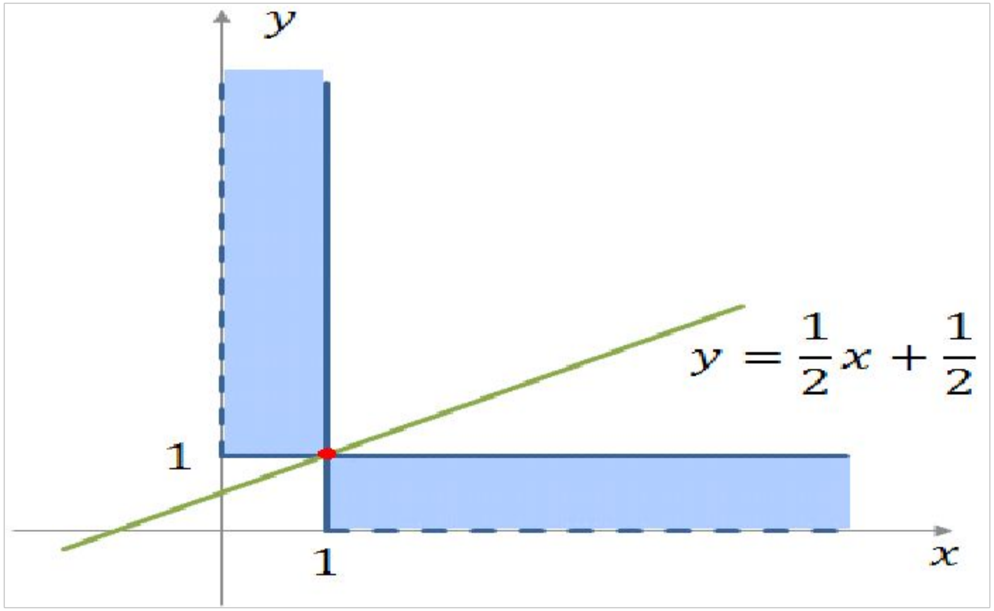
Пример 1. **Решите систему** $\begin{cases} \sqrt{\log_2 x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y} \geq \log_2 x - \log_3 y \\ x = 2y - 1 \end{cases}$

Решение.

Найдем ОДЗ системы:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \log_2 x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} y \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Получаем, что ОДЗ неравенства состоит из двух пересекающихся в одной точке областей на координатной плоскости.



Построив в этой области прямую $x = 2y - 1$, то есть $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, приходим к выводу, что условию $x = 2y - 1$ из всей ОДЗ удовлетворяет единственная точка $(1; 1)$, которая удовлетворяет и первому неравенству системы.

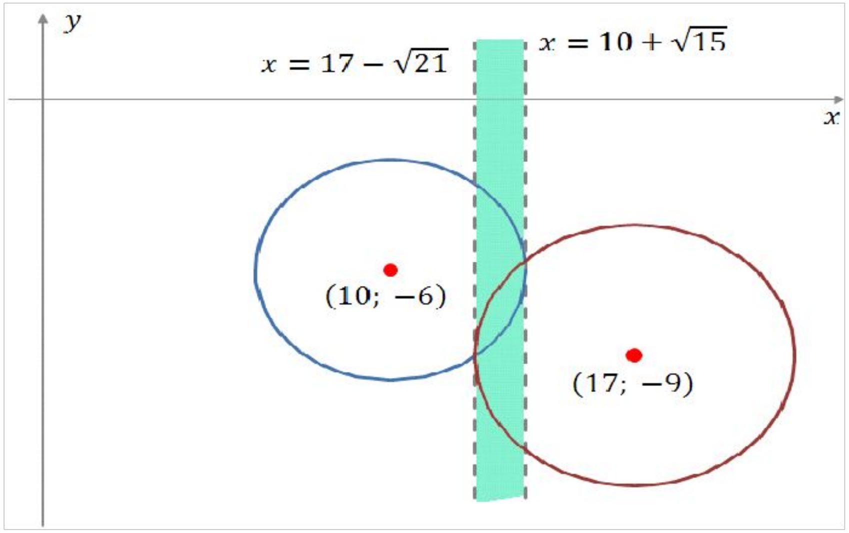
Ответ: $(1; 1)$.

