Издательство «Легион»

Использование координатно-параметрического метода при решении алгебраических задач ЕГЭ типа С5

докладчик: Войта Елена Александровна

КП-метод

Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом в точке O. Ось Ox называется *координатной*, а ось Oa – *параметрической.*

Вся плоскость называется *координатно-параметрической (КП-плоскость).*

Метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость называется *координатно-параметрическим или КП-методом.*

КП-метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют условию задачи.

№1. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых неравенство

$$\frac{x-a}{x-6a}<0$$

выполняется при всех значениях x, таких, что $2 \le x \le 3$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

Решение

1. Пусть $a \leqslant 0$. Тогда при $x \in [2; 3]$ выполняются неравенства $x - a > 0$ и $x - 6a > 0$. Значит, $\dfrac{x-a}{x-6a} > 0$, что противоречит исходному неравенству.

2. Пусть $a > 0$. Тогда решением неравенства $\dfrac{x-a}{x-6a} < 0$ будет интервал $x \in (a; 6a)$ (см. рис. 1). По условию $[2; 3] \subset (a; 6a)$, то есть $\begin{cases} a < 2, \\ 6a > 3; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a < 2, \\ a > \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

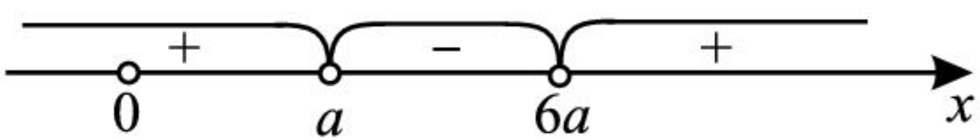
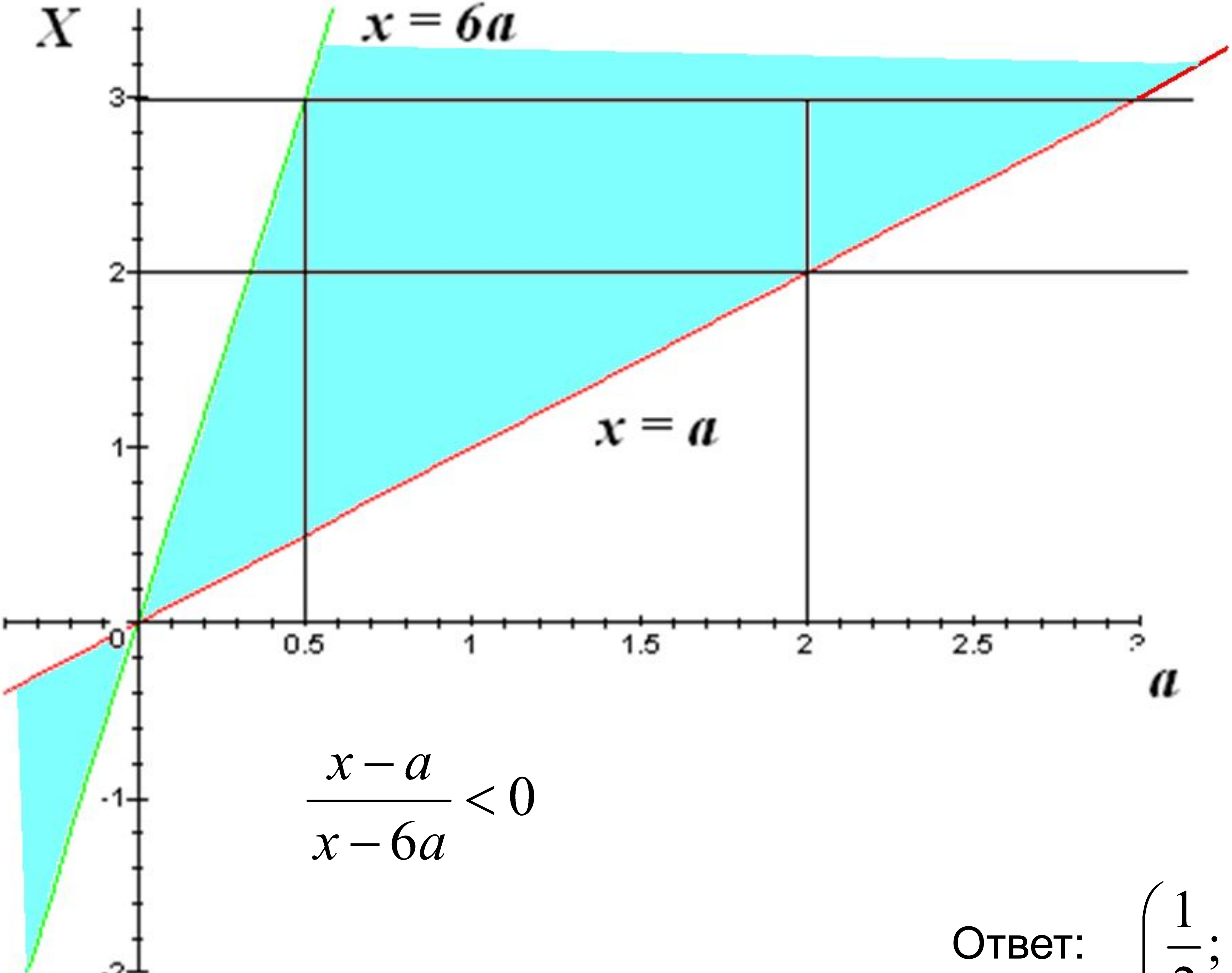


