

Принцип Дирихле



- Так. Если я что-нибудь в чём-нибудь понимаю, то дыра – это нора...
- Ага.
- А нора – это кролик...
- Ага.
- А кролик – это подходящая компания.

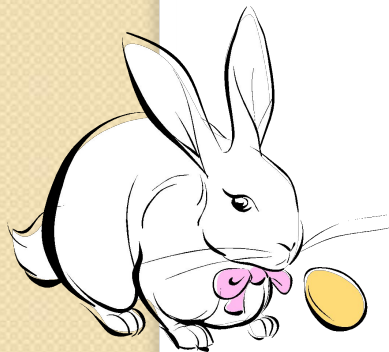
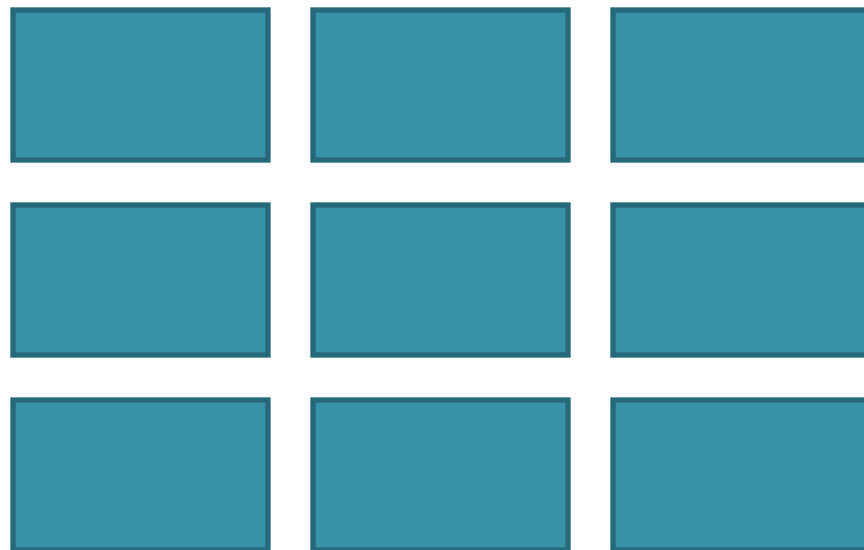
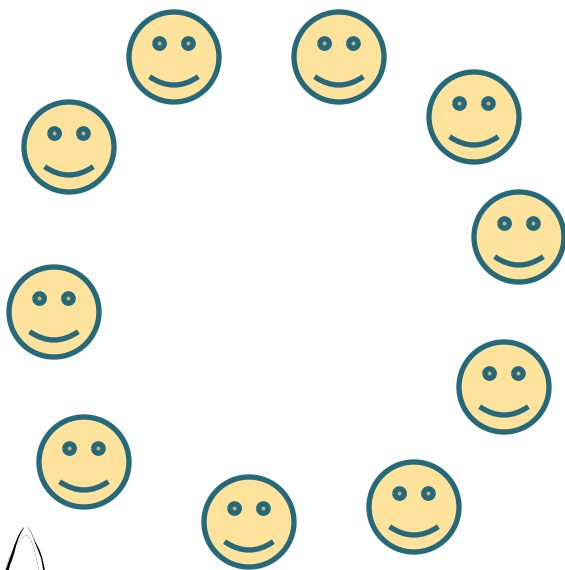
Принцип Дирихле



Если в N клетках сидят не менее $N + 1$ кролик, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

Дирихле Петер Август
Лежён (1805 - 1859)
немецкий математик

Если десять кроликов сидят в девяти клетках, то в какой-то клетке сидят не меньше двух кроликов

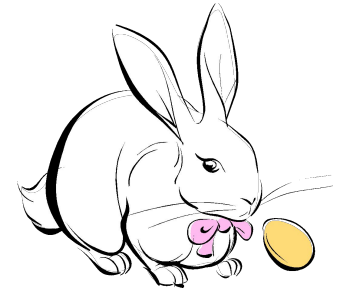
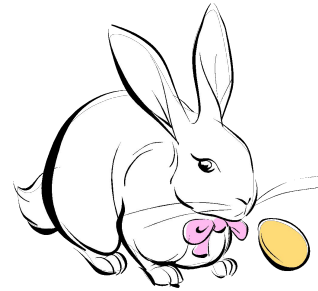
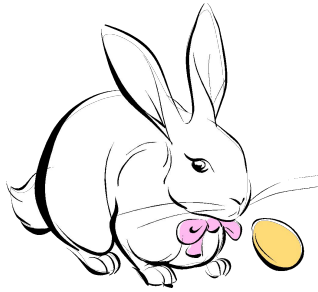


Принцип Дирихле

(общая формулировка)

