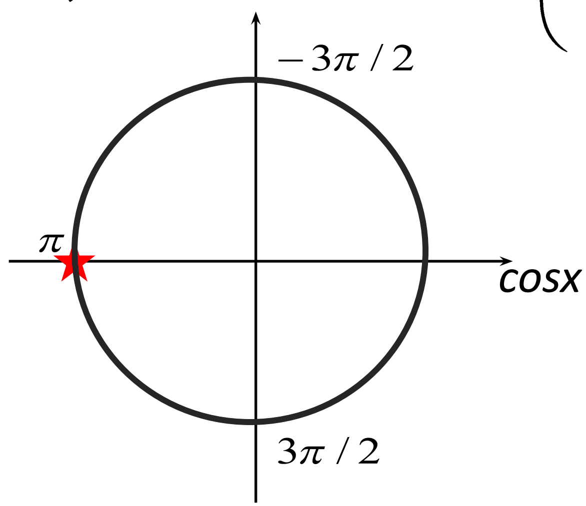
Отбор корней при решении тригонометрических уравнений

учитель математики
Королева Е.В.

Решите уравнение и определите его корни удовлетворяющие дополнительному условию:

а) cos x = - 1; $x \in \left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

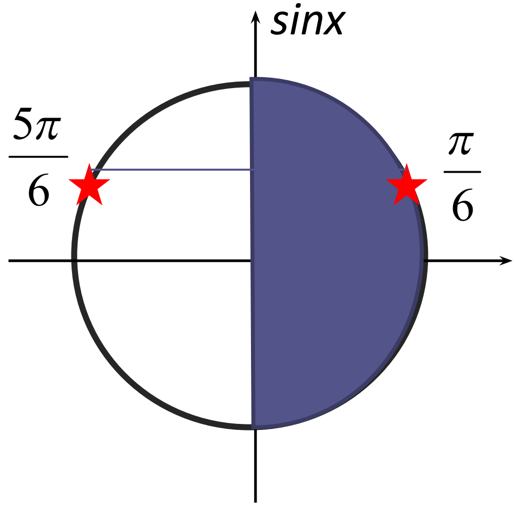


$x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$

$x = \pm\pi$

Решите уравнение и определите его корни удовлетворяющие дополнительному условию:

б) $\sin x = 1/2$ $\qquad\qquad$ $\cos x > 0$



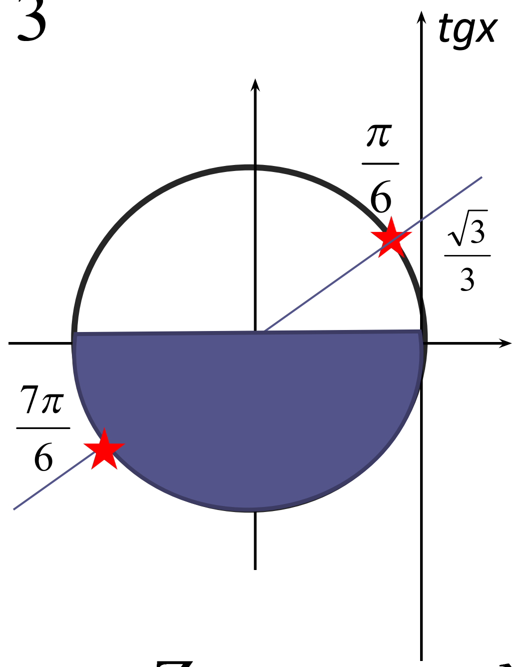
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa,$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$$

Решите уравнение и определите его корни удовлетворяющие дополнительному условию:

в) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin x < 0$



$x = \dfrac{\pi}{6} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$

Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью числовой окружности

Пример: 1.

а) решите уравнение $\sin x \sin 2x = \sin^2 x$,

б) определите корни принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$

Решение.