Рис. 1.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Решение



$$\frac{x-a}{x-6a}<0$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

№2. При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют условию $|x|<1$?

Ответ: $\{0\}\cup\left(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{5}\right).$

Решение

1. Пусть $a = 0$. Тогда исходное уравнение

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

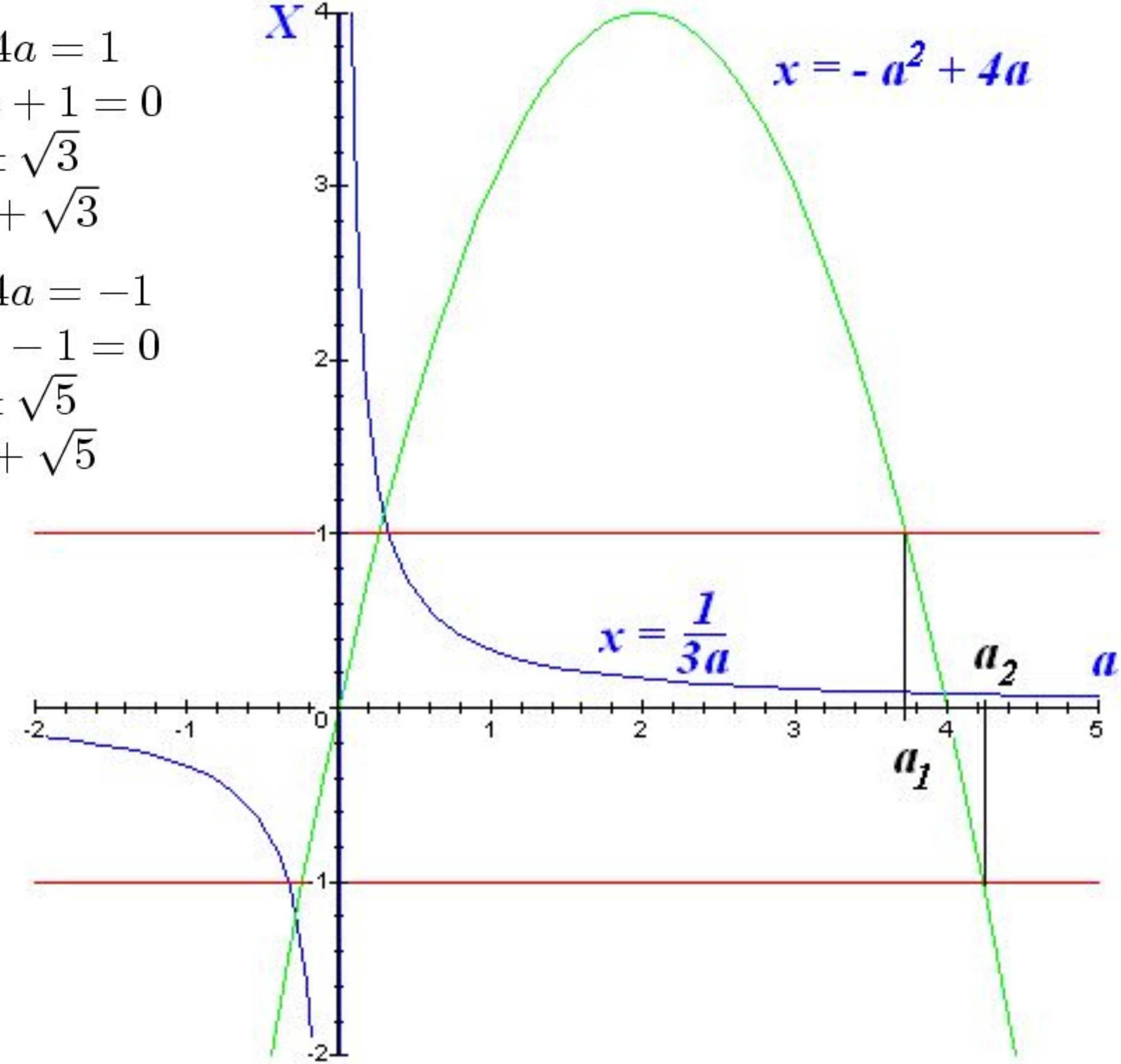
примет вид $-x = 0$. Его единственный корень $x = 0$ удовлетворяет условию $|x| < 1$.