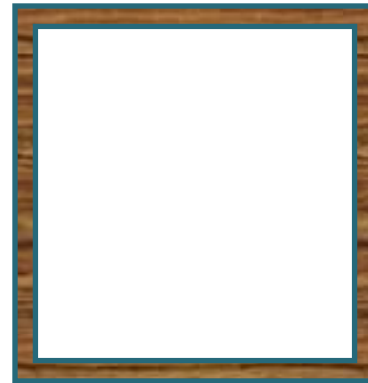
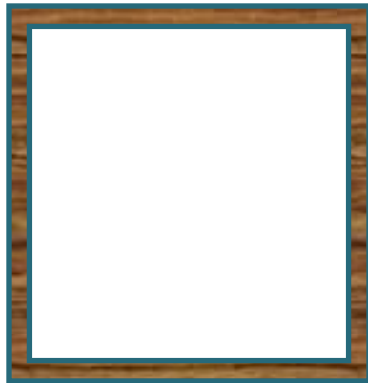
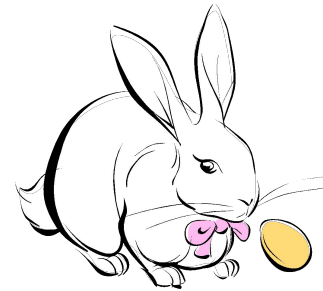
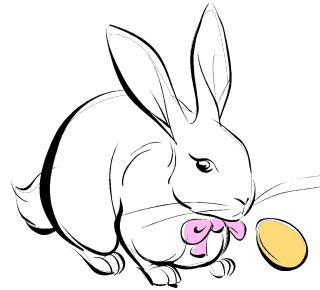
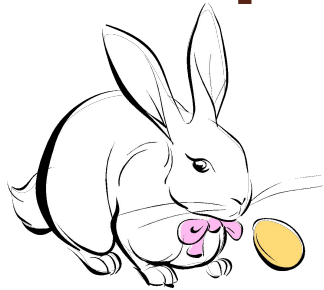
Если N кроликов сидят в K клетках, то найдётся клетка, в которой сидят не меньше чем N/K кроликов, и найдётся клетка, в которой сидят не больше чем N/K кроликов.

Пример 1. ($N > K$)



$$N = 4, K = 3, N/K = 4/3 > 1$$

Пример 2. ($N < K$)



$$N = 3, K = 4, N/K = 3/4 < 1$$

Пример 3.

В школе 400 учеников.

**Докажите, что хотя бы двое из них
родились в один день года.**

Решение: В году 365 (или 366) дней.
Пусть дни – «клетки», ученики – «кролики».
Тогда в некоторой клетке $400/366$ кроликов,
т.е. больше одного. Следовательно, не
меньше двух.

Принцип Дирихле

(обобщенный)

Если $kN+1$ кроликов размещены в N клетках, то найдутся $k+1$ кроликов, которые посажены в одну клетку.

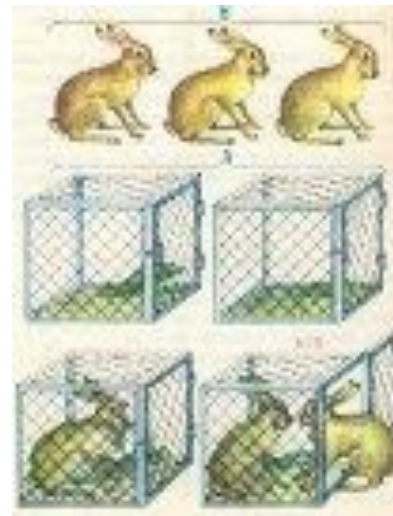
Пример 4.

В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

Решение:

Так как перевезено всего $10m + 1$ футболистов, то, рассадив их по клеткам-командам, получаем, что в какой-то клетке сидит 11 футболистов.

Решим ещё несколько задач



Задача 1.

Задача 1. В городе живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Решение:

Постройте миллион клеток с номерами от 0 до 999999 и рассадите там людей, поместив каждого ленинградца в клетку, номер которой равен количеству волос на его голове.

Задача 2.

Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1 , 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны.

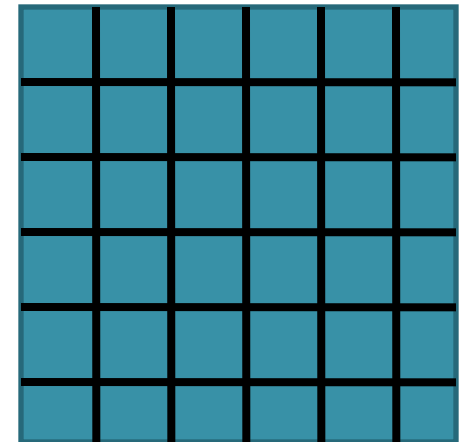
Помогите Буратино.



Решение: Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться от -6 до 6. Всего 13 значений (кролики). Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2.

Получаем: $6 + 6 + 2 = 14$ различных мест (клетки).

Получили противоречие,
значит, составить такой
квадрат невозможно.



Задача 3.

На зачет пришли 65 школьников.

Им предложили 3 контрольные работы.

За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5.

Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на контрольных?

Решение:

Имеет 65 школьников – «кролики».

Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные.

