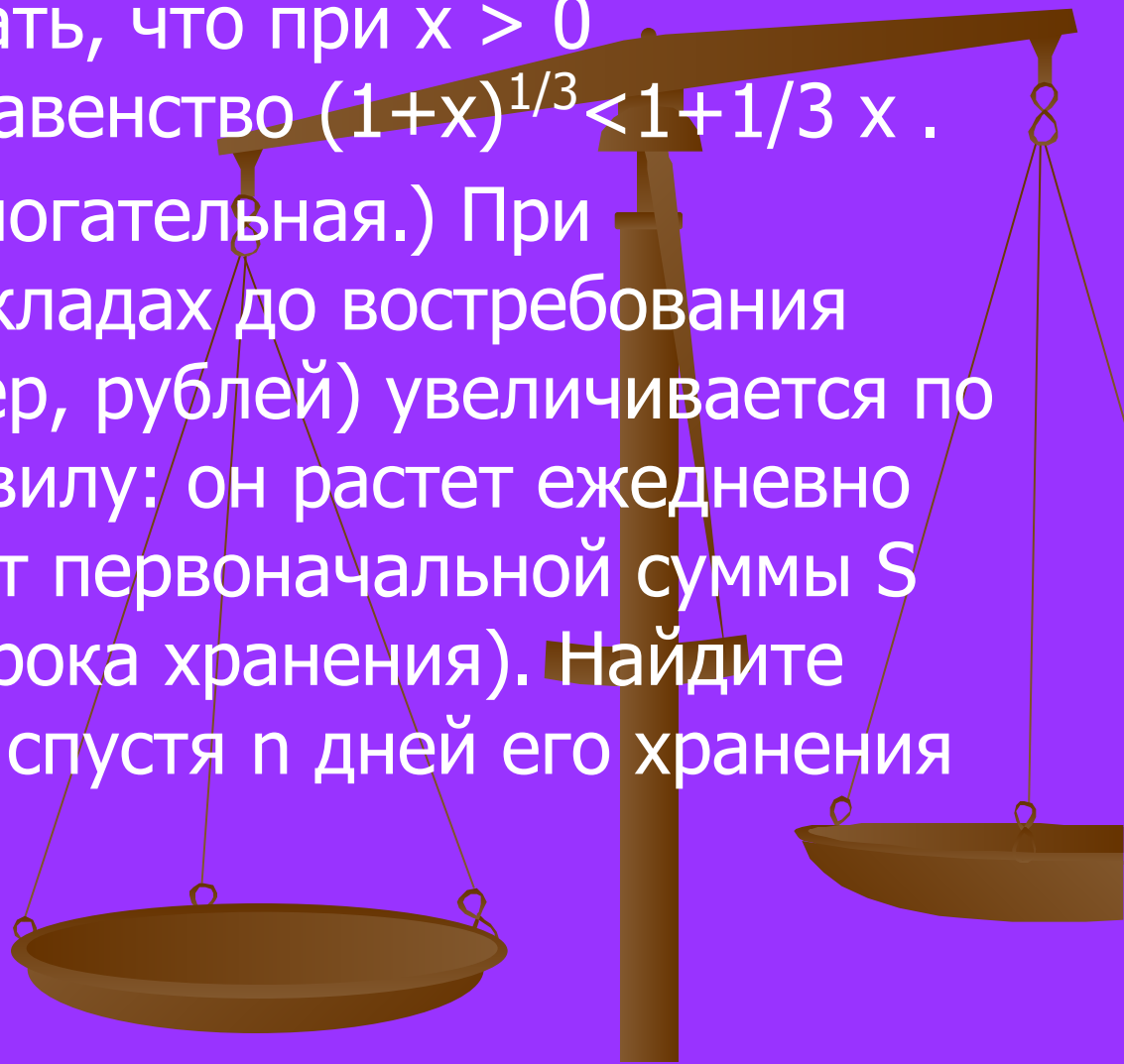
Основные методы доказательства неравенств