Пример 2. Найти целые решения системы неравенств $\begin{cases} x^2+y^2+12y \le 20x-121 \\ x^2+18y+y^2 \le 34x-349 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2-20x+100+y^2+12y+36 \le -121+100+36 \\ x^2-34x+289+18y+y^2+81 \le -349+289+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-10)^2+(y+6)^2 \le 15 \\ (x-17)^2+(y+9)^2 \le 21 \end{cases}$$

Множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам, представляют собой круги: один с центром $(10;\ -6)$ и радиусом $\sqrt{15}$, второй – с центром $(17;\ -9)$ и радиусом $\sqrt{21}$.



Совершенно очевидно, что если существуют значения x, удовлетворяющие неравенствам системы, то они не могут превышать значение $10+\sqrt{15}$ и не могут быть меньше $17-\sqrt{21}$.

В данном случае рисунок позволяет понять, какие значения может принимать неизвестная x (то есть ограничить возможные значения).

Оценив значения этих выражений и учитывая, что $x \in Z$ (по условию), получаем: $x = 13$.

$3 < \sqrt{15} < 4$

$13 < 10+\sqrt{15} < 14$

$4 < \sqrt{21} < 5$

$-5 < -\sqrt{21} < -4$

$12 < 17-\sqrt{21} < 13$

Подставляя полученное значение в оба неравенства, получаем $\begin{cases} (y+6)^2 \le 6 \\ (y+9)^2 \le 5 \end{cases}$.

Первому неравенству системы удовлетворяют пять целых значений $y:\ -8;\ -7;\ -6;\ -5;\ -4$. Второму: $-11;\ -10;\ -9;\ -8;\ -7$. Тогда решением системы могут быть только два значения $y:\ -8;\ -7$.

Ответ: $(13;\ -8), (13;\ -7)$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

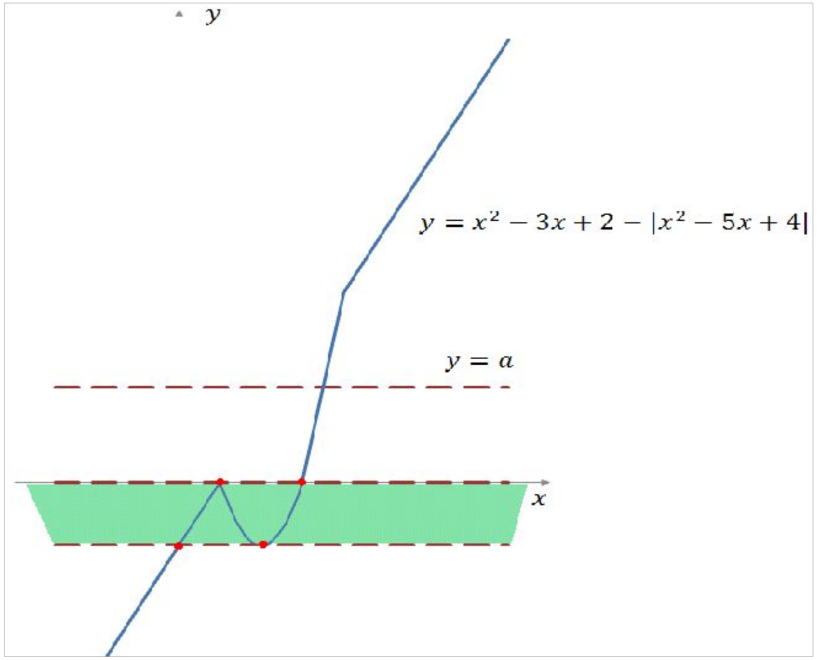
Решение.

