

**МБОУ «Солоновская средняя общеобразовательная  
школа имени Матренина А.П.»**



**Задачи математического  
содержания в ЕГЭ № 19**

**Шарабарина Галина Гавриловна, учитель математики**



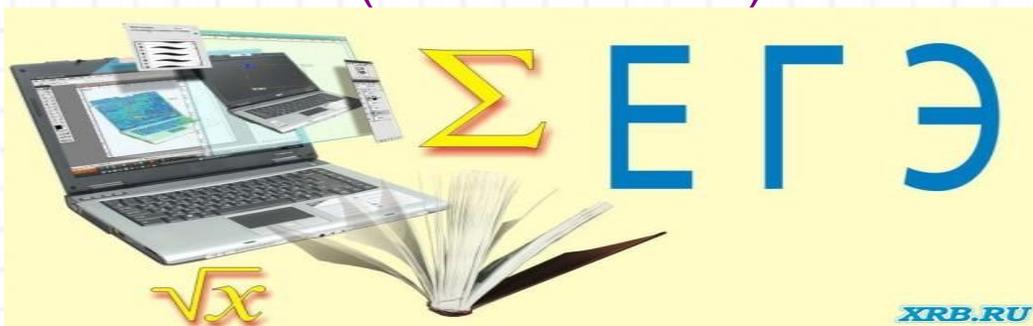
## 11. Изменения в структуре и содержании вариантов контрольных измерительных материалов 2015 года по сравнению с 2014 годом

1. Во второй части добавлено задание повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом, проверяющее практические навыки применения математики в повседневной жизни, навыки построения и исследования математических моделей.

### Актуальность:

В этом учебном году в вариантах ЕГЭ-2015 по математике появилась новая задача №19 – задача с экономическим содержанием.

Эта специфическая задача № 19 оказалась сюрпризом не только для школьников, но даже для учителей. С чего начать решение? Где взять формулы? На что вообще похожа эта задача и почему в вариантах ЕГЭ она расположена между сложными С4 и С5 (то есть 18 и 20)?





# Проценты

Процент — это  $\frac{1}{100}$  часть.

Если величина  $B$  равна  $x\%$  от  $A$ , то

$$B = \frac{x}{100} A.$$

Если величина  $C$  увеличилась на  $x$  процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) C.$$

Если величина  $C$  уменьшилась на  $x$  процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) C.$$

## № 1



19. 30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?



*Решение.*

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по 360 000 рублей.

После первого месяца:

$$1,02 \cdot 800\,000 = 816\,000 \text{ рублей,}$$
$$816\,000 - 360\,000 = 456\,000 \text{ рублей.}$$

После второго месяца:

$$1,02 \cdot 456\,000 = 465\,120 \text{ рублей,}$$
$$465\,120 - 360\,000 = 105\,120 \text{ рублей.}$$

После третьего месяца:

$$1,02 \cdot 105\,120 = 107\,222,4 \text{ рублей,}$$
$$107\,222,4 - 107\,222,4 = 0.$$

*Ответ: 3*



**№ 2.** 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн.рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс.рублей.?

**1.01.2015 :** взял 1,1 млн.руб

**1.02.2015 после начисления 1% :**  $1100000(1+0,01)=1111000$  руб.,  
после выплаты:  $1111000-275000=836000$  руб.

**1.03.2015 после начисления 1%:**  $836000(1+0,01)=844360$  руб.  
после выплаты :  $844360-275000=569360$  руб.

**1.04.2015 после начисления 1%:**  $569360(1+0,01)=575053,6$  руб.  
после выплаты :  $575053,6-275000=300053,6$  руб.

**1.05.2015 после начисления 1%:**  $300053,6(1+0,01)=303054,136$ руб  
после выплаты:  $303054,136-275000=28054,136$ руб.

**1.06.2015 после начисления 1%:**  $28054,136(1+0,01) = 28334,7736 <$   
 $275000$ , следовательно закрывает кредит.



Максим хочет взять в кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

**Решение.**

При начислении процентов оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент  $1 + 0,01 \cdot 10 = 1,1$ . В конце первого года долг составит  $1500000 \cdot 1,1 = 1650000$  рублей. После выплаты 350 тысяч рублей останется долг 1350000 рублей. И так далее. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1500000	—
1	1650000	1300000
2	1430000	1080000
3	1188000	838000
4	921800	571800
5	628980	278980
6	306878	0



Значит, Максим погасит кредит за 6 лет.