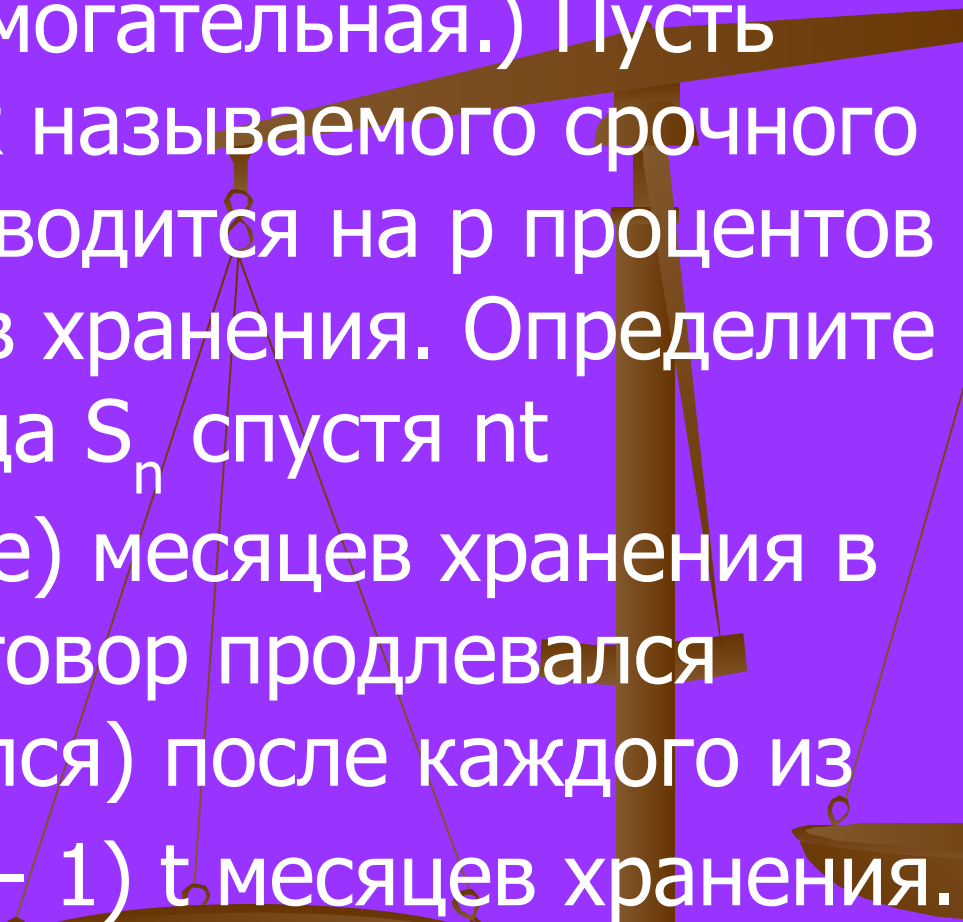
- 2.1 Доказательство неравенств путем определения знака разности их частей
- 2.2 Доказательство неравенств с помощью использования ранее доказанных и очевидных неравенств
- 2.3 Метод оценивания
- 2.4 Доказательство неравенств методом от противного
- 2.5 Доказательство неравенств методом математической индукции
- 2.6 Метод использования тождеств
- 2.7 Метод ведения новых переменных (метод подстановки)
- 2.8 Метод интерпретации или моделей
- 2.9 Функционально – графические методы доказательства неравенств
- 2.10 Метод уменьшения числа переменных в неравенстве и понижения степени неравенства