Точки пересечения графика функции и оси абсцисс – нули функции. Следовательно, речь идет о количестве корней уравнения $x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a=0$.

Рассмотрим данное уравнение как функциональное равенство $g(x)=h(x)$, где $g(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|$, $h(x)=a$.

$g(x)=x^2-3x+2-|(x-1)(x-4)|$ ↗ при $x\in(1;4)$ $g(x)=2x^2-8x+6$

↘ при $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ $g(x)=2x-2$



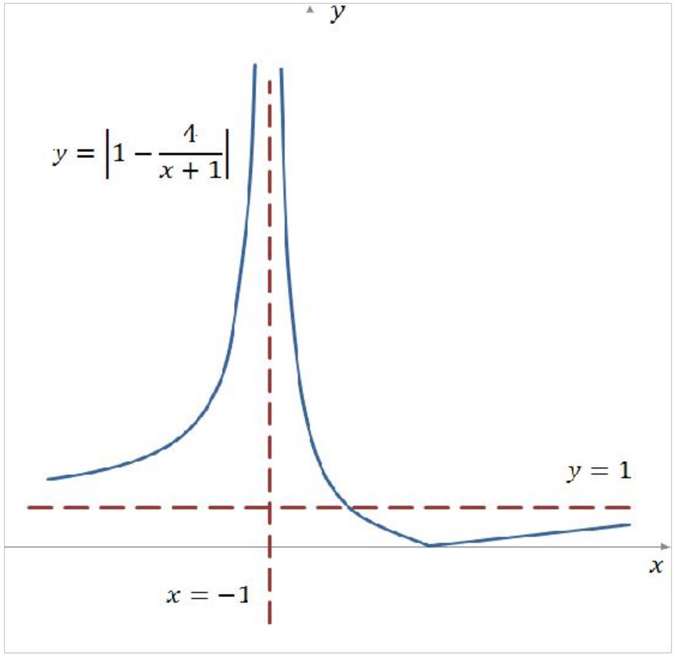
Построив график функции $g(x)$ в системе координат и учитывая, что $h(x)=a$ – множество прямых, параллельных оси OX, замечаем, что прямая $y=a$ пересекает график $g(x)$ менее чем в трех точках при $a\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

Пример 4. Определить в зависимости от значения a количество корней уравнения $|x-3| = a|x+1|$.

Решение.

Так как $x \neq -1$, то разделив данное уравнение на $|x+1|$, получаем уравнение $a = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$, то есть $a = \left|1 - \frac{4}{x+1}\right|$. Рассмотрим данное уравнение как функциональное равенство.



Построив в одной системе координат графики функций $g(x) = \left|1 - \frac{4}{x+1}\right|$ и $h(x) = a$ и учитывая, что прямые $x = -1$ и $y = 1$ являются асимптотами графика, по рисунку делаем вывод, что при $a < 0$ исходное уравнение не имеет корней, при $a = 0$ и $a = 1$ корень один, при $0 < a < 1$ и $a > 1$ уравнение имеет два корня.

Ответ:

$a < 0$ – корней нет

$a = 0$; $a = 1$ – корень один

$0 < a < 1$; $a > 1$ – корня два.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

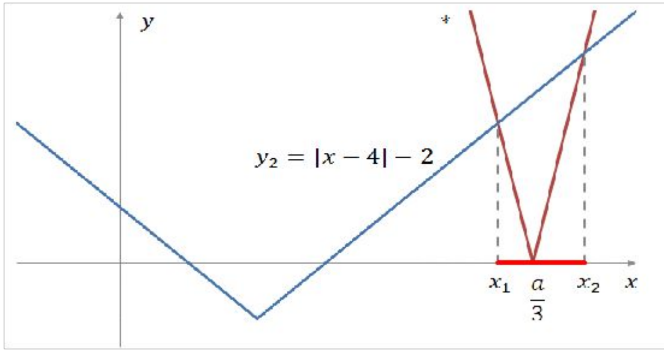
$$|3x-a| \le |x-4|-2$$

$$3\left|x-\frac{a}{3}\right|\le|x-4|-2$$

Построим в системе координат график функции $y_2=|x-4|-2$:

