«Решение уравнений это золотой ключ, открывающий все сезамы»

С. Коваль

Применение метода оценки к решению уравнений

Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.

А.Фуше.

Основные методы решения уравнений.

1. Разложение на множители.
2. Введение новой переменной.
3. Понижение степени.
4. Возведение обеих частей в степень (Внимание: **<u>Посторонние корни</u>**)
5. Умножение обеих частей уравнения на выражение, не принимающее значение- равное нулю. (Внимание: **<u>Посторонние корни</u>**)
6. **Метод оценки.**

a) *Использование монотонности функции*
b) *Использование ограниченности функции*
c) *Использование ОДЗ*
d) *Применение неравенства Коши*
e) *Неравенство Бернулли*

Решить уравнение.

$$X-2=\sqrt{2-x}$$

Решение:

$X-2=\sqrt{2-x}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=(\sqrt{2-x})^2 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=2-x \\ x\geq 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x\geq 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x=2

Использование монотонности функции.

$$X-2=\sqrt{2-x}$$

Т.к. $y_1(x)= x-2$ – возрастающая функция

$y_2(x)= \sqrt{2-x}$ - убывающая функция, то если корень существует, то он единственный (*если функция y=f(x) непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке a ≤ x ≤ b , а функция y=g(x) непрерывна и убывает (возрастает) на этом же отрезке, то уравнение f(x)=g(x) на отрезке a ≤ x ≤ b может иметь не более одного корня*).

Из уравнения очевидно, что x=2

Ответ : x=2

Графическое решение

Использование ограниченности функций.

$$\sin x = x^2 + 2x + 2$$

Решение:

Рассмотрим функцию $y = \sin x$, она ограничена, $E(y) = [-1; 1]$.

Значение равное 1 достигается при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2x + 2$, графиком является парабола, ветви направлены вверх, вершина в точке (-1; 1),

функция тоже ограничена, $E(y) = [1; \infty)$.

Уравнение имеет решение в случае: $\begin{cases} \sin x = 1 \\ x^2 + 2x + 2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \\ X = -1 \end{cases}$

Ни при каких целых значениях n эти корни не совпадут, значит исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: нет корней.

Графическое решение

Решение по алгоритму

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$$

1. ОДЗ [-3;0)$\cup$(0;3]
2. При приведении к общему знаменателю получаем уравнение
$\sqrt{9-x^2}=\frac{8x^2+3}{4x^2-1}$, которое решается по алгоритму.
3. Вывод: решение очень громоздкое

В итоге получаем $x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$

Использование неравенства Коши:

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$$

Заменим $\sqrt{9-x^2}=y, y\geq 0$, тогда

$$\frac{9-y^2}{3+y}+\frac{1}{4(3-y)}=1$$

Исходя из неравенства Коши, получаем:

$$\frac{9-y^2}{3+y}+\frac{1}{4(3-y)}\geq 2\sqrt{\frac{9-y^2}{3+y}\cdot\frac{1}{4(3-y)}}=1$$

Так как равенство достигается лишь в случае равенства слагаемых (следствие из неравенства Коши: $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$)

Получим

$$\frac{9-y^2}{3+y} = \frac{1}{4(3-y)}$$

Так как y≥ 0, то 3+y >0, получаем

3-y=$\frac{1}{4(3-y)}$ $\Longrightarrow$ $4(3-y)^2=1$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{5}{2} \\ y_2 = \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Так как $x^2 = 9 - y^2$, то

$x^2 = \frac{11}{4}$ или $x^2 = -\frac{13}{4}$

$x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$ решений нет

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=4$$

- ОДЗ: $\begin{cases} 1-x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} <=> [-1;1]$

Оценим слагаемые на ОДЗ.
С учетом верхней границы (-1) и нижней границы (1) ОДЗ, каждое слагаемое заключено между 0 и $\sqrt[4]{2}$, т.е.

$$0\leq\sqrt[4]{1-x}\leq\sqrt[4]{2}$$
$$0\leq\sqrt[4]{1+x}\leq\sqrt[4]{2}$$

$$0 \le \sqrt[4]{1-x} \le \sqrt[4]{2}$$
$$0 \le \sqrt[4]{1+x} \le \sqrt[4]{2},$$

складывая эти неравенства получим:

- $$0 \le \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \le 2\sqrt[4]{2},$$

т.к. $2\sqrt[4]{2} < 4$, то

$$\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} < 4,$$

Ответ: уравнение не имеет решений.

Якоб Бернули (1654-1705)

Якоб Бернули родился 27 декабря 1654 года в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли в Швецарии в городе Базель.