2. Пусть $a \neq 0$. Тогда разделив обе части уравнения на $3a$, получим приведенное уравнение $x^2 + \left(a^2 - 4a - \dfrac{1}{3a}\right)x - \dfrac{a-4}{3} = 0$. Его корни $x_1 = -a^2 + 4a$ и $x_2 = \dfrac{1}{3a}$. Тогда уравнение примет вид:

$$(x + a^2 - 4a)\left(x - \frac{1}{3a}\right) = 0.$$

$$-a^2 + 4a = 1$$
$$a^2 - 4a + 1 = 0$$
$$a = 2 \pm \sqrt{3}$$
$$a_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$-a^2 + 4a = -1$$
$$a^2 - 4a - 1 = 0$$
$$a = 2 \pm \sqrt{5}$$
$$a_2 = 2 + \sqrt{5}$$



№3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\log_{x+a}(2x-a)\geq 1.$$

Ответ:

$$a\leq 0,\ \ x\in(1-a;+\infty),$$

$$0<a<\frac{1}{3},\ \ x\in\left(\frac{a}{2};2a\right]\cup(1-a;+\infty),$$

$$a=\frac{1}{3},\ \ x\in\left(\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right),$$

$$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3},\ \ x\in\left(\frac{a}{2};1-a\right)\cup[2a;+\infty),$$