при $x\ge4$ $y_2=x-6$

при $x<4$ $y_2=2-x$



Смещая вдоль оси OX построенный в этой же системе координат график функции $y=3|x|$, найдем такое положение графика, когда длина отрезка, являющегося решением, равна 1. На рисунке это положение обозначено символом (*), то есть $x_2-x_1=1$ (1). При этом график $y=3|x|$ смещается на $\frac{a}{3}$ вправо.

x_2 – это решение уравнения $x-6=3\left(x-\frac{a}{3}\right)$, так как это точка пересечения графика $y=|x-4|-2$ при $x>4$, то есть $y=x-6$, и графика $y=3\left|x-\frac{a}{3}\right|$ при $x>\frac{a}{3}$, то есть $y=3\left(x-\frac{a}{3}\right)$.

$x-6=3x-a$

$x=\frac{a-6}{2}\Rightarrow x_2=\frac{a-6}{2}$

x_1 – это решение уравнения $x-6=3\left(\frac{a}{3}-x\right)$

$x-6=a-3x\Rightarrow x=\frac{a+6}{4}\Rightarrow x_1=\frac{a+6}{4}$

Подставляя x_2 и x_1 в уравнение (1), получаем

$\frac{a-6}{2}-\frac{a+6}{4}=1,$

решив которое, получаем $a=22$.

Очевидно, что симметрично прямой $x=4$ есть еще одно положение графика, удовлетворяющее условию. Найдем соответствующее ему значение a из условия

$$\frac{22}{3}-4=4-\frac{a}{3}\Rightarrow a=2.$$

Ответ: $a=2$; $a=22$.

Пример 6. Найти все значения a, такие, что для любого x выполняется неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$.

Решение.

$$2|x-a|>3-|x-1|-2x$$

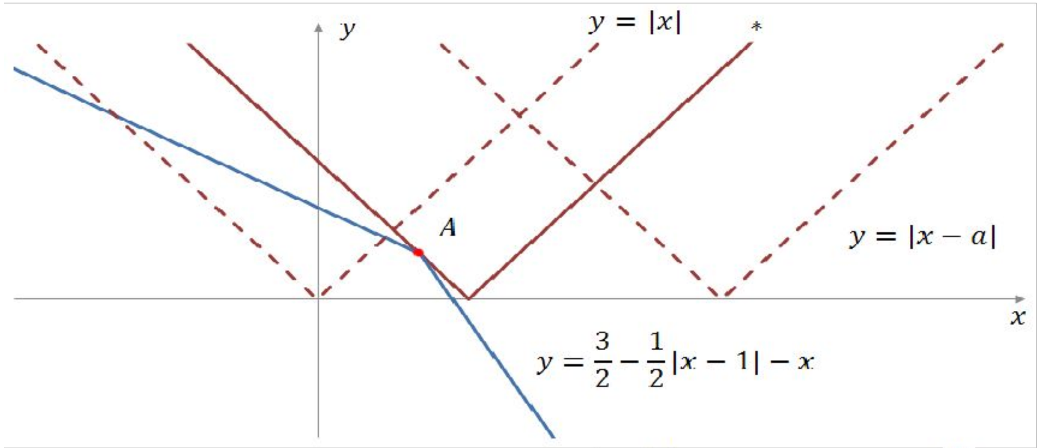
$$|x-a|>\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|x-1|-x$$

Рассмотрим функции $y_1=|x-a|$ и $y_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|x-1|-x$.