Вначале учился в Базельском университете богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно. В университете овладел также 5 языками (французским, итальянским, английским, латинским, греческим), в 1671 году получил учёную степень магистра

В 1690 году Якоб решает задачу Лейбница о форме кривой, при этом впервые появился в печати термин «интеграл». Имя Якоба носит важное в комбинаторике распределение Бернулли.

Он также издал работы по различным вопросам арифметики, алгебры, геометрии и физики. Его именем названы «числа Бернулли».

Обобщенное неравенство Бернулли

- При $X > -1$ и $n \in R$
- Если $n \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$
- Если $n \in (0;1)$, то $(1+x)^n \leq 1+nx$

$(1+x)^n \leq 1+nx$ – неравенство Бернулли

Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=2$$

- $\text{т. к. } x>-1, n=\frac{1}{4}\in(0;1), \text{то}$

$$\sqrt[4]{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{4}}\leq 1-\frac{1}{4}x$$

$$\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{4}}\leq 1+\frac{1}{4}x$$

Сложив оба неравенства, получим:

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}\le 1-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{4}x$$

$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}\le 2$, **значит**

уравнение не имеет решений

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$$

Применяем неравенство Бернулли к каждому слагаемому:

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}=(1+\sqrt{1-x^2})^{0,2}\le 1+\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=(1-\sqrt{1-x^2})^{0,2}\le 1-\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}$$

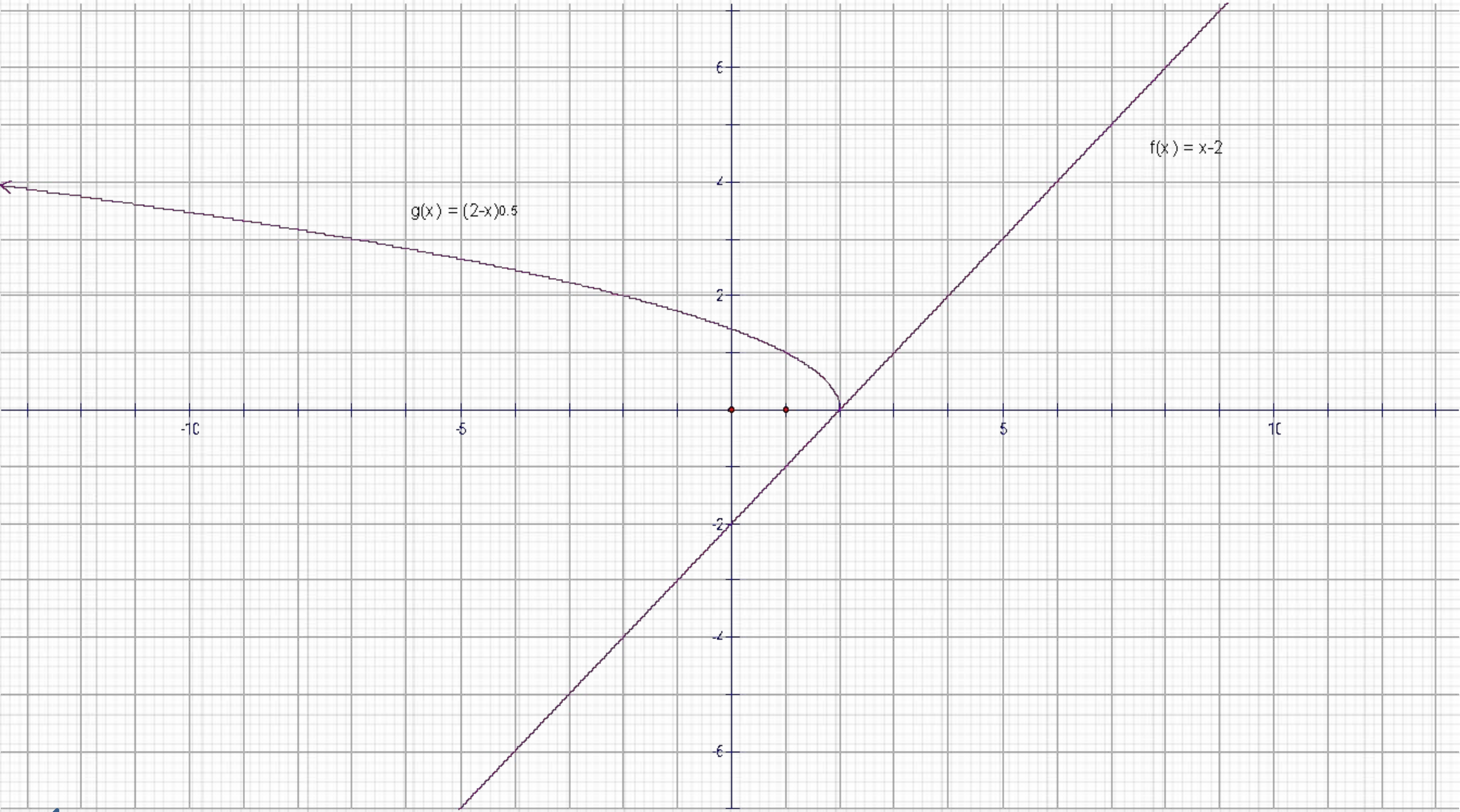
$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}+1-\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}\le 2$$