$$a\geq\frac{2}{3},\ \ x\in[2a;+\infty).$$

Решение

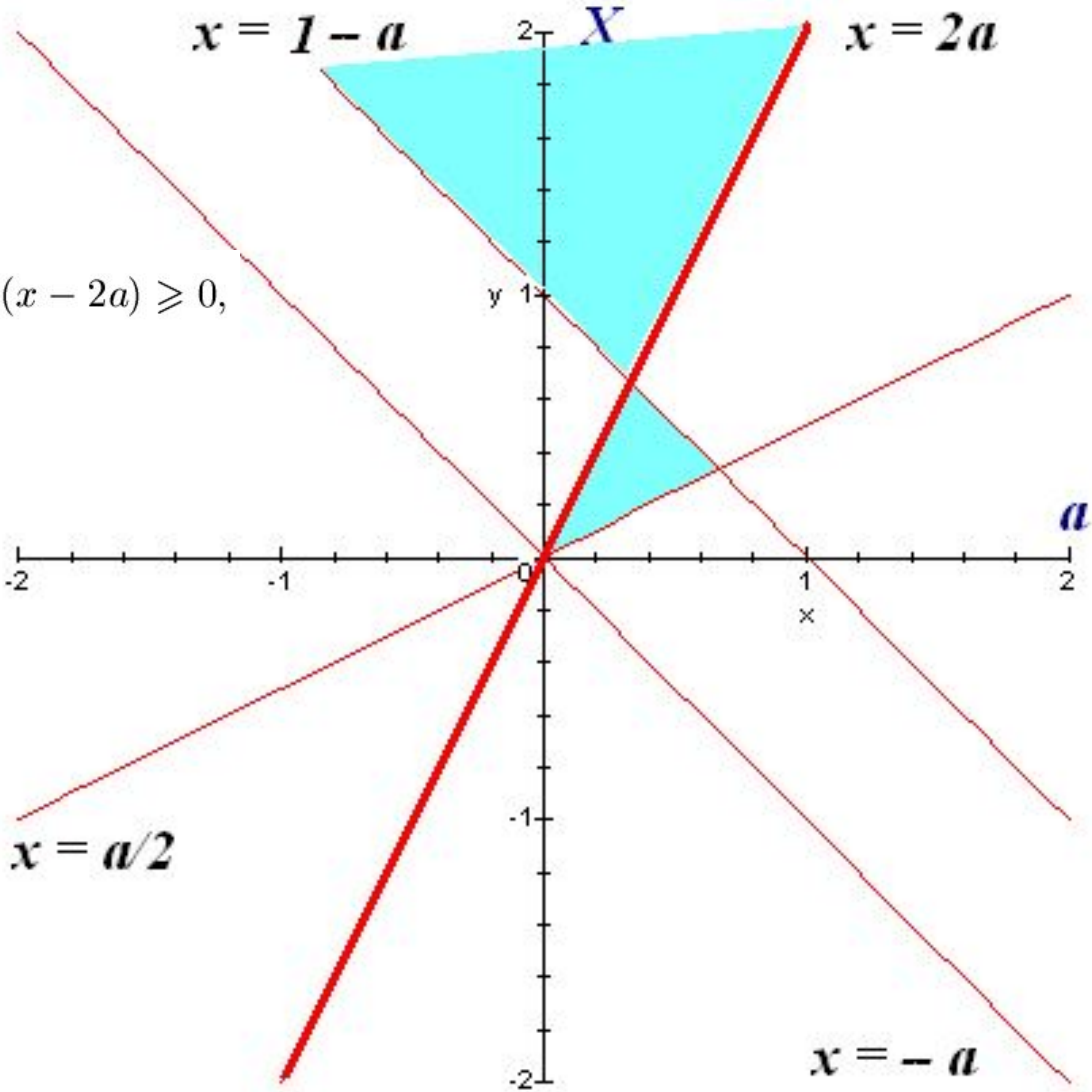
Неравенство $\log_{x+a}(2x-a) \geqslant 1$ можно заменить равносильной ему системой

$$\begin{cases} (x+a-1)(2x-a-x-a) \geqslant 0, \\ x+a>0, \\ x+a \neq 1, \\ 2x-a>0, \end{cases}$$

которую запишем в виде

$$\begin{cases} (x+a-1)(x-2a) \geqslant 0, \\ x>-a, \\ x \neq 1-a, \\ x>\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+a-1)(x-2a) \geqslant 0, \\ x > -a, \\ x \neq 1-a, \\ x > \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$



Ответ:

$$a \le 0, \quad x \in (1-a;+\infty),$$

$$0 < a < \frac{1}{3}, \quad x \in \left(\frac{a}{2};2a\right] \cup (1-a;+\infty),$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad x \in \left(\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};+\infty\right),$$

$$\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}, \quad x \in \left(\frac{a}{2};1-a\right) \cup [2a;+\infty),$$