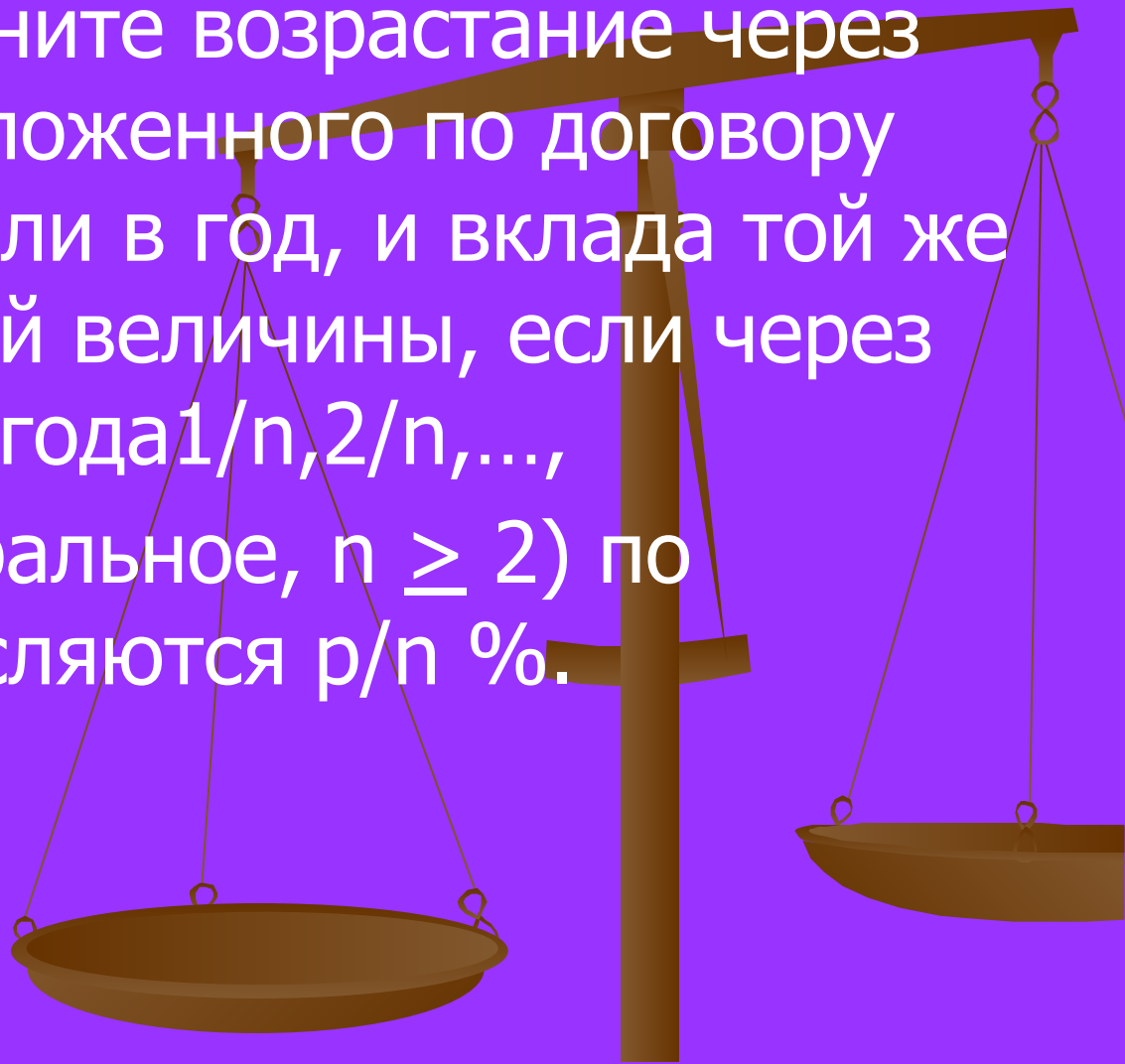
Неравенства в финансовой математике

- Задача 1 . Доказать, что при $x > 0$ выполняется неравенство $(1+x)^{1/3} < 1 + 1/3 x$.
- Задача 2. (Вспомогательная.) При краткосрочных вкладах до востребования вклад S (например, рублей) увеличивается по следующему правилу: он растет ежедневно на p процентов от первоначальной суммы S (независимо от срока хранения). Найдите величину вклада спустя n дней его хранения в банке.