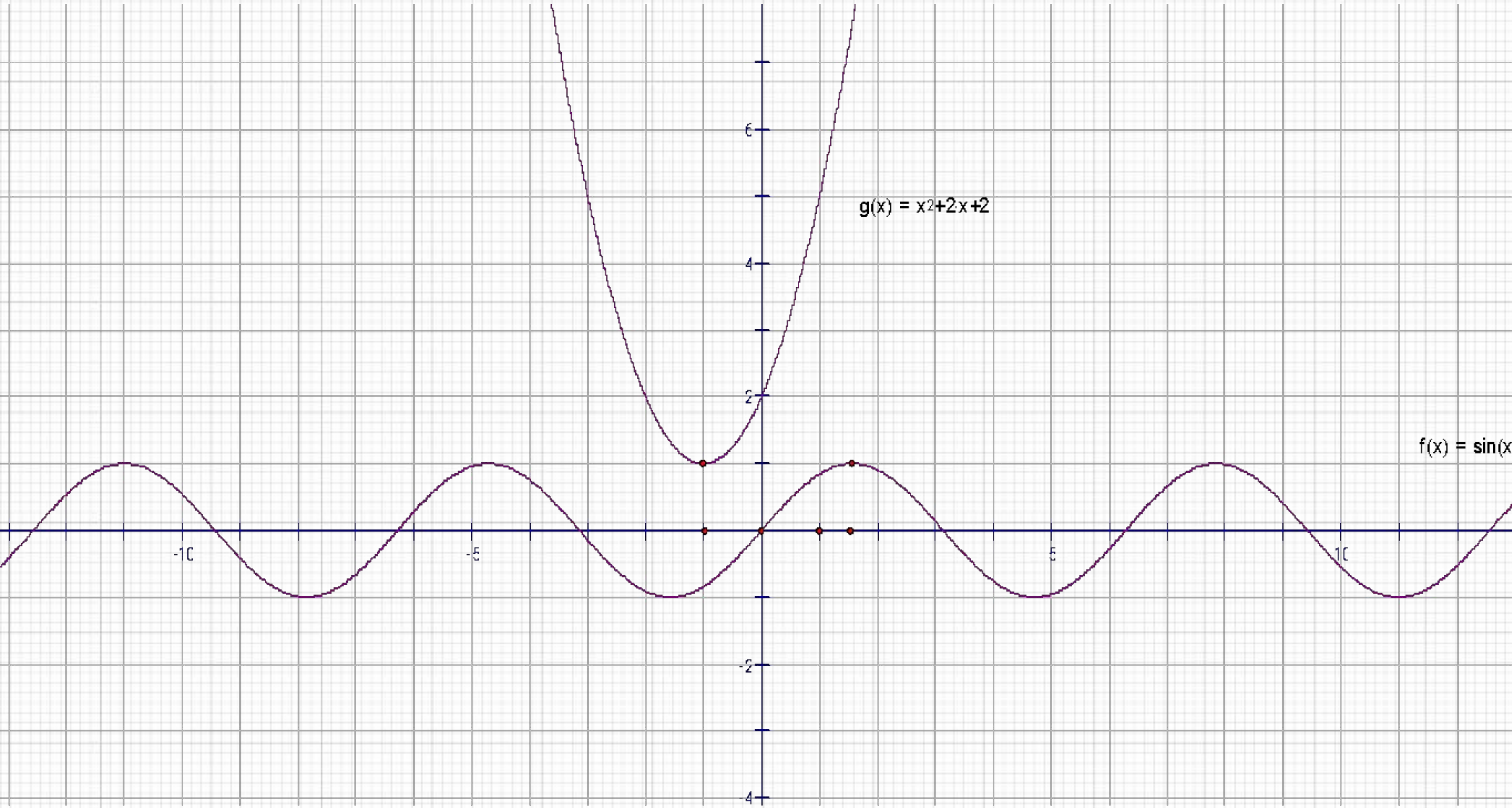
Равенство возможно лишь при $\sqrt{1-x^2}=0$, т.е. при $x=\pm 1$

Ответ : $x=\pm 1$

«Теория без практики мертва и бесплодна, практика без теории невозможна и пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх того, и умение.»



g(x) = (2-x)0.5
f(x) = x-2
6
4
2
-2
-4
-6
-10
-5
5
10



g(x) = x^2+2x+2
f(x) = sin(x)
6
4
2
-2
-4
-10
-5
5
10