Построим в системе координат график функции $y_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|x-1|-x$. Данная функция является кусочно-монотонной.

При $x\in(-\infty;1)$ $y_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(x-1)-x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-x=1-\frac{1}{2}x$.

При $x\in[1;+\infty)$ $y_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x-1)-x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-x=2-\frac{3}{2}x$.



Построив в этой же системе координат график функции $y=|x|$, смещаем его вдоль оси OX (так как график функции $f(x-a)$ получается из графика функции $f(x)$ смещением вдоль оси OX) до тех пор, пока график функции $y_1=|x-a|$ в любой точке окажется выше графика функции $y_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|x-1|-x$. На рисунке это положение графика отмечено символом (*). Это положение характеризуется тем, что график проходит через точку $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$, то есть при $x=1;\ y_1=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ |1-a|=\frac{1}{2}$. Решая данное уравнение, получаем $a_1=\frac{1}{2};\ a_2=\frac{3}{2}$.

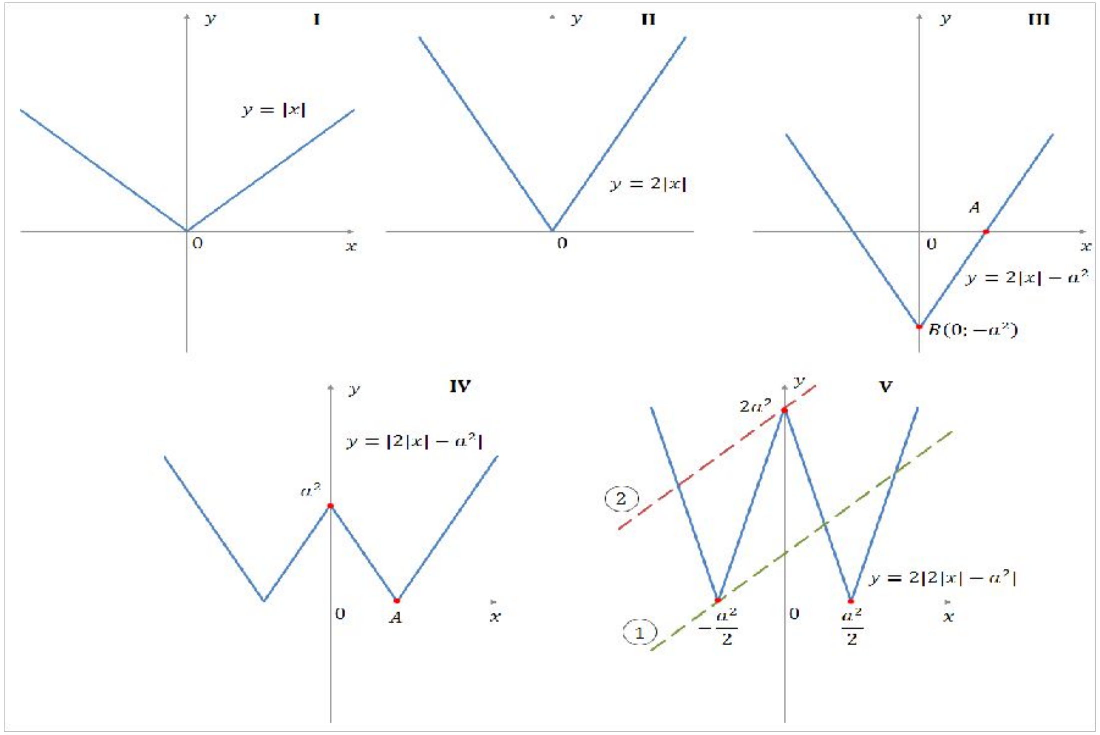
Очевидно, что $a=\frac{1}{2}$ решением являться не может, так как при этом часть графика $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ окажется ниже графика $y_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|x-1|-x$ $\Rightarrow$ неравенство выполняется не для любого $x\ \Rightarrow a=\frac{3}{2}$. Для того, чтобы неравенство выполнялось для любого x, достаточно сдвинуть график вправо на любое расстояние. При этом a будет увеличиваться. Следовательно, неравенство выполняется при любом a больше $\frac{3}{2}$.