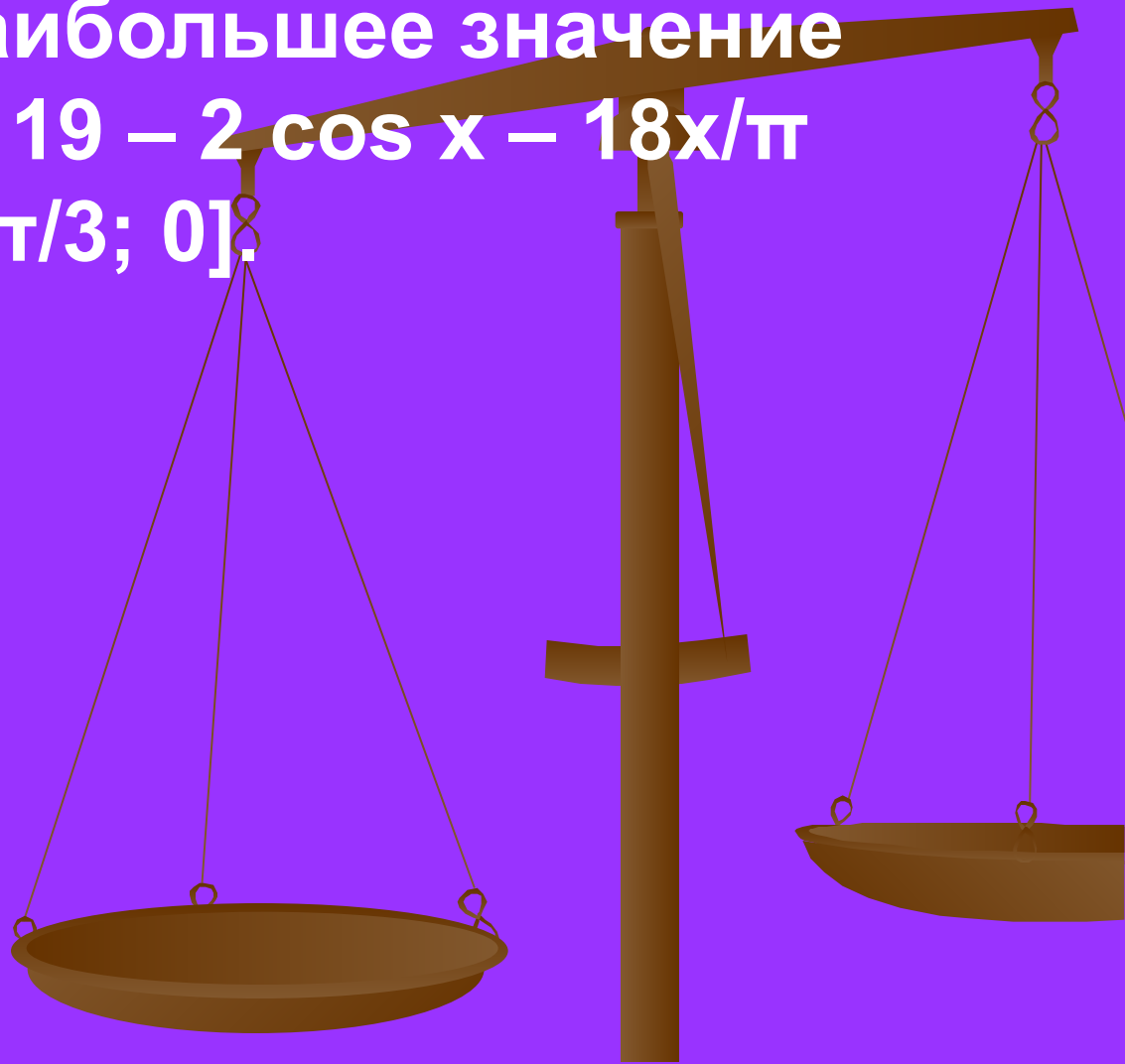
- 
- **Задача 3. (Вспомогательная.)** Пусть увеличение так называемого срочного вклада S производится на p процентов через t месяцев хранения. Определите величину вклада S_n спустя nt (n - натуральное) месяцев хранения в банке, если договор продлевался (пролонгировался) после каждого из $t, 2t, 3t, \dots, (n - 1)t$ месяцев хранения.

- Задача 4. Сравните возрастание через год вклада, положенного по договору под r % прибыли в год, и вклада той же первоначальной величины, если через каждые части года $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ (n натуральное, $n \geq 2$) по договору начисляются r/n %.



Метод оценивания в задачах ЕГЭ

- В9 Найдите наибольшее значение функции $y = 19 - 2 \cos x - 18x/\pi$ на отрезке $[-2\pi/3; 0]$.



Метод оценивания в задачах ЕГЭ

- С3 Решите неравенство:

$$7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$$



Метод оценивания в задачах ЕГЭ

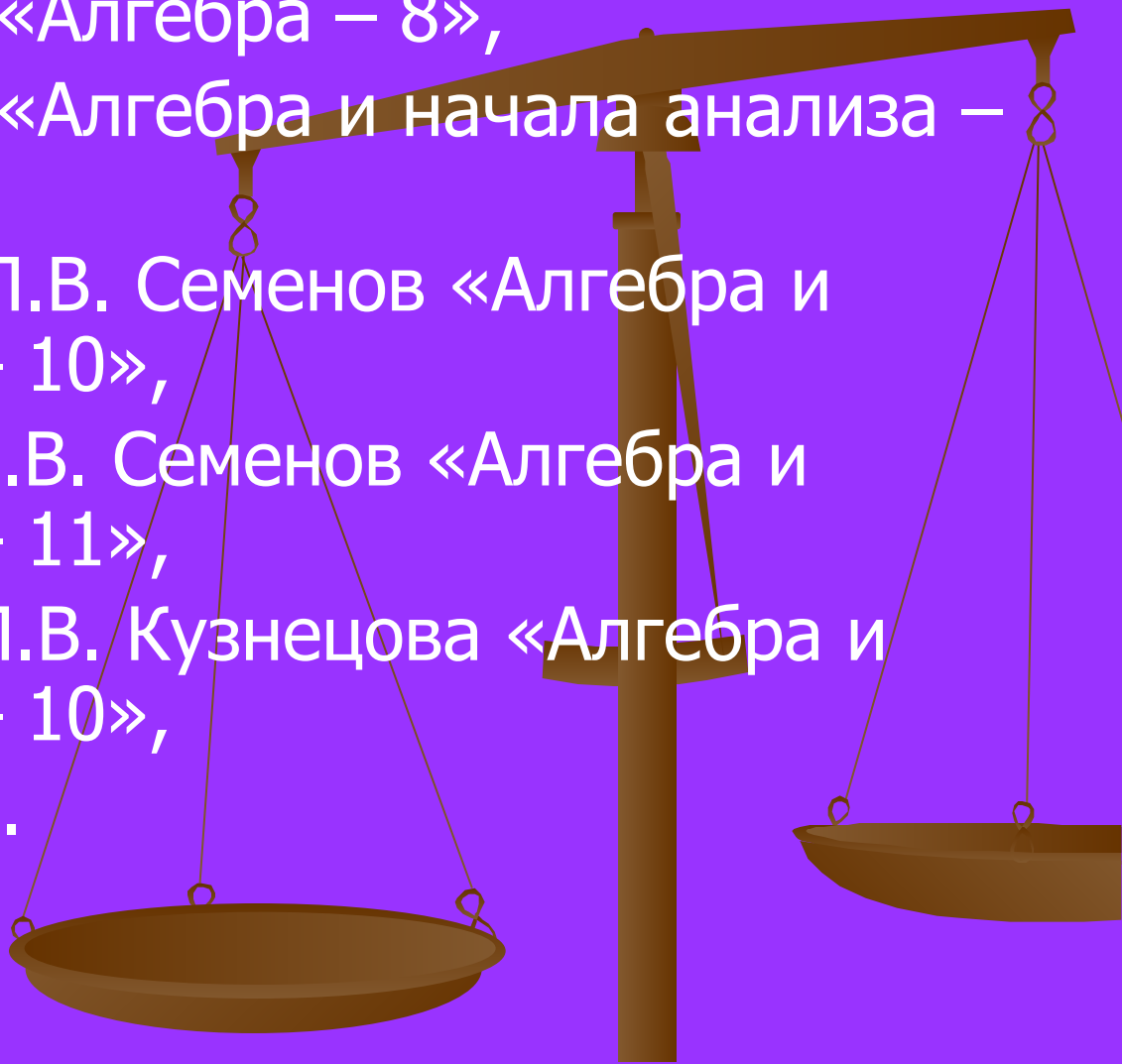
- С3 Решите неравенство:

$$\log_x (\log_9 (3^x - 9)) < 1$$

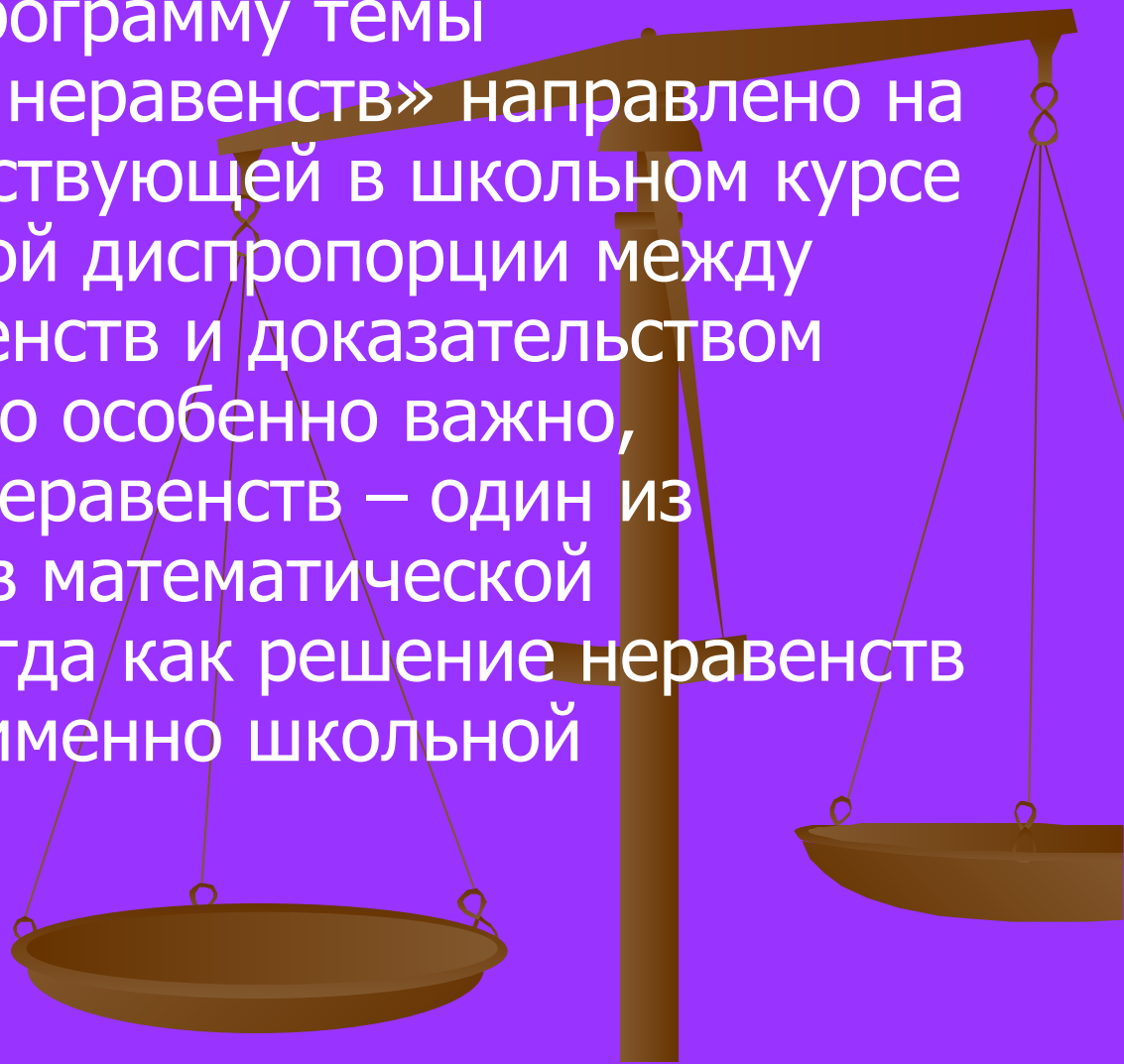


Методические рекомендации по изучению темы:
«Доказательства неравенств» в школьном курсе
математики.

- Ю.Н. Макарычев «Алгебра – 8»,
- С.М. Никольский «Алгебра и начала анализа – 10»,
- А.Г.Мордкович, П.В. Семенов «Алгебра и начала анализа – 10»,
- А.Г.Мордкович, П.В. Семенов «Алгебра и начала анализа – 11»,
- Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецова «Алгебра и начала анализа – 10»,
- Подготовка к ЕГЭ.



Введение в программу темы «Доказательства неравенств» направлено на устранение существующей в школьном курсе математики резкой диспропорции между решением неравенств и доказательством неравенств, и, что особенно важно, доказательство неравенств – один из важнейших видов математической деятельности, тогда как решение неравенств – «привилегия» именно школьной математики.



Таким образом, изучение темы: «Доказательства неравенств» на профильном уровне дает возможность реализовать такие задачи как формирование учащегося навыка осмысления и применение приемов доказательства неравенств; научить применять приемы доказательства неравенств при выполнении различных задач; уметь анализировать, обобщать и делать выводы; логически излагать мысли и творчески относиться к делу.