**Ответ: 6.**



## № 2

19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Пусть  $S$ -сумма кредита;  $a\%$  - годовые;  $x$  – сумма выплаты  
 $b = (1+0,01a)$  - коэффициент (31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент  $b$ ). Тогда

I

$$S_1 = Sb - x \quad \text{сумма долга после первой выплаты}$$

II

$$S_2 = S_1 b - x = (Sb - x) \cdot b - x = Sb^2 - bx - x$$

III

$$S_3 = S_2 b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2 x - bx - x$$

IV

$$S_4 = S_3 b - x = (Sb^3 - b^2 x - bx - x) \cdot b - x = Sb^4 - b^3 x - b^2 x - bx - x$$
$$Sb^4 - x \cdot (b^3 + b^2 + b + 1) = Sb^4 - x \cdot (b + 1) \cdot (b^2 + 1)$$



19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

**Последняя сумма выплаты после третьей выплаты**

$$S_3 = S_2 b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2 x - bx - x$$

$$Sb^3 = x \cdot (b^2 + b + 1)$$

$$x = \frac{Sb^3}{b^2 + b + 1}$$

$$b = 1 + 0,01 \cdot 30 = 1,3$$

$$X = \frac{15960000 \cdot 1,3^3}{1,3^2 + 1,3 + 1} = \frac{35064120}{3,99} = 8788000$$

**Ответ: 8 788 000 рублей**



**31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк  $X$  рублей. Какой должна быть сумма  $X$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?**



### **Решение.**

Пусть  $S = 6902000$  р.,  $b = 1,125$  (то есть 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент  $b$ ). Тогда:

**31.12.2015 год:**  $(Sb - X)$  – (сумма долга после первой выплаты)

**31.12.2016 год:**  $S_2 = S_1b - x = (Sb - x) \cdot b - x = Sb^2 - bx - x$  – сумма долга после второй выплаты

**31.12.2017 год:**  $S_3 = S_2b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2x - bx - x$  – сумма долга после третьей выплаты

**31.12.2018 год:**  
 $S_4 = S_3b - x = (Sb^3 - b^2x - bx - x) \cdot b - x = Sb^4 - b^3x - b^2x - bx - x$   
– последняя сумма выплаты после четвертой выплаты

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

$$Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0$$

$$Sb^4 - x \cdot (b^3 + b^2 + b + 1) = Sb^4 - x \cdot (b + 1) \cdot (b^2 + 1)$$

$$x = \frac{Sb^4}{(b + 1) \cdot (b^2 + 1)} \quad 1,125 = \frac{9}{8}$$

$$x = \frac{6902000 \cdot \frac{81}{64} \cdot \frac{81}{64}}{\left(\frac{9}{8} + 1\right) \cdot \left(\frac{81}{64} + 1\right)} = \frac{6902000 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 8}{64 \cdot 64 \cdot 17 \cdot 145} = 350 \cdot 81 \cdot 81 = 2296350$$

**Ответ: 2 296 350**





№ 2.

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

№3

### Решение.

Пусть  $S$  – сумма кредита,  $a$  – годовой %,  $b=1+0,01a$ ,  $X_1=328050$  р.,  $X_2=587250$  р.

Рассчитаем кредит на 4 года:

**31.12.2015:**  $(Sb - X)$

**31.12.2016:**  $(Sb - X)b - X$

**31.12.2017:**  $(S^2 - xb - x)b - x = Sb^3 - xb^2 - xb - x$

**31.12.2018:**  $(Sb^3 - xb^2 - xb - x)b - x = 0$





№ 2.

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

$$Sb^4 = x(b^3 + b^2 + b + 1) \quad S = \frac{X(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4} \quad S = \frac{328050(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4}$$

**Рассчитаем кредит на 2 года:**

**31.12.2015:**  $(Sb - X)$       **31.12.2016:**  $(Sb - X)b - X = 0$

$$Sb^2 - Xb - X = 0$$

$$Sb^2 = Xb + X$$

$$S = \frac{X(b + 1)}{b^2}$$

$$S = \frac{587250(b + 1)}{b^2}$$



31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

**Так как сумма кредита одна и та же, то приравняем полученные равенства.**

$$\frac{328050(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4} = \frac{587250(b + 1)}{b^2} \cdot b^4$$

$$328050(b^3 + b^2 + b + 1) = 587250(b^3 + b^2)$$

$$(b + 1)(b^2 + 1) \cdot 6561 = 11745b^2(b + 1)$$

$$6561b^2 + 6561 = 11745b^2$$

$$5184b^2 = 6561$$

$$b^2 = \frac{729}{576}$$

$$b = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$$

$$b = 1 + 0,01a$$

$$\frac{9}{8} = 1 + 0,01a$$

$$0,01a = \frac{1}{8}$$

$$a = 0,125 : 0,01$$

$$a = 12,5$$

**Ответ: 12,5%**



31 декабря 2014 года Фёдор взял в банке 6951000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Фёдор переводит в банк платёж. Весь долг Фёдор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