Количество таких наборов $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ или 64 (4 возможности за каждую из трёх работ) – «клетки».

Поскольку $65 > 64$, то по принципу

Дирихле каким-то двум учащимся отвечает один набор оценок.

Задача 4.

В школе 735 учащихся. Можно ли утверждать, что, по крайней мере, 3 ученика должны отмечать день своего рождения в один день?

Решение: Да.

Так как даже с учетом високосного года:

$$735/366 > 2$$

$$\text{или } 735 = 366 \times 2 + 3.$$

Задача 5.

Верно ли, что из 6-ти любых целых чисел, найдутся два числа, разность которых делиться на 5?

Решение: Пусть любые 6 чисел – это кролики. Остатки от деления на 5: 0, 1, 2, 3, 4, т.е. их всего 5 – это клетки, в каждую из которых будем помещать числа, дающие одинаковый остаток при делении на 5. Имеем 6 кроликов в 5 клетках. Значит, обязательно найдется два числа, дающих одинаковые остатки при делении на 5. Значит, их разность делится на 5.

Ответ : Верно.

Задача 6.

В классе 30 человек. Паша сделал 13 ошибок, а остальные меньше. Доказать, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

- Решение: По условию задачи наибольшее число ошибок, сделанных в работе 13. Значит, ученики могли сделать 0, 1, 2, ..., 13 ошибок. Эти варианты будут "клетками", а ученики станут "кроликами". Тогда по (обобщенному) принципу Дирихле (14 клеток и 30 зайцев) найдутся три ученика, попавших в одну "клетку", то есть сделавших одинаковое число ошибок.

Задача 7.

**В мешке лежат шарики 2-х разных цветов (много белых и много черных).
Какое наименьшее количество шариков
надо на ощупь вынуть из мешка, чтобы
среди них заведомо оказались два одного
цвета.**

Решение: Это - просто применение принципа Дирихле: кроликами будут взятые шарики, а клетками - черный и белый цвета. Клеток две, поэтому если кроликов хотя бы три, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика). С другой стороны, взять два шарика мало, потому что они могут быть двух разных цветов. Ответ: 3 шарика.

Задача 8.

В коробке лежат 10 красных карандашей, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых. Наугад (произвольно) из коробки вынимают *n* карандашей. Определить наименьшее число карандашей, которые необходимо вынуть, чтобы среди них было:

- 1) не менее 4 карандашей одного цвета;**
- 2) по одному карандашу каждого цвета;**
- 3) хотя бы 6 карандашей синего цвета.**

- Решение:

- 1) Так как у нас всего 4 цвета, согласно принципу Дирихле (карандаши будут "кроликами", а цвета - "клетками"), по крайней мере, 4 карандаша будут одинакового цвета, если вынуть 13 карандашей.
- Докажем, что $n = 13$ является наименьшим числом. С этой целью покажем ситуацию, при которой условия задачи не выполняются. Например, когда вынута по 3 карандаша каждого цвета (12 карандашей). Отметим, что эта ситуация возможна, так как в коробке находится не менее 3 карандашей каждого цвета.

Задача 9.

Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 лежат 5 точек. Доказать, что найдутся две точки из пяти, расстояние между которыми меньше 0,5.

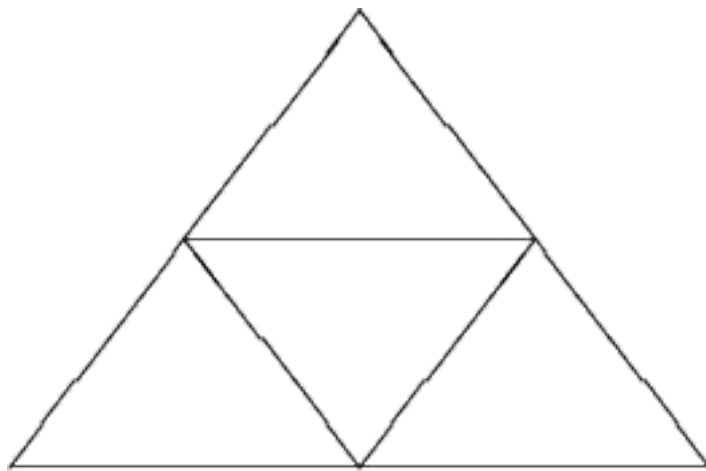


рис. 1

Решение:

Пусть 5 точек - «зайцы». Так как «клеток» должно быть меньше, то пусть их будет 4. Чтобы получить 4 «клетки», разобьем равносторонний треугольник с помощью средних линий на 4 равных треугольника - «клетки». Так как «зайцев» - 5, «клеток» - 4 и $5 > 4$, то по принципу Дирихле найдется клетка - равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее 2 зайцев - точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми 2 точками из 5 расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Задача 10.

В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка - точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

Решение: Весь ковер можно накрыть такими 25-ю заплатами. По принципу Дирихле какая-то из этих заплат накроет не менее трех дырок, так как $51 = 25 \cdot 2 + 1$.