

Тема урока :
Модуль действительного числа.
Решение уравнений и неравенств с
модулем.

МОУ СОШ с . Новый Батако

Учитель: Гагиева А.О.

Класс:11

Цель урока :

- Повторить понятие модуля и его свойства.
- Рассмотреть основные типы уравнений и неравенств с модулем.
- Рассмотреть способы решения уравнений и неравенств с модулем.

План урока:

- Объяснение новой темы.
- Домашнее задание.
- Подведение итога урока.

Изучение новой темы:

Определение:

- **Абсолютной величиной или модулем действительного числа X называется неотрицательное число, определяемое соотношением:**

$$|X| = \begin{cases} -X, & \text{если } X < 0; \\ X, & \text{если } X \geq 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

$$1) |-x| = |x|$$

$$2) |x - y| = |y - x|$$

$$3) -|x| \leq x \leq |x|$$

$$4) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$5) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$6) |x - y| \geq |x| - |y|$$

$$7) |xy| \geq |x||y|$$

$$8) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Геометрическая интерпретация модуля:

Если точка A на числовой оси имеет координату x , то расстояние от A до нуля равно модулю x :

Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на прямой равно модулю разности координат этих точек:

$$|a - b|$$

Уравнения с модулем:

$$|x| = a$$

$ x = a$		
1) Если $a < 0$	2) Если $a = 0$	3) Если $a > 0$
решений нет	$x = 0$	$\begin{cases} x = a, \\ x = -a \end{cases}$

$$|x - b| = a$$

1) Если $a < 0$

решений нет

2) Если $a = 0$

$$x = b$$

3) Если $a > 0$

$$\begin{cases} x = b - a, \\ x = b + a \end{cases}$$

Вид уравнения	Уравнение равносильно
$ f(x) = g(x) $	<p>объединению уравнений:</p> $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$
$ f(x) = g(x)$	<p>системе уравнений:</p> $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{cases} \end{cases}$

Утверждение :

$$\text{Уравнение } |f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$$

$$\text{равносильно системе } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения уравнений с модулями методом интервалов:

- 1) Найти критические точки, т.е. значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;
- 2) Разбивают ОДЗ переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;
- 3) На каждом из найденных промежутков решить уравнение без знака модуля;
- 4) Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения.

Решить уравнение:

$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6$$

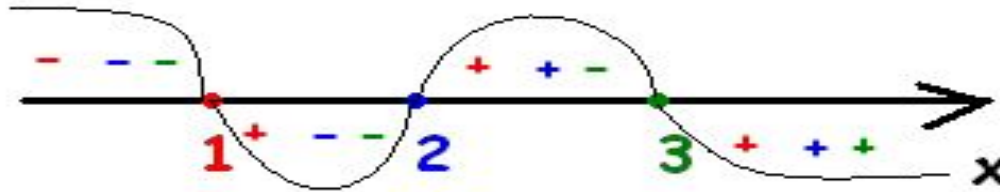
Решение:

1) Найдём критические точки подмодульных выражений:

$$x-1=0; \quad x-2=0; \quad x-3=0$$

$$x=1; \quad x=2; \quad x=3.$$

2)



3) а) $x < 1$;

$$-x+1-x+2-x+3=6,$$

$$x=0 \in (-\infty; 1)$$

б) 1) $x < 2$;

$$x-1-x+2-x+3=6$$

$$x=-2 \notin [2; 3)$$

в) 2) $x < 3$

$$x-1+x-2-x+3=6$$

$$x=-6 \notin [1; 2)$$

г) 3) $x \geq 3$

$$x-1+x-2+x-3=6$$

$$x=4 \in [3; +\infty)$$

Ответ: 0; 4

Неравенства с модулем:

$$|x - v| < a$$

1) Если $a \leq 0$

Решений нет

2) Если $a > 0$

$$v - a < x < v + a$$

Неравенства с модулями:

Вид неравенства:	неравенство равносильно
$ f(x) < g(x)$	системе: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$
$ f(x) > g(x)$	объединению: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$
$ f(x) > g(x) $	$f^2(x) > g^2(x)$ или $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$

Алгоритм решения неравенств с модулями методом интервалов:

- 1) Найти критические точки, т.е. значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;
- 2) Разбить ОДЗ переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;
- 3) На каждом из найденных промежутков решить неравенство без знака модуля;
- 4) Объединяя ответы, получаем ответ исходного неравенства.

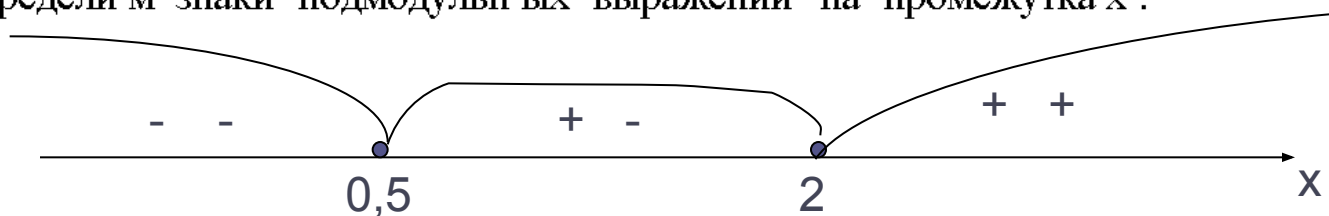
Решить неравенство:

$$|2x-1| - |x-2| \geq 4$$

1) Критическими точками являются

$$x = 0,5 \quad \text{и} \quad x = 2$$

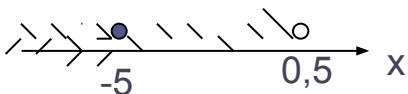
2) Определим знаки подмодульных выражений на промежутках x :



3) при $x < 0,5$

$$-2x + 1 - (-x + 2) \geq 4$$

$$x \leq -5$$

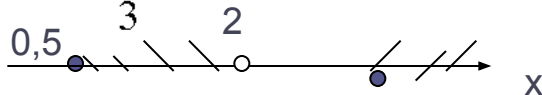


при $0,5 \leq x < 2$

$$(2x - 1) - (-x + 2) \geq 4$$

$$x \geq \frac{7}{3}$$

$$\frac{7}{3}$$

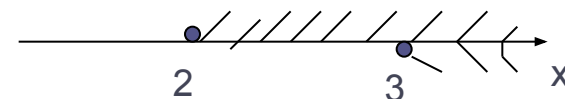


решений нет

при $x \geq 2$

$$(2x - 1) - (x - 2) \geq 4$$

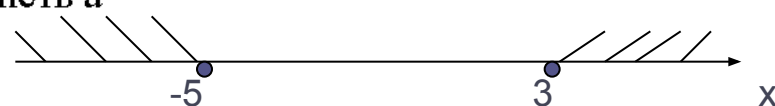
$$x \geq 3$$



4) Объединены полученные решения

$x \leq -5$ и $x \geq 3$ будет решением исходного неравенства

Ответ: $(-\infty; -5]$ и $[3; +\infty)$



Домашнее задание:

- **№ 12.1 (в)**
- **№12.5 (а)**
- **№ №12.10(в)**
- **Теоретический материал**