$$a \ge \frac{2}{3}, \quad x \in [2a;+\infty).$$

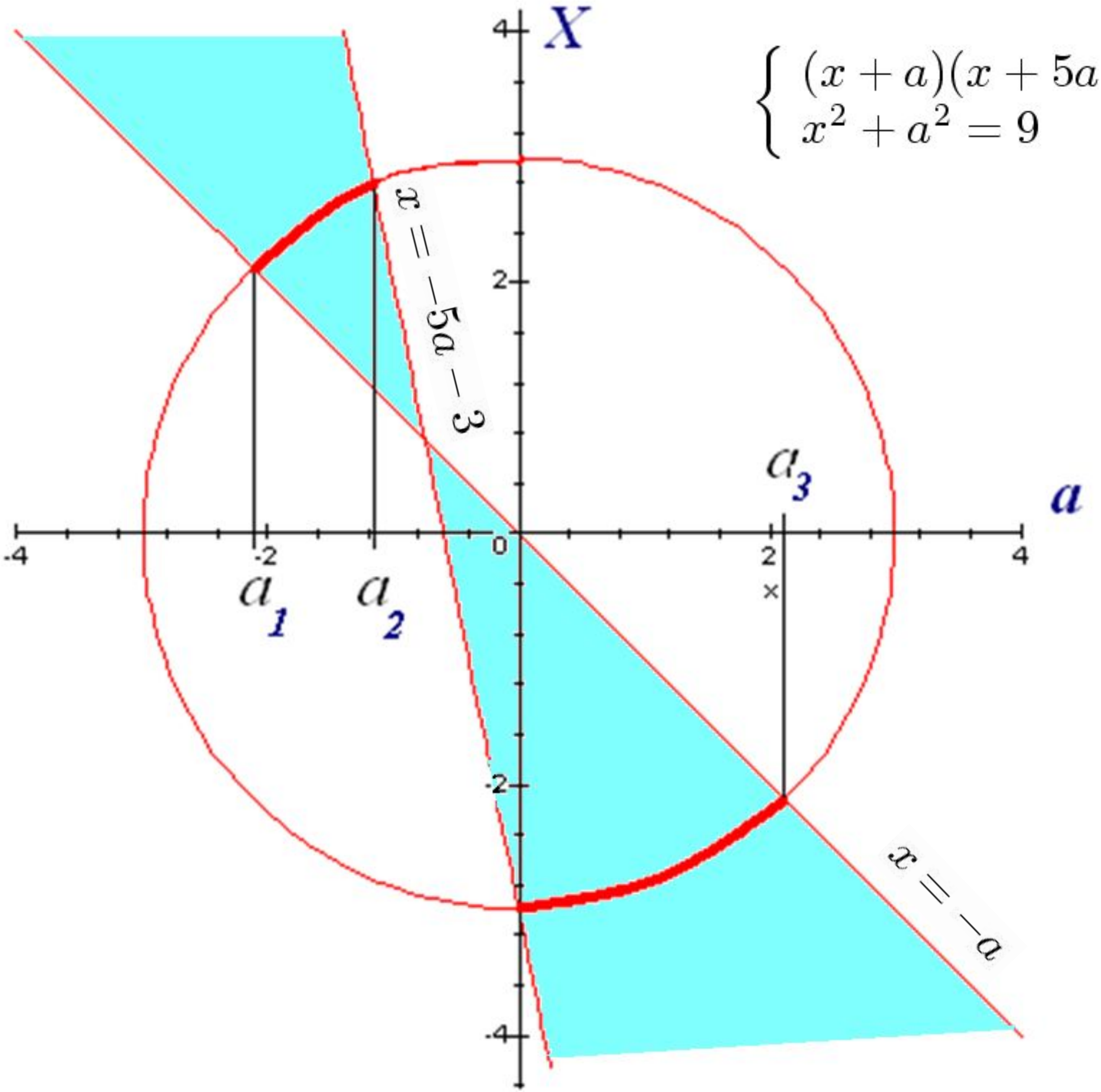
№4. Найдите все значения *a,* при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(6a+3)x+5a^2+3a<0, \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$$

имеет решения.

Ответ: $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{15}{13}\right)\cup\left(0;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right).$

$$\begin{cases} (x+a)(x+5a+3) < 0 \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$



5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

(ЕГЭ-2013, досрочный экзамен)

Условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases} a - x + 2 = (1 - x)^2, \\ a - x + 2 > 0, \\ x \in [-1; 0) \cup (0; 1). \end{cases}$$