Пример 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет три различных решения.

Решение.

Построим график функции $y=2|2|x|-a^2|$, последовательно преобразовывая график функции $y=|x|$, то есть

$$|x| \;\to\; 2|x| \;\to\; 2|x|-a^2 \;\to\; |2|x|-a^2| \;\to\; 2|2|x|-a^2|.$$



Причем очевидно, что координаты точки $B(0;\ -a^2)$, $O(0;0)$. Угловой коэффициент прямой BA равен двум $\Rightarrow$ катет OA в 2 раза меньше катета OB в прямоугольном треугольнике $OAB\ \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{2};0\right)$.

В этой же системе координат построим график функции $y=x-a$. При $a\neq 0$ (при $a=0$ получаем уравнение $4|x|=x$, которое имеет единственный корень $x=0\ \Rightarrow$ решением задачи являться не может) график функции $y=x-a$ – прямая с угловым коэффициентом 1.

Совершенно очевидно, что три различные точки пересечения будут только в двух случаях (① и ②). Во всех остальных случаях количество корней отлично от трех.

① – характеризуется тем, что при $x=-\frac{a^2}{2}$ $y=0$, то есть

$-\frac{a^2}{2} - a = 0$; $a^2 + 2a = 0$;

$a = 0$ (не удовлетворяет условию)

$a = -2$.

② – характеризуется тем, что при $x = 0$ $y = 2a^2$, то есть

$2a^2 = -a$; $2a^2 + a = 0$;

$a = 0$ (не удовлетворяет условию)

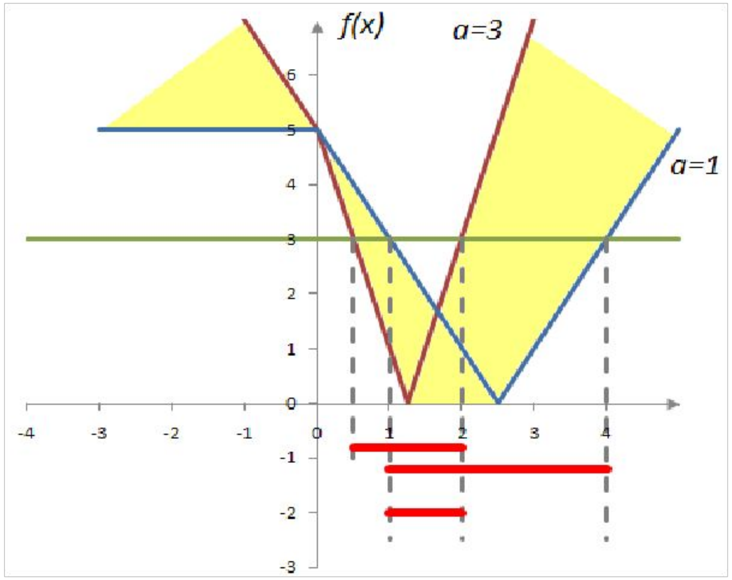
$a = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$; $a = -2$.

Пример 8. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству: $|ax+|x|-5|\le 3$ при всех значениях $a\in[1;3]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=|ax+|x|-5|$.



Если $x\ge 0$, то $f(x)=|(a+1)x-5|$

при $a=1$ при $a=3$

$f(x)=|2x-5|$ $f(x)=|4x-5|$

Если $x<0$, то $f(x)=|(a-1)x-5|$

при $a=1$ при $a=3$

$f(x)=5$ $f(x)=|2x-5|$

Построим в одной системе координат графики данных функций и график функции $f(x)=3$. Найдем абсциссы точек пересечения графиков $f(x)=|2x-5|$ и $f(x)=3$, решив уравнение $|2x-5|=3$ ($x=1;\ x=4$) и графиков функций $f(x)=|4x-5|$ и $f(x)=3$ ($x=0{,}5;\ x=2$).

