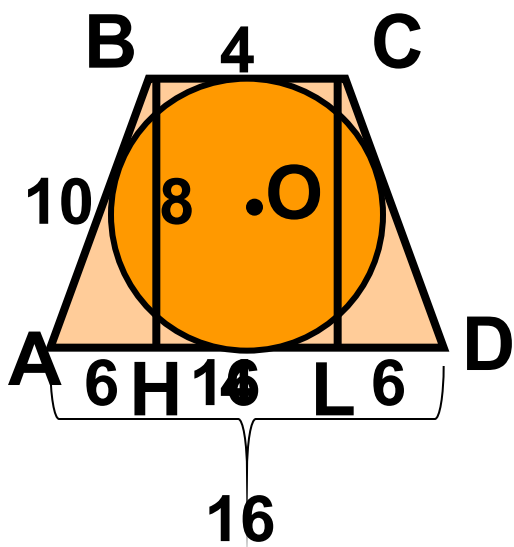


Применение интересных свойств равнобедренной трапеции при решении задач на ГИА и ЕГЭ

Сидорова А.В. учитель математики МОУ СОШ № 31 г. Мурманска

Задача 1

Найдите радиус окружности, если основания описанной около неё равнобедренной трапеции равны 4 см и 16 см.



Дано: окр. $(O; r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$

$AD = 16$ см, $BC = 4$ см

Найти: r

План решения: $r = \frac{1}{2} h$

1) $AB = 10$;

2) $AH = 6$;

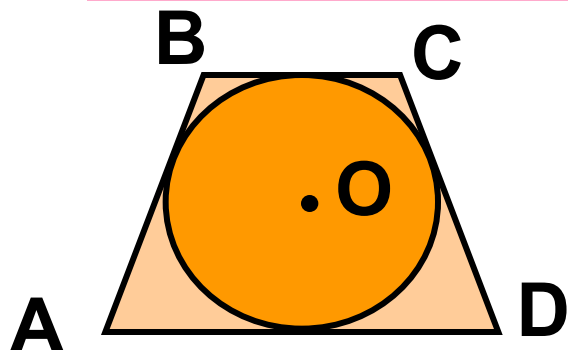
3) $BH = 8$;

4) $r = 4$

Ответ: 4

СВОЙСТВО 1

- Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то её боковая сторона равна средней линии трапеции.



Дано: окр. $(O ; r)$ вписана в трапецию $ABCD$, $AD \parallel BC$

Доказать: $AB = \frac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

по свойству четырёхугольника, описанного около окружности:

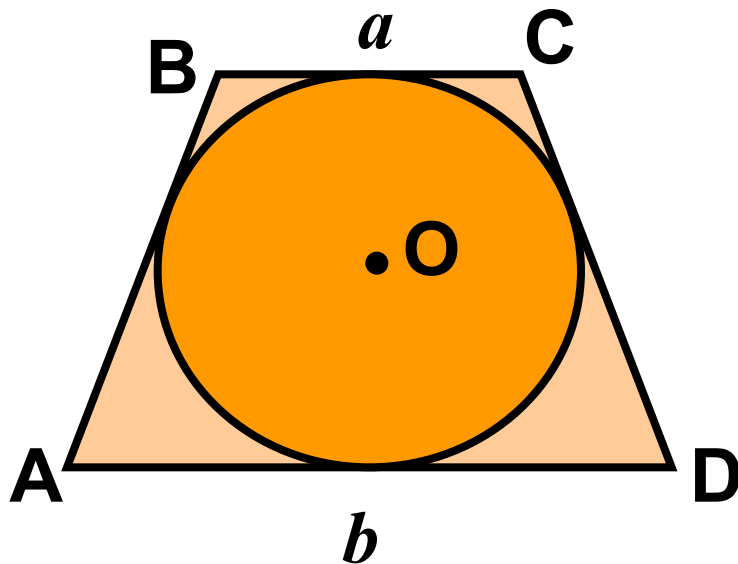
$$AB + CD = AD + BC, AB = CD,$$

$$2AB = AD + BC,$$

$$AB = \frac{AD + BC}{2}$$

СВОЙСТВО 2

- Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим её оснований: $h^2 = a \cdot b$.