$\sin x \sin 2x - \sin^2 x = 0$

$\sin x \, 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0$

$2\sin^2 x\cos x - \sin^2 x = 0$

$\sin^2 x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\sin^2 x = 0$ или $2\cos x - 1 = 0$

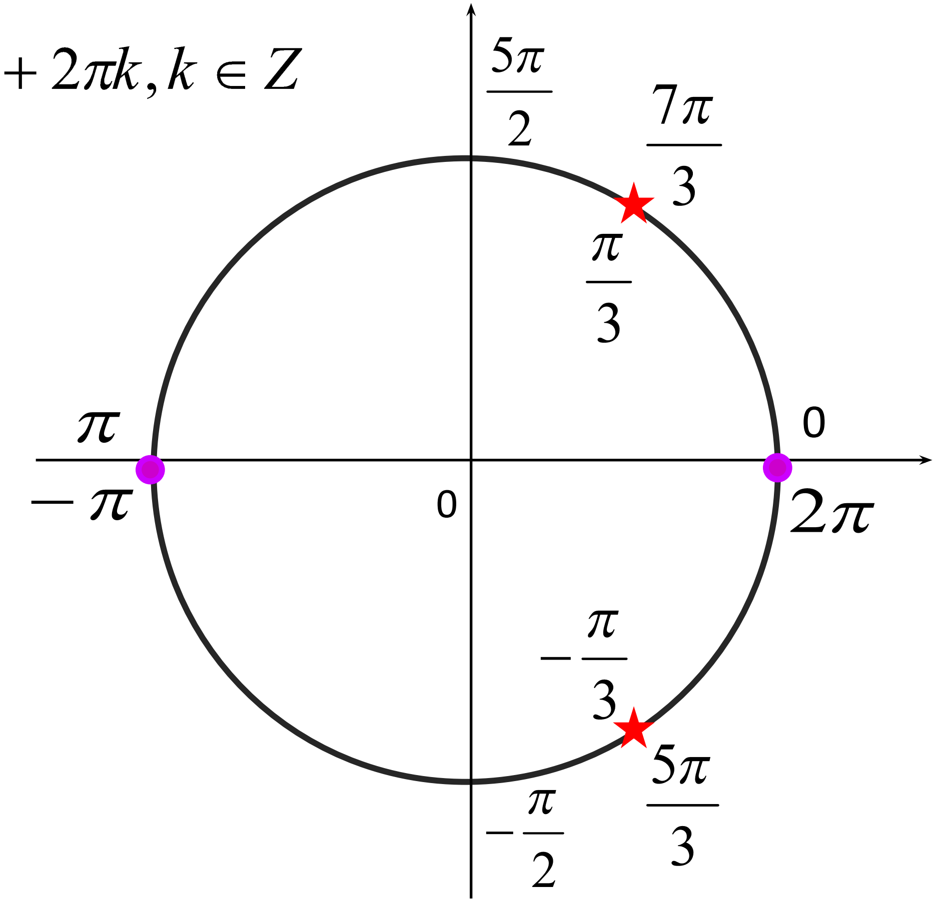
$\sin x = 0$ $\cos x = ½$

$\sin x = 0$

$x = \pi k, k \in Z$

$\cos x = ½$

$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

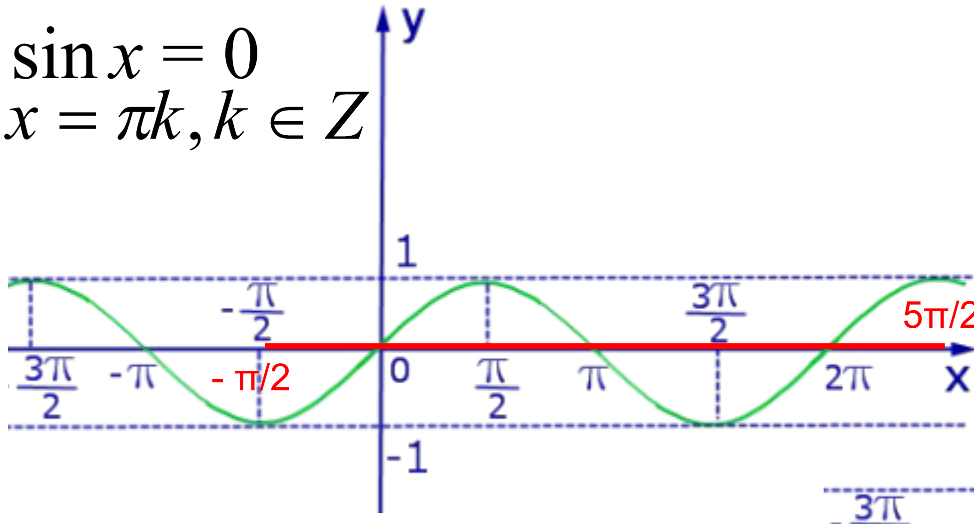


$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$

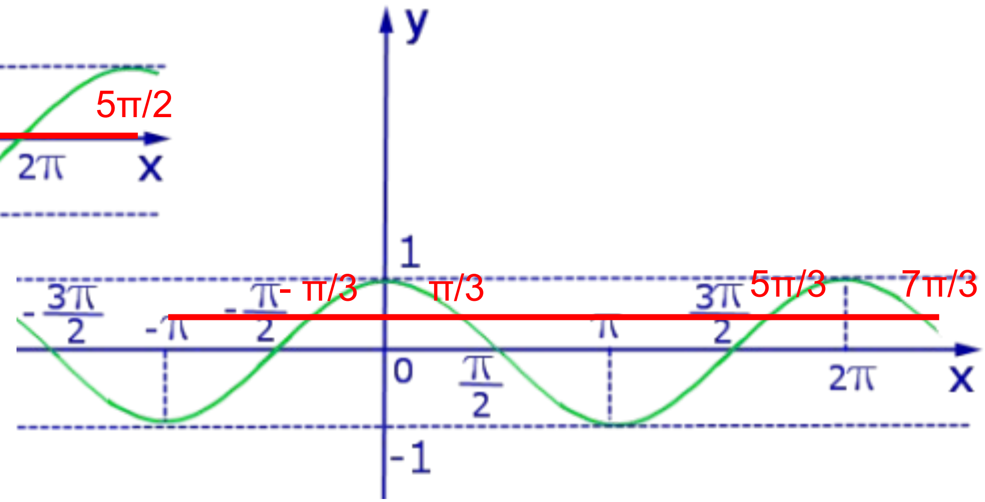
$-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}.$

2. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью графиков тригонометрических функций.

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi k, k \in Z$$



$$\cos x = ½$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$



$$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3};\pi;\frac{5\pi}{3};2\pi;\frac{7\pi}{3}.$$

Изложенные выше способы отбора корней в тригонометрических уравнениях не всегда применяются в чистом виде: выбор способа зависит от конкретных условий, но иногда эти способы комбинируются.

Пример 3. Найти все корни уравнения

$$10\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+2x\right)+3,$$

которые удовлетворяют условию $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{12}\right]$.

Решение.

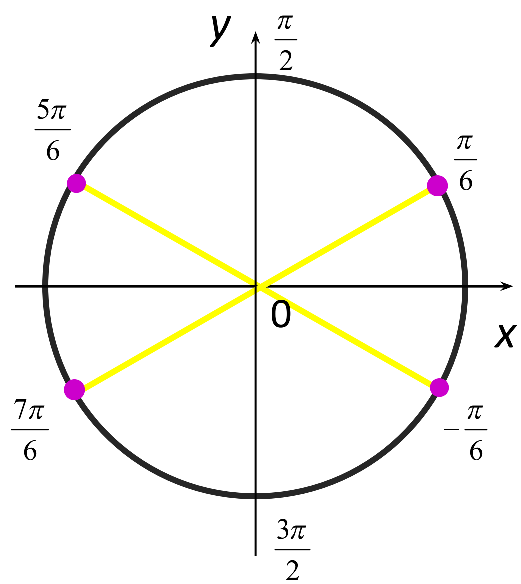
$10\sin^2 x = -\cos 2x + 3;$

$10\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 + 3,$

$8\sin^2 x = 2;$

$$\sin^2 x=\frac{1}{4};$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{2};$$



$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z,\\ x=(-1)^m\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi m, m\in Z; \end{array}\right.$$

С помощью числовой окружности получим:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$$

Выберем с помощью двойного неравенства корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии: $-\frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$

$$-8\pi \le 2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-10 \le 12n \le 17, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{array}\right.$

Из второй серии: $-\frac{2\pi}{3} \le -\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$

$$-8\pi \le -2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-6 \le 12n \le 21, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$

$$\mathit{Ответ}: \{\pm\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}.$$

Работа в парах (по вариантам).

Решите уравнение и определите его корни принадлежащие интервалу (- π ; 2π)

1). $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

2). $3\sin 2x - \sin x = 0$

3). $tgx + 5ctgx = 6$

4). $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

5). $\sin x + \cos x = 0$

6). $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$

7). $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$

8). $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$

Спасибо за урок!