Перепишем систему в виде

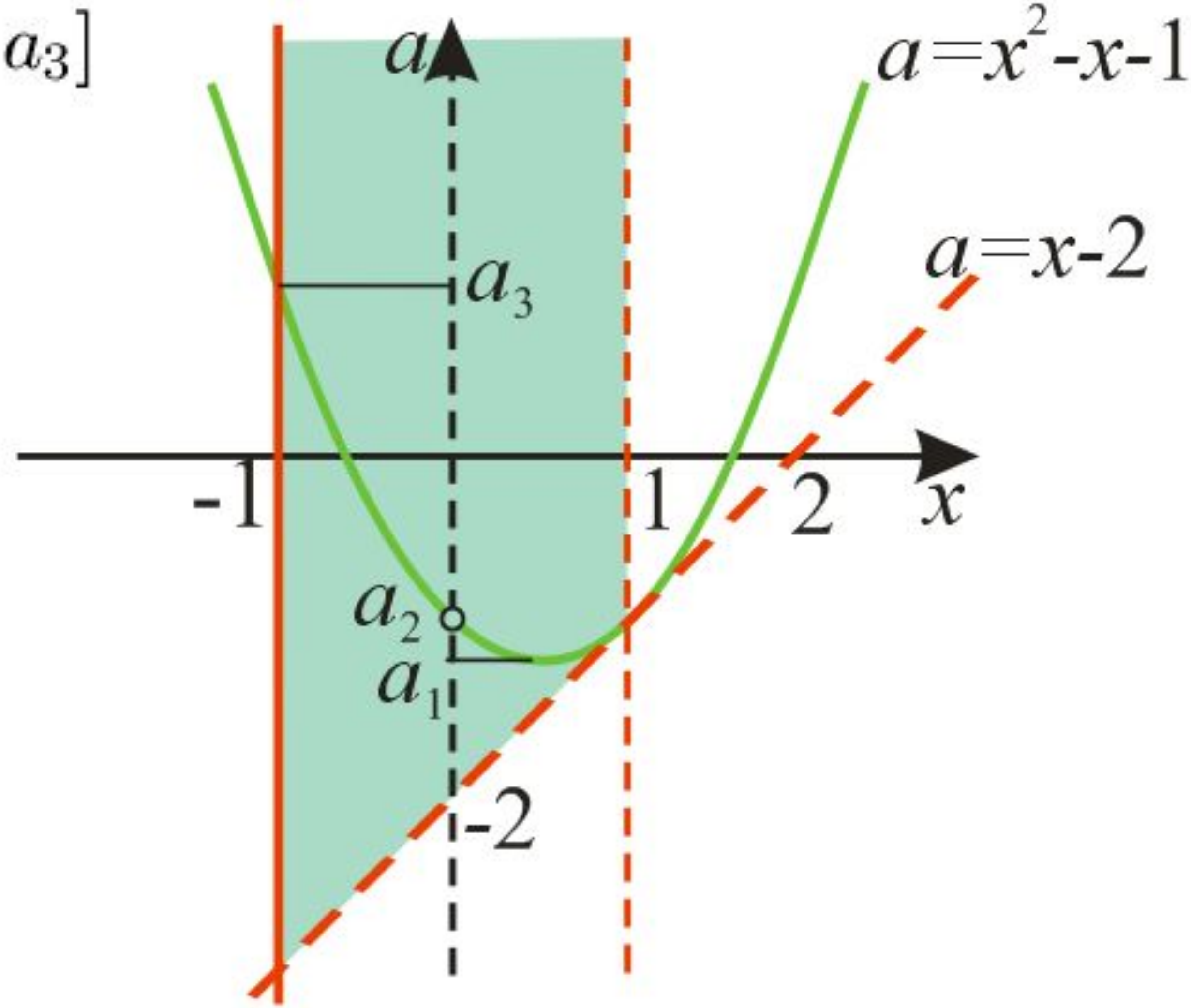
$$\begin{cases} a = x^2 - x - 1, \\ a > x + 2, \\ x \in [-1; 0) \cup (0; 1). \end{cases}$$

$$x \in [a_1; a_2) \cup (a_2; a_3]$$

$$a_1 = -\frac{5}{4}$$

$$a_2 = -1$$

$$a_3 = 1$$



Литература

1. *Моденов В. П.* Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие. – М.: «Экзамен», 2007. – 285 с.
2. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО». 1992. – 290 с.
3. Легион, под.ред. Лысенко, Кулабухова. Задание С5: учимся решать задачи с параметром.