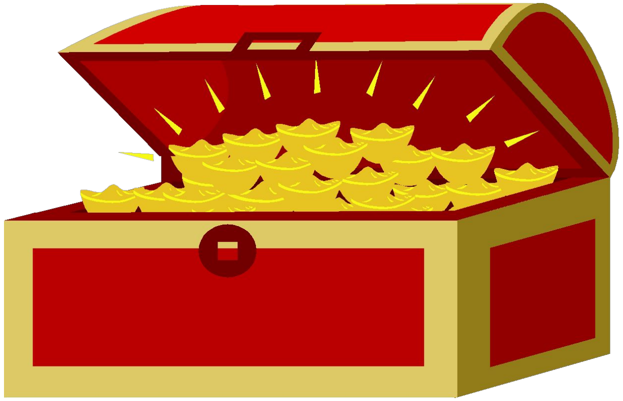
5.4. Вывод формул для расчета современной (текущей) стоимости обычной ренты (постнумерандо).



1) Обычная годовая рента

Пусть член годовой ренты равен *R*, процентная ставка *i*, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты *n*.

Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\frac{1}{1+i} = Rv,$$

где

$v = \dfrac{1}{1+i}$ – дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: $Rv, Rv^2, Rv^3, \ldots, Rv^n$, сумма которой равна

$$A = Rv\frac{v^n - 1}{v - 1} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i},$$

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

коэффициент приведения ренты

Он зависит только от двух параметров: срока ренты *n* и процентной ставки *i*. (можно представить в табличном виде).

$PVIFA_{i,n}$

Present Value Interest Factorfor an Annuity

2) Рента *p*-срочная, *p* ≥ 1, *m* ≥ 1

Аналогично получаем формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений *p* и *m:*

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]},$$

5.5. Сравнение современных стоимостей рент постнумерандо с разными условиями

Величина современной стоимости заметно зависит от условий дисконтирования и частоты выплат в пределах года.

- Обозначим сравниваемые величины как $A(p;m)$:
- А(1; 1) означает годовую ренту с ежегодным начислением процентов,
- $A(p;\infty)$ относится к р-срочной ренте с непрерывным начислением процентов.

Для одних и тех же годовых сумм выплат и процентных ставок ($i = j = \delta$) получим следующие неравенства:

$A(1; \infty) < A(1; m) < A(1;1) < A(p; \infty) < A(p;m) < A(p;m) < A(p;m) < A(p; 1).$

$m>p>1$ $\quad$ $p=m>1$ $\quad$ $p>m>1$

5.6. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты.

Пусть

A – современная величина годовой ренты постнумерандо,

S – ее наращенная стоимость к концу срока *n*,

p = 1 - число платежей в году

m = 1 - число начислений процентов

Покажем, что наращение процентов на сумму *A* за *n* лет дает сумму, равную *S*:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

Дисконтирование *S* дает *A*:

$$Sv^n = A$$

а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i}$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}\,.$$

Пример

Найти современную стоимость для ренты при наращенной сумме 31,785 млн. руб. Пусть выплата членом ренты и начисление процентов производится поквартально.

5.7. Определение параметров финансовой ренты (размера платежа, срока, процентной ставки).

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости *A* остальных параметров ренты:

***R*, *n*, *i*, *p*, *m*.**

Параметры m и *p* задаются по согласию двух подписывающих сторон.

Из параметров R, n, i : два задаются, а третий рассчитывается.

Параметры финансовой ренты:

1. **член ренты *R***– величина каждого отдельного платежа,
2. **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами,
3. **срок ренты *n*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода,
4. **процентная ставка *i***– ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

1) Определение размера ежегодной суммы платежа R

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана *S* или *A*, возможны два варианта расчета:

$$R = S / s_{n;I}$$ или $$R = A / a_{n;i}.$$

2) Определение срока постоянной ренты

(на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами). Решая исходные формулы для *S* и *A*

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ и } A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad (1)$$

относительно срока n, получаем соответственно:

имеет смысл только
при *R>Ai*.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} \quad \text{и} \quad n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}$$

имеет смысл
только
при *R>Ai*.

3) Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку *i*, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (1), которые эквивалентны двум другим:

$$\boxed{\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{S}{R}=s_{n;i}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{A}{R}=a_{n;i}} \qquad (2)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка *i*.

Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений

(продолжение на занятиях)…