При любом $1<a<3$ график функции $f(x)=|ax+|x|-5|$ будет занимать положение между графиками $f(x)=|2x-5|$ и $f(x)=|4x-5|$ при $x\ge 0$ и графиками $f(x) = 5$и $f(x) = |2x - 5|$ при $x < 0$.

Исходя из этого, решением исходного неравенства при заданных для a ограничениях будет пересечение решений этого неравенства при $a = 1$и при $a = 3$.

Ответ: $[1; 2]$

Пример 9. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых неравенство $\left|x - a + |x|\right| \leq |x - a|$ верно хотя бы при одном значении $a \in [3; 6]$.

Решение.

Если $x \geq 0$, то $|2x - a| \leq |x - a|$

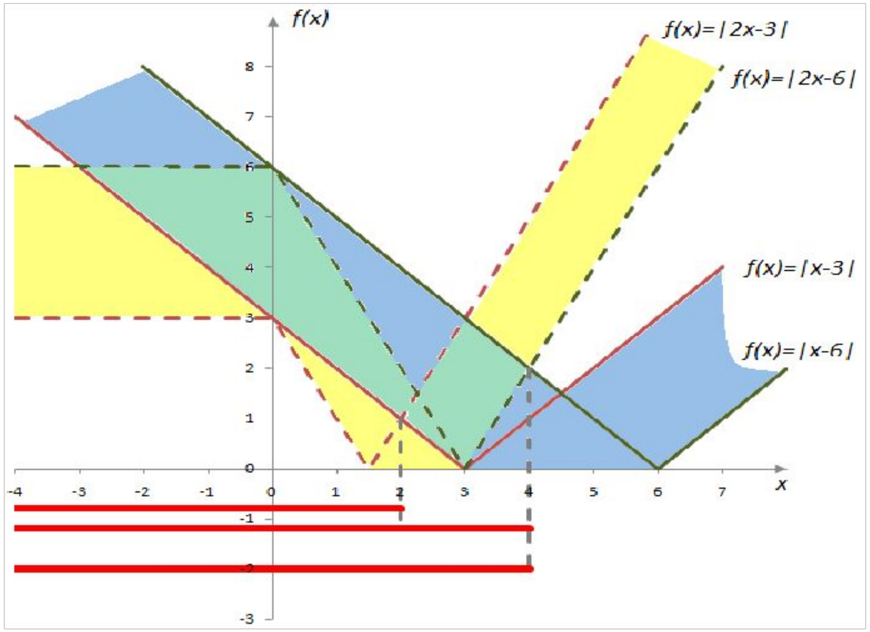
при $a = 3$ — $|2x - 3| \leq |x - 3|$

при $a = 6$ — $|2x - 6| \leq |x - 6|$

Если $x < 0$, то $|a| \leq |x - a|$

при $a = 3$ — $3 \leq |x - 3|$

при $a = 6$ — $6 \leq |x - 6|$



Построим в одной системе координат графики функций $f(x) = |2x - 3|$, $f(x) = |2x - 6|$, $f(x) = |x - 3|$, $f(x) = |x - 6|$ при $x \geq 0$ и графики функций $f(x) = |x - 3|$, $f(x) = |x - 6|$, $f(x) = 3, f(x) = 6$ при $x < 0$. Учитывая, что при всех значениях $3 < a < 6$, графики соответствующих функций будут находиться в «желтой» и «синей» областях, решением исходного неравенства будет объединение решений этого неравенства при $a = 3$ и $a = 6$, то есть интервал $(-\infty; 4]$.