Дано: окр.(O ; r) вписана
в трапецию ABCD

$$AD \parallel BC$$

$$AB = CD, BC = a, AD = b,$$

h – высота трапеции

Доказать: $h^2 = a \cdot b$

Доказательство:

1) По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности:

$$AM = AN = \frac{b}{2}, \quad BN = BK = \frac{a}{2}$$

2) Проведём высоту BH и рассмотрим

$$\triangle ABH : \angle H = 90^\circ, \quad BH = h$$

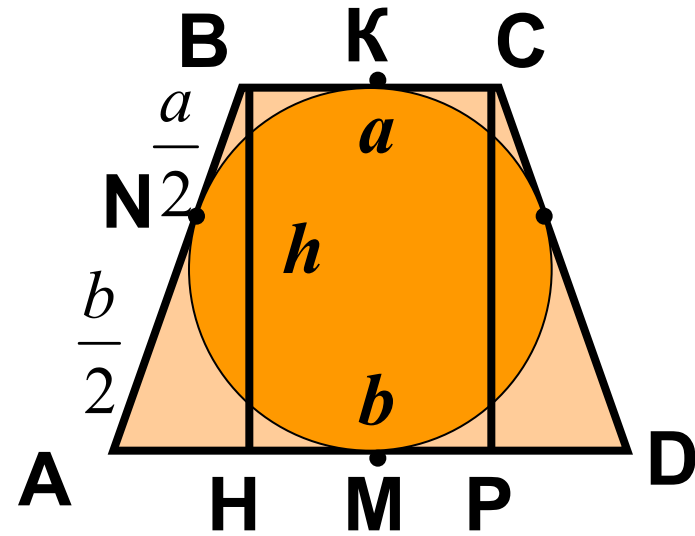
$$AH = \frac{b-a}{2}, \quad AB = \frac{a+b}{2}$$

По т. Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

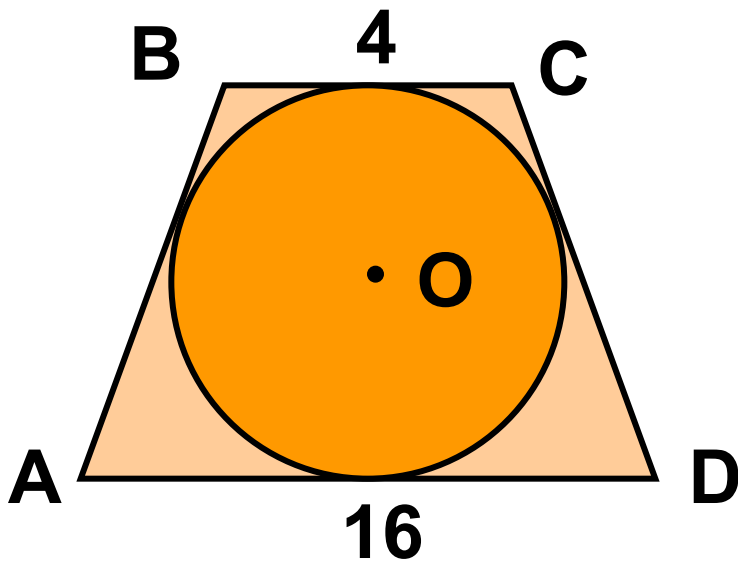
$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-b+a}{2}\right)\left(\frac{a+b+b-a}{2}\right)$$