## №4

**Рассчитаем кредит на 2 года:**

$$Sb^2 - Xb - X = 0$$

$$Sb^2 = Xb + X$$

$$x = \frac{Sb^2}{b+1}$$

$$x = \frac{6951000 \cdot 1,21}{2,1} = 4005100$$

$$4005100 \cdot 2 = 8010200$$

$$8385300 - 8010200 = 375100$$

**Ответ: на 375100 рублей**

**Последняя сумма выплаты  
после третьей выплаты**

$$Sb^3 = x \cdot (b^2 + b + 1)$$

$$x = \frac{Sb^3}{b^2 + b + 1}$$

$$X = \frac{6951000 \cdot 1,1^3}{1,1^2 + 1,1 + 1} = \frac{6951000 \cdot 1,331}{3,31} = 2795100$$

$$2795100 \cdot 3 = 8385300$$



В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвертого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

**№5**

**Решение.** Пусть  $S=64\ 000$  руб,  $b=1+0,25=1,25=5/4$

$X$  - фиксированная сумма.

**1 год:**  $S_1 = Sb+x$

**2 год:**  $S_2 = S_1b + x = (Sb + x) \cdot b + x = Sb^2 + bx + x$

**3 год:**  $S_3 = S_2b + x = Sb^3 + b^2x + bx + x$

**4 год:**  $S_4 = S_3b = Sb^4 + b^3x + b^2x + bx$

**Решим полученное уравнение.**



В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

$$Sb^4 + x(b^3 + b^2 + b) = 385000$$

$$x = \frac{385000 - 64000 \cdot \frac{625}{256}}{\frac{125}{64} + \frac{25}{16} + \frac{5}{4}} = \frac{228750}{\frac{305}{64}} = 48000$$



**Ответ.** 48 000



**31 декабря 2014 года Георгий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты такая - 31 декабря следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Георгий переводит очередной транш. Георгий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 570 тыс. рублей, во второй 599,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Георгию?**

**№6**

**Решение.**

Пусть  $S$  – сумма кредита,  $a$  – годовой %,  $b=1+0,01a$ ,  $X_1=570000$  р.,  $X_2=599400$  р.

$$S_2 = S_1 b - x_2 = (Sb - x_1) \cdot b - x_2 = Sb^2 - bx_1 - x_2$$

$$1000000b^2 - 570000b - 599400 = 0$$

$$5000b^2 - 2850b - 2997 = 0$$

$$D = 8122500 + 59940000 = 68062500$$

$$b = \frac{2850 + 8250}{10000}$$

$$b = 1,1$$

$$b = 1+0,01a$$

$$1,11 = 1+0,01a$$

$$a = 0,11/0,01 = 11$$

**Ответ: 11%**

По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

- В данной задаче есть два момента времени - настоящее и будущее.

Пусть одна и та же квартира стоит  $x$  рублей, она же -  $y$  евро

$$x \text{ рублей} = y \text{ евро}$$

Но это сейчас. Но в будущем квартира будет стоить  $0,8x$  рублей. Эта же квартира подешевеет и в евро и будет стоить  $0,6y$  евро.

$$0,8x \text{ рублей} = 0,6y \text{ евро}$$

$$x \text{ рублей} = 0,75y \text{ евро}$$

Иначе говоря, в будущем соотношение между рублём и евро такое:

$$0,8x = 0,6y$$

$$8x = 6y$$

$$4x = 3y$$



По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

А что же требуется узнать в задаче? Цену в будущем на *нечто* в евро, если известно, что это *нечто* подешевеет и будет стоить  $0,9x$  рублей.

$$0,9x \text{ рублей} = 0,675y \text{ евро}$$

Будущая евровая цена будет составлять 67,5% от цены настоящей.

$$y - 0,675y = 0,325y$$

Это значит, что цена в евро уменьшится на 32,5%.

Ответ: на 32,5%



Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

Решение:

Пусть фирма приобрела первый пакет акций за  $x$  рублей, а второй – за  $y$  рублей.

при продаже первого пакета прибыль составила 40%, то есть акции были проданы за  $1,4x$  руб.

при продаже второго – 20%, то есть акции были проданы за  $1,2y$  руб.

Фирма продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, то есть

$$1,4x + 1,2y = 7680000$$

получив при этом 28% прибыли, следовательно руб.

$$1,28(x + y) = 7680000$$

$$\begin{cases} 1,4x + 1,2y = 7680000 \\ 1,28(x + y) = 7680000 \end{cases}$$

Получили систему уравнений:

Вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$\begin{aligned} 0,12x - 0,08y &= 0 \\ 12x &= 8y \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Подставим выражение для  $y$  в первое уравнение системы. Получим:

$$1,4x + 1,2\left(\frac{3}{2}x\right) = 7680000 \quad \begin{aligned} X &= 2400000 \\ Y &= 3600000 \end{aligned}$$

**Ответ: 2400000, 3600000**



# Литерату

- **Интернет – сайты:**

<http://ru.wikipedia.org>

- [Открытый банк заданий ЕГЭ по математике](#)
- [Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РЕШУ ЕГЭ, МАТЕМАТИКА»](#)
- **ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л.Семенова, и.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен»**