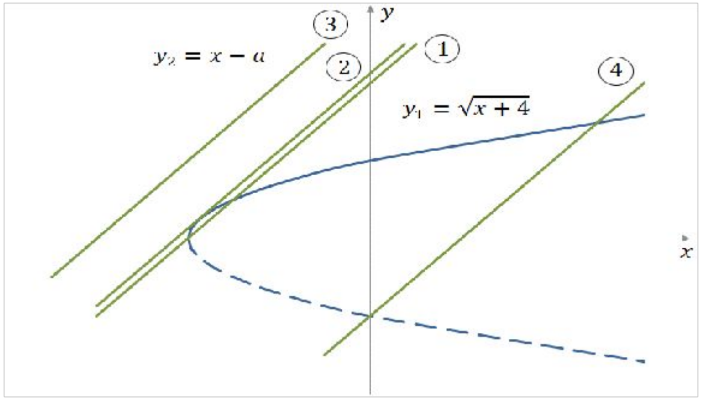
Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{x+4} = x - a$.

Решение.

Рассмотрим данное уравнение как функциональное равенство $y_1 = \sqrt{x+4}$ и $y_2 = x - a$.

$\sqrt{x+4} \geq 0$ при всех допустимых значениях x ($x \geq -4$).

Возведя обе части данного равенства в квадрат, получаем $x = y_1^2 - 4$ – это парабола, верхняя ветвь которой действительная, а нижняя – мнимая (образовавшаяся из-за возведения в квадрат).



Построив в этой же системе координат семейство графиков $y = x - a$, замечаем, что в положении между ② (не включая) и ① (включая) корней будет два. В положениях ② и ④ корень один. В положении ③ корней нет.

Положение ① характеризуется тем, что $y = x - a$ проходит через вершину параболы – точку $(-4; 0)$, то есть $0 = -4 - a$; $a = -4$.

Положение ② характеризуется тем, что уравнение $x + 4 = (x - a)^2$, полученное из исходного, имеет один корень из-за равного нулю дискриминанта, то есть

$x^2 - 2ax + a^2 - x - 4 = 0$

$x^2 - (2a+1)x + a^2 - 4 = 0$

$D = (2a+1)^2 - 4(a^2 - 4) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 16 = 4a + 17$

$4a + 17 = 0; a = -4\frac{1}{4}$

Тогда корень $x = \frac{2a+1}{2}$ (при $a = -\frac{17}{4}$), то есть

$$x = \frac{-2 \cdot \frac{17}{4} + 1}{2} = \frac{-\frac{17}{2} + \frac{2}{2}}{2} = \frac{-\frac{15}{2}}{2} = -\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$$

При $a < -4\frac{1}{4}$ корней нет, так как дискриминант отрицательный (положение ③).

В положении ④ корней два. Но один действительный (который является бóльшим), а второй – мнимый (посторонний) (**).

Решая уравнение $x^2-(2a+1)x+a^2-4=0$, получаем корни:

$$x_1=\frac{2a+1-\sqrt{4a+17}}{2}$$ (меньший корень)

$$x_2=\frac{2a+1+\sqrt{4a+17}}{2}$$ (бо́льший корень)

Получается, что в положении между ② (не включая) и ① (включая), то есть $-4\frac{1}{4}<a\le-4$, уравнение имеет два корня: $x_{1,2}=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a+17}}{2}$. Далее (положение ④, $a>-4$), учитывая (**) – только один: $x=\frac{2a+1+\sqrt{4a+17}}{2}$

Ответ:

при $a<-4\frac{1}{4}$ корней нет;

при $a=-4\frac{1}{4}$ $x=-3\frac{3}{4}$;

при $-4\frac{1}{4}<a\le-4$ $x_{1,2}=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a+17}}{2}$;

при $a>-4$ $x=\frac{2a+1+\sqrt{4a+17}}{2}$.

В данном случае рисунок упрощает отбор корней при различных значениях a и, что еще более существенно, подбор условий, определяющих количество корней уравнения.