$$h^2 = \frac{2a}{2} \cdot \frac{2b}{2} = \frac{4ab}{4}$$

$$h^2 = ab$$



Другое решение задачи 1



Дано: окр.(O;r) вписана в трапецию ABCD

AD || BC, AB = CD

AD = 16 см, BC = 4 см

Найти: r

Решение: $r = \frac{1}{2} h,$

$$h^2 = a \cdot b$$

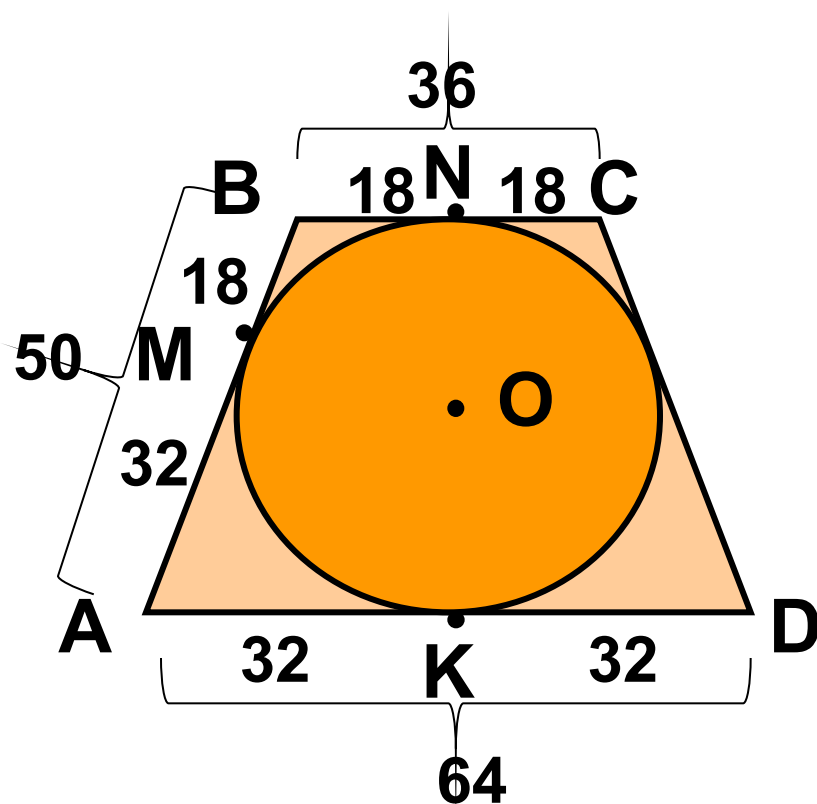
$$h = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (см)}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}$$

Ответ: r = 4 см

Задача 2

Равнобедренная трапеция описана около круга. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 18 и 32. Найдите площадь трапеции.



Дано: окр. $(O ; r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC, AB = CD, M \in AB$
 $AM = 32, MB = 18$

Найти: S_{ABCD}

План решения:

$$S = mh$$

1) $AB = m = 50$;

2) $BC = 36$;

3) $AD = 64$;

4) $h = \sqrt{a \cdot b}, h = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$;

5) $S = 50 \cdot 36 = 1800$

Ответ: 1800

Задача 3

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\sqrt{2}$. (ЕГЭ- 2007, В11)

10

Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$
 $\cos BDH = \sqrt{2}$, $BD = 10$

Найти: S

План решения: $S = mh$

1) $HD = \sqrt{2}$;

2) $BH = 7\sqrt{2}$;

3) $AH = KD = x$, $m = \frac{BC + AD}{2}$,

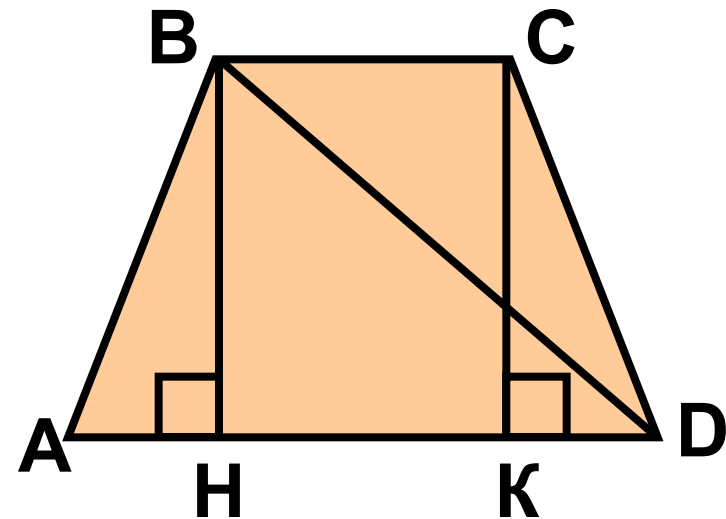
$$m = \frac{AD - 2x + AD}{2} = \frac{2AD - 2x}{2} = AD - x = HD = \sqrt{2}$$

4) $S = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

СВОЙСТВО 3

В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.



Дано: $ABCD$ - трапеция, $BC \parallel AD$,
 $AB = CD$, $BH \perp AD$, BD - диагональ

Доказать: $HD = \frac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

1) Опустим высоту CK .

$$2) AH = \frac{AD - HK}{2};$$

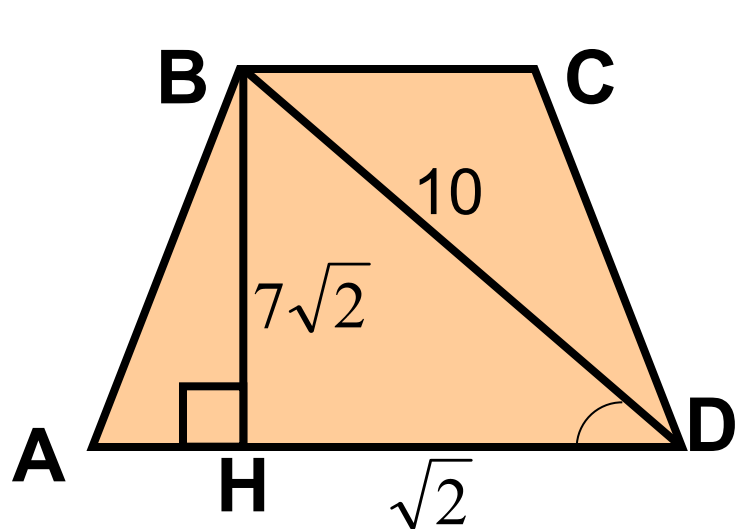
$$3) HD = AD - AH,$$

$$HD = AD - \frac{AD - BC}{2},$$

$$HD = \frac{AD + BC}{2}.$$

Другое решение задачи 3

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.



Дано: $ABCD$ - трапеция,
 $AD \parallel BC$
 $\cos BDH = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $BD = 10$
Найти: S

План решения: $S = mh$

- 1) $HD = \sqrt{2}$;
- 2) $BH = 7\sqrt{2}$;
- 3) $S = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Задача 4

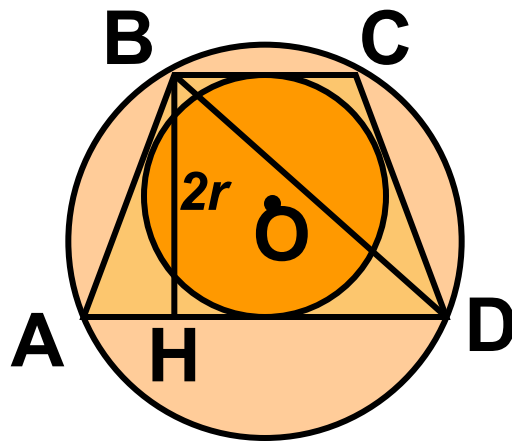
Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α . Найдите радиус круга, описанного около трапеции.

Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$, описанная около окр. $(O; r)$ и вписанная в окр. $(O_1; R)$ $AB = CD$, $\angle B = \alpha$

Найти: R

Решение: по теореме синусов

$$2R = \frac{BD}{\sin A}$$



$$1). \angle A = 180^\circ - \alpha, \sin A = \frac{BH}{AB}, AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2r}{\sin \alpha},$$

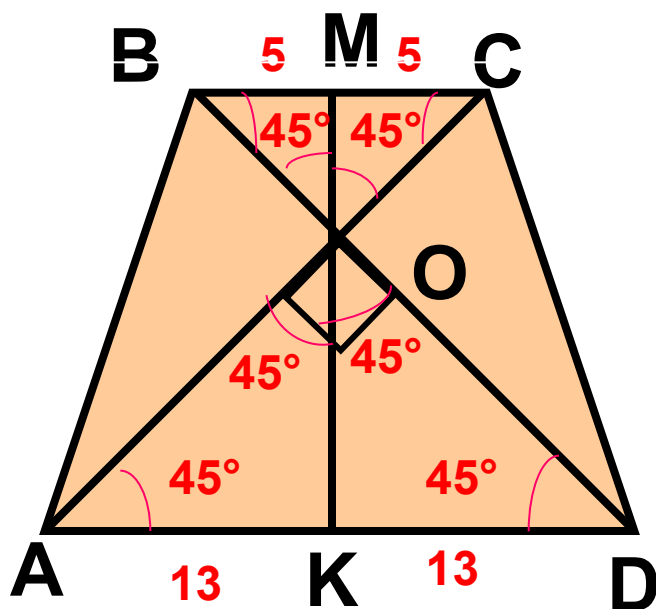
$$2). AB = HD, HD = \frac{2r}{\sin \alpha};$$

$$3). BD^2 = BH^2 + HD^2, BD = \sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{2r}{\sin \alpha}\right)^2} = \frac{2r\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$4). R = \frac{BD}{2 \sin \alpha} \rightarrow R = \frac{r\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha}$$

Задача 5

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$,
 $AB = CD$, $AD = 26$, $BC = 10$, $AC \perp BD$

Найти: S

План решения: $S = mh$

1) $m = \frac{AD + BC}{2}$

2) Проведём высоту MK ;

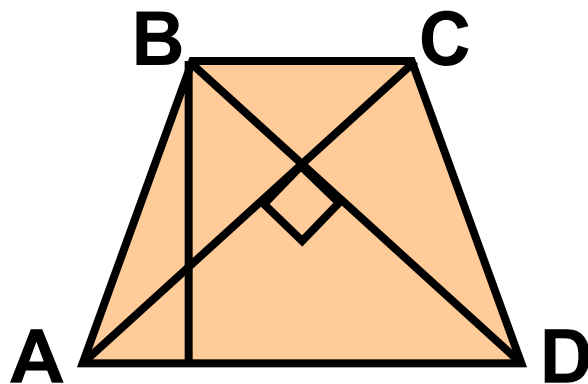
3) $AK = OK = 13$, $BM = MO = 5$, $MK = 18$

4) $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot MK$, $S = \frac{10 + 26}{2} \cdot 18 = 18 \cdot 18 = 324$

Ответ: $S = 324$.

СВОЙСТВО 4

Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии.



Дано: ABCD- трапеция, BC || AD, AB = CD, AC ⊥ BD, BH – высота

Доказать: $BH = \frac{BC + AD}{2}$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2} BD^2, S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH,$$

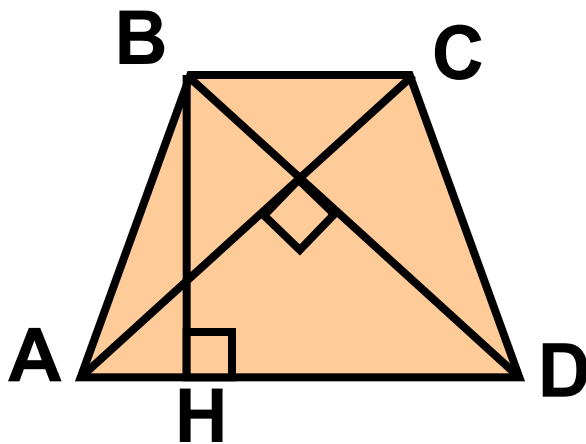
$$\frac{1}{2} BD^2 = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \quad HD = \frac{BC + AD}{2},$$

$$\frac{1}{2} (BH^2 + HD^2) = HD \cdot BH, BH^2 + HD^2 - 2HD \cdot BH = 0,$$

$$(BH - HD)^2 = 0, \quad BH = HD, \quad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

СВОЙСТВО 5

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату её высоты, т.е. $S = h^2$.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$,
 $AB = CD$, BH – высота трапеции

$AC \perp BD$

Доказать: $S = BH^2$

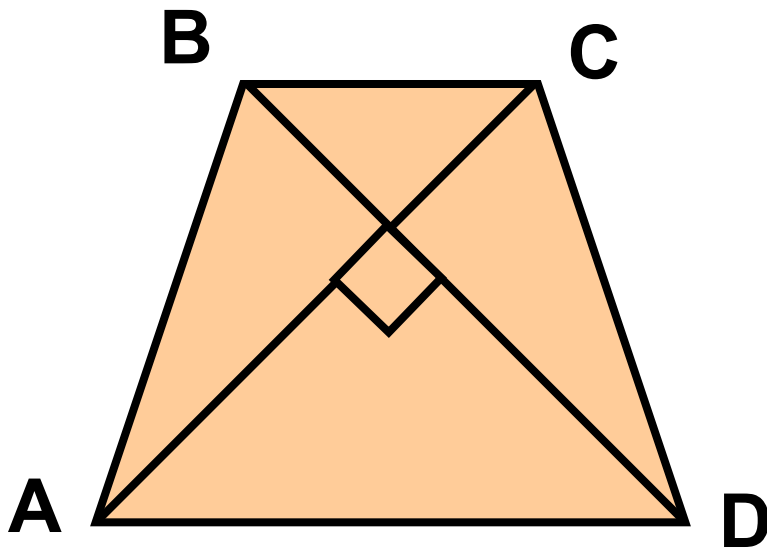
Доказательство:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \quad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

$$S = BH^2$$

Другое решение задачи 5

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: $ABCD$ -

равнобедренная трапеция,
 $AD \parallel BC$, $AD = 26$, $BC = 10$,
 $AC \perp BD$

Найти: S

Решение: $S = h^2$,
 $h = m$, $S = m^2$,

$$m = \frac{BC + AD}{2}, m = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

$$S = 18^2 = 324.$$

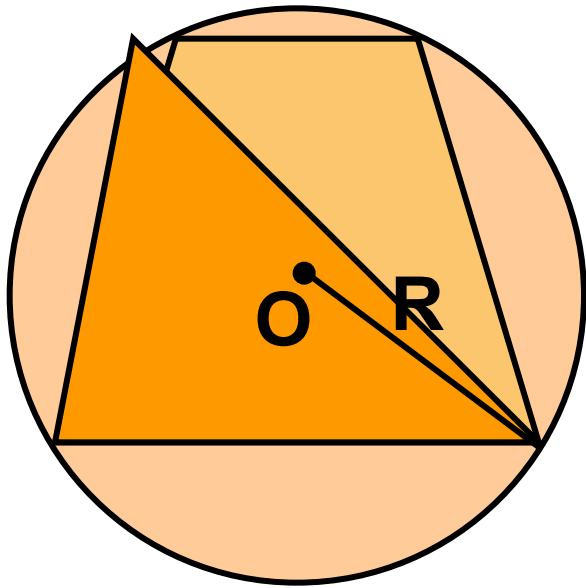
Ответ: 324

Литература

- Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Геометрия/ Под ред. М.И.Сканави.- М.: Издательский дом ОНИКС: Альянс-В, 1999.
- Зив Б.Г. ,Мейлер В.М. , Баханский А.Г. . Задачи по геометрии для 7-11 классов -М.: Просвещение, 1991.
- Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика.- М: Интеллект- Центр, 2003-2008.
- Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. ЕГЭ- 2008: математика: реальные задания.- М.: АСТ: Астрель, 2008.
- Ковалева Г.И., Бузулина Т.И., Безрукова О.Л., Розка Ю.А. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов.- Волгоград: Учитель, 2007.
- Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике.- М.: Просвещение, 1991.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 8 класса.- М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1999.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред. шк.- М.: Просвещение, 2008.
- Математика ЕГЭ- 2008. Вступительные испытания.Под ред. Ф.Ф. Лысенко.- Ростов-на-Дону: Легион, 2008.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Описанная окружность



Радиус окружности, описанной около трапеции, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, вершины которого лежат в вершинах данной